高等学校教学用書



数学分析原理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著
吴亲仁 陆秀丽 譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）著“数学分析原理”（Основы математического анализа）第一卷1956年版譯出。原书經苏联高等教育部审定为綜合大学数学力学系和数学物理系教科书以及师范学院数学物理系教学参考书。

全书共二卷，第一卷中譯本分二分册出版。第一分册的内容是：实数、单变量的函数、极限論、单变量的連續函数、单变量函数的微分法、微分学的基本定理、应用导数来研究函数、多元函数、多元函数的微分学共九章。

数学分析原理

第一卷 第一分册

格·馬·菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 陆秀丽 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号13010·606 开本850×1168 1/32 印张9 10/16

字数227,000 印数17,001—25,000 定价(6) ¥0.95

1959年6月第1版 1960年3月北京第3次印刷

序 言

“数学分析原理”是作为大学数学系一二年級学生的分析教科书而編写的；因此也就把书分成两卷。在編写本书时，广泛地采用了我的三卷本“微积分学教程”的材料；但为了要使本书接近于正式的数学分析教学大綱与讲課的实际可能性，我已把这三卷中包含的材料加以精簡与修改。

我給自己定下的任务是这样的：

1. 我认为在数学分析原理中主要的一个任务是要做到叙述上的系統性与在可能范圍內的严格性。为了使給予学生的知識有一定的系統，我认为对于教科书来說，材料的叙述有必要按照邏輯的順序。

虽然如此，但教本这样的編排仍然使讲課者在个別的地方——从教授法着眼——有可能放弃严格的系統性（也許，甚至使他更容易获得这种可能）。例如，我自己在讲課中通常把那种对于初学者困难的东西，如实数理論、收斂性原理或者連續函数的性質都稍稍拖后。

2. 同时，数学分析教程对于学生来說，不应該只是一連串的“定义”与“定理”，而应該是行动的指南。必須教会学生把这些定理应用到实际中去，帮助他們掌握分析的計算工具。虽然这个任务大部分是落到分析的习題課上，可是随着理論材料的叙述，我也按照需要采用了一些例題；例題为数虽不多，但却是为了培养学生能自觉地做习題而选擇的。

3. 大家知道，数学分析无論在数学本身方面或在相近的知識领域方面有着何等奇妙的与多种多样的应用；学生以后将会时常

碰到它們。可是关于数学分析与其他数学部門，以及与实际需要相联系的这种思想，那末在研究分析原理时就应該为学生所通曉。正因为如此，所以一有可能，我就引进了分析在几何上、在力学上以及在物理上与工程上的应用的例題。

4. 关于把分析計算一直算到求出数字的結果的問題，在原則上与实用上有着同样的重要性。因为只有在最簡单的情况下，分析上的問題才有"准確的"解或"有限形状的"解，所以使学生熟悉近似方法的运用与学会作出近似公式都有其重要性。在本书中也注意到了这一点。

5. 关于叙述本身方面，我想作少許說明。首先要提到的是极限概念，它在分析的基本概念中占有主要的地位，并且以各种形式出現而貫串着全部教程。这种情况向我們提出了一項任务，那就是要建立各种形式的极限的統一概念。这不仅在原則上是重要的，而且在实际上也是必須的，为的是避免时常要从新建立极限的理論。要达到这个目的，有兩条途徑：或者一开始就給出"有序变量"的最一般的极限定义（例如，跟着沙都諾夫斯基与摩尔-史密斯那样去做），或者把各种极限归結为最簡单的情形——在編号数列上变化着的变量的极限。第一种观点对初学者是不易了解的，所以我采用了第二种观点：每一种新形式的极限定义首先都用序列的极限給出，然后才用"ε-δ 語言"給出。

6. 还要指出叙述上的一个細节：在第二卷中，講到曲綫积分与曲面积分时，我提出了"第一型"的曲綫积分与曲面积分（恰好与沿无定向的区域的普通积分及二重积分相似）和"第二型"的这些积分（其中相似之处已經局部地失去了）之間的区別。根据多次的經驗，我深信这样的区分有助于更好的了解，并且也便于应用。

7. 在对数学大綱所作的为数不多的补充中，我把椭圓积分（这是在实际上常遇到的）簡要介紹到书内，并且有些时候提出了

一些恰好要引用橢圓积分的問題。使得那种由于解答一些簡單問題养成起来的有害錯覚——仿佛認为分析計算的一些結果一定是"初等式子"，从此消灭！

8. 在本书中各个地方，讀者可找到带有数学史性質的說明。并且第一卷是以"数学分析基本观念发展史概述"結尾的，而在第二卷末載出了"数学分析进一步发展的概述"。当然，这一切决不是用来代替学生以后在一般的"数学史"教程中所要熟悉的数学分析的历史。如果在上面提到的前一概述中涉及到概念本身的来源，那末带有历史意义的說明就在于使讀者至少了解分析学历史中最重要的事件在年代上一般的次序。

我現在要把和剛才所說的密切有关的事直接告訴讀者——学生。那就是，书中敘述的次序是按照現代对于数学的严格性的要求安排的，这种要求是在长时間内形成起来的，因此，敘述的次序自然和数学分析在历史上的发展所經过的道路有所不同。如馬克思所說："……正如一切科学的历史进程一样，在摸到它們的真正出发点之前，总先走过許多弯路。科学不同于其他建筑师，它不只画出空中樓閣，而且在它打下地基之前，先造出房屋的各层。"①

讀者一开始研究分析学时就会遇到与此类似的情况：本书第一章講述"实数"，第三章講述"极限論"，从第五章起才开始微分学与积分学的系統的敘述。

在历史上的次序恰恰是与此相反的：微分学与积分学起源于十七世紀，而在十八世紀发現了很多重要的应用，有了进一步的发展；在十九世紀初，极限論才成为数学分析的基础，至于用来論証最精密的极限論原理的实数理論，它的明晰概念一直到十九世紀后半期才建立起来。

① 馬克思"政治經济学批判"中譯本，1955年人民出版社出版，第30頁。

这部书总結了我在列宁格勒大学教数学分析的多年經驗。希望它对苏联青年将会是有用的.

格・馬・費赫金哥尔茨

第一卷第一分册目录

第一卷第二分册目录

第十三章 微分学的一些几何应用……421

第十四章 数学分析基本观念发生簡史……443

第一章 实数

§1. 实数集合及其有序化

1. 前言 从中学教程中讀者已熟悉有理数及其性質。同时由于初等数学的需要，有理数域的扩張也就成为必要了。事实上，在有理数中甚至連正整数（自然数）往往都沒有根，如$\sqrt{2}$就是一个例子，这就是說，沒有一个其平方能等于2的有理分数$\frac{p}{q}$（p与q是两个自然数）存在。

要証明这一点，我們用反証法：假定有这样的分数$\frac{p}{q}$存在，使得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$。我們可設这个分数是既約的，也就是說，$p$与$q$无公因子。因为$p^2=2q^2$，所以$p$是偶数：$p=2r$（$r$是整数），因而，$q$是奇数。用$p$的表达式来代替$p$，得$q^2=2r^2$，由此推得$q$是偶数。所得到的这个矛盾就証明了我們的論断。

与此同时，假若我們所討論的只是含有理数的数域，那末在几何中显然就不是所有的綫段都能有长度。事实上，考慮边为单位长度的正方形。它的对角綫不能有有理长度$\frac{p}{q}$，因为如若不然，則由毕达哥拉斯定理，这个长度的平方就应等于2，但我們已知这是不可能的。

在本章中我們的任务是要扩張有理数的数域，把具有新的性質的数——无理数加入到这領域中来。

在数学实踐中含有根式表达式的无理数，事实上早在中世紀已开始出現，不过沒有把它看作是实在的数。十七世紀由笛卡儿[①]所創立的坐标方

① 笛卡儿(1596—1650)是法国的著名哲学家与科学家。

法，又以新的方法提出了用数来表达几何量的問題。在这种影响下无理数与有理数同样是数的观念逐漸地成熟起来；这种观念在牛頓的“普遍算术”(1707)①中所下的(正)数的定义里面有了透辟的叙述：

“我們所理解的数，与其說它是单位的集合，不如說它是任何一个量与另一个由我們取来作单位的同类量的抽象比”。

这时整数与分数表达和单位可通約的量，而无理数表达着和单位不可通約的量。

在十七世紀萌芽而在整个十八世紀蓬勃发展着的数学分析，長时期內滿足于这个定义，但是它是与算术格格不入的，并且仍然不能揭露出扩大了的数域的最重要的性質——連續性(参考后面第5段)。在十八世紀末与十九世紀初数学方面兴起了批判的潮流，提出了数学分析的基本概念要有正确的定义以及它的基本命題要有严格的証明。这种要求也就很快地使得根据无理数的純粹的算术定义来建立在邏輯上沒有錯誤的无理数論变成了必要的事情。在十九世紀的七十年代里，有关这方面的理論已經建立了几种，它們在形式上各不相同而实質上是一样的。所有这些理論与有理数的各种无穷集合联系起来，定义了无理数。

2. 无理数定义 我們仿效狄台金②来叙述无理数理論。这种理論的基础归于有理数域內的分割的概念。考慮把全部有理数的集合分成的两个非空的(即确实至少包含一个数的)集合 A, A'；换句話說，我們假定

1° 每一个有理数在而且只在 A 与 A' 两个集合的一个中。

如果下面的条件也能滿足，我們就称这种分法为分割：

2° 集合 A 中每一数 a 小于集合 A' 中每一个数 a'。

集合 A 叫做分割的下类，集合 A' 叫做上类。分割用 $A|A'$ 表示。

由分割的定义推知，凡小于下类中的数 a 的有理数，也属于下

---

① 有俄文譯本：“Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе”(АН СССР, 1948)；参考第8頁。

② 狄台金(Richard Dedekind)(1831—1916)是德国的数学家。

类。同样，凡大于上类中的数 a' 的有理数也属于上类。

例題 1）把 A 定义为所有一切满足不等式 $a<1$ 的有理数 a 的集合，而把使 $a'\geqslant 1$ 的全部有理数 a' 归入集合 A'。

不难檢驗，这样一来我們就确实得到一个分割。数 1 属于 A' 类并且显然是其中最小的数。另一方面，在 A 类中沒有最大的数；因为，不論我們取 A 中怎样的数 a，我們总可以在 a 与 1 之間指出一个有理数 a_1，因而，a_1 大于 a 而且也属于 A 类。

2）把所有小于或等于 1 的有理数 $a\leqslant 1$ 归入下类 A；所有大于 1 的有理数 $a'>1$ 归入上类 A'。

这也是一个分割，并且这时在上类中沒有最小的数，而在下类中有最大的数(就是 1)。

3）把一切使 $a^2<2$ 者的正有理数 a，零，以及一切負有理数都归入 A 类，而把一切使 $a'^2>2$ 者的正有理数 a' 归入 A' 类。

不难証实，我們又得到一个分割。这时在 A 类中既无最大的数，在 A' 类中也无最小的数。这两个論断中，我們可取第一个为例加以証明（第二个可同样地証明）。設 a 是 A 类中的任一正数(这时 $a^2<2$)。我們要指出，可以选得这样的正数 n，使得

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

这就是說，$a+\frac{1}{n}$ 也要属于 A 类。

这一不等式与下面的不等式是等价的：

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2,$$

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2.$$

如果 n 满足不等式 $\frac{2a+1}{n}<2-a^2$，則最后这个不等式成立；为此，只要取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

由此可見，不論 a 是 A 类中怎样的一个正数，在 A 类中总找得到大于 a 的数；因为对于数 $a \leqslant 0$ 这个論断是很明显的，所以 A 类中任何数不能是其中最大的数。

不难了解，要在下类有最大的数 a_0 而同时在上类又有最小的数 a_0'，这样的分割不能存在。事实上，假定有这样的分割存在。我們就取介乎 a_0 与 a_0' 之間的任一有理数 c, $a_0 < c < a_0'$。数 c 不能属于 A 类，因为要不这样，那 a_0 就会不是这类中的最大数；依同理 c 也不能属于 A' 类。可是这与在分割概念的定义中所包含的分割的性質 1° 相矛盾。

由此可見，分割只能有由刚才的例題 1)、2)、3) 所說明的三个类型：

1) 在下类 A 中沒有最大的数，而在上类 A' 中有最小的数 r；

2) 在下类 A 中有最大的数 r，而在上类 A' 中沒有最小的数；

3) 既在下类中沒有最大的数，又在上类中沒有最小的数。

在前两种情形下我們說，这分割由有理数 r 产生（r 是 A 与 A' 两类中間的界数），或者說，这分割定义了有理数 r。在例題 1) 与 2) 中这样的数 r 是 1。在第三种情形下界数不存在，分割不能定义任何有理数。我們現在引进新的对象——无理数，而規定說：任何属于类型 3) 的分割定义了某一个无理数 α。这个数 α 就代替着缺少了的界数，好象我們把它插在 A 类所有的数 a 与 A' 类所有的数 a' 的中間一样。在例題 3) 中这个新建立的数不难推想它就是 $\sqrt{2}$。

我們不再对于无理数引进統一的記号①，而常把无理数 α 和定义它的有理数域的分割 $A|A'$ 联系起来。

---

① 这里所指的是有限型的記号；在第 4 段中讀者会遇見一种无尽的記号。个别給定的无理数多半是依照它們的起源和作用来記的，如 $\sqrt{2}$, log5, sin10° 等等。

为了一致起見，对于有理数 r 也作同样的处理，这对我們常常是方便的。可是对于每一个有理数 r 存在着两个定义它的分割：在两种情形之下都是数 $a<r$ 归入下类，数 $a'>r$ 归入上类，而数 r 本身則可任意地或者归入下类（这时 r 是其中最大的数），或者归入上类（这时 r 是其中最小的数）。为了确定起見，我們規定：凡說到定义有理数 r 的分割时，总把这个数归入上类。

有理数与无理数統称为实数。实数的概念是数学分析的基本概念之一，一般地說，也是整个数学的一个基本概念。

3. 实数集合的有序化 由两个分割 $A|A'$ 与 $B|B'$ 分别所定义的两无理数 α 与 β，在而且只在这两个分割相同时才算是相等；实际上只要 A 与 B 两个下类相同卽可，因为这时 A' 与 B' 两个上类也相同。这个定义在 α 与 β 是有理数时也一样成立。換句話說，如果两个有理数 α 与 β 相等，則定义它們的两个分割相同，反之，从这两个分割的相同卽可推出数 α 与 β 的相等。在这情况应該考慮到上面对于有理数所加上的条件。

我們現在来建立关于实数的"大于"的概念。对于有理数来說这个概念已从中学課本中知道了。对于有理数 r 与无理数 α 来說，"大于"的概念实际上已在第 2 段中建立了：就是說，如果 α 是由分割 $A|A'$ 定义的，我們就算作 α 大于所有属于 A 类的数，而同时所有 A' 类的数都大于 α。

現在設有两个无理数 α 与 β，并且 α 由分割 $A|A'$ 确定，而 β 由分割 $B|B'$ 确定。我們把具有較大的下类的那个数算作是較大的。确切地說，我們算作 $\alpha>\beta$，只要 A 类完全包含 B 类且不与 B 类相同（这个条件显然和 B' 类完全包含 A' 类且不与 A' 类相同的条件是等价的）。不难驗証，这个定义在 α 与 β 两数中有一个为有理数时甚至两个都是有理数时也一样能成立。

"小于"的概念就可当作派生的概念引出来。就是說，在而且

只在 $\beta>\alpha$ 的情形下我們說 $\alpha<\beta$。

由我們的定义可以推到:

在任何两个实数 α 与 β 之間必有而且只有下列三种关系之一:

$$\alpha=\beta,\quad \alpha>\beta,\quad \alpha<\beta.$$

其次,

从 $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$ 推得 $\alpha>\gamma$。

显然也可

从 $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$ 推得 $\alpha<\gamma$。

最后,我們要建立两个在以后的叙述上常常有用的补助定理。

补助定理1. 不論 α 与 β 是两个怎样的实数, 若 $\alpha>\beta$, 总可找到这样的一个实数——甚至是有理数——r, 使得 r 介在 α 与 β 之間: $\alpha>r>\beta$(因而也有无穷多个这样的有理数)。

因为 $\alpha>\beta$, 所以定义着数 α 的分割的下类 A 完全包含了对于数 β 的下类 B, 并且不与 B 相同。所以在 A 中可找到这样的有理数 r, 它不包含在 B 中, 因而, 它属于 B'; 对于 r 有

$$\alpha>r\geqslant\beta$$

(等号只在 β 是有理数时才能成立)。但因在 A 中沒有最大的数, 所以在必要时加大 r 可以取消等号。

补助定理2. 設 α 与 β 是两个給定的实数。如果不論取怎样的有理数 $e>0$, 总能使数 α 与 β 夹在同样两个有理数的中間:

$$s'\geqslant\alpha\geqslant s,\quad s'\geqslant\beta\geqslant s,$$

其中

$$s'-s<e,$$

則数 α 与 β 必定相等。

我們用归謬法証明。例如, 假定 $\alpha>\beta$。由补助定理 1, 在 α 与 β 之間可以插入两个有理数 r 与 $r'>r$:

$$\alpha>r'>r>\beta.$$

于是对于任何两个数 s 与 s'，只要在它們的中間包含有 α 与 β，則下面的不等式显然成立:

$$s'>r'>r>s \quad \text{或者} \quad s'-s>r'-r>0.$$

由此可見，差数 $s'-s$ 不符合补助定理中的条件，譬如說，不能使得它小于数 $e=r'-r$。这个矛盾就証明了补助定理。

4. 实数的无尽十进小数的表示法 我們考慮实数的这样一种表示法，使分数部分(尾数)是正的，可是整数部分可正可負，也可为零。

我們首先假定，所考慮的实数 α 既不是整数，也不是任何有限十进小数。現在来求它的十进小数近似值。如果它是由分割 $A|A'$ 所定义的数，那末首先就易看出，在 A 类中可找到一整数 M，而在 A' 类中可找到一整数 $N>M$。将 M 逐次加以 1，我們一定可得到这样的两个相邻的整数 C 与 $C+1$，使得

$$C<\alpha<C+1.$$

这里的 C 可以是正的、負的或者是零。

其次，如果把 C 与 $C+1$ 之間的区間用数

$$C.1; C.2; \cdots; C.9$$

分成十个相等的部分，則 α 落在其中一个(且只一个)部分內，于是我們得到两个相差 $\frac{1}{10}$ 的有理数，即 $C.c_1$ 与 $C.c_1+\frac{1}{10}$，使得

$$C.c_1<\alpha<C.c_1+\frac{1}{10}.$$

継續进行这个方法，在确定了 $n-1$ 个数字 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 以后，我們用不等式

$$C.c_1c_2\cdots c_n<\alpha<C.c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n} \tag{1}$$

来确定第 n 个数字 c_n。

于是在求数 α 的十进小数近似值的过程中，我們作出了整数 C 与一无穷序列的数字 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$。由这些数字作成的无尽

十进小数，記作

$$C.c_1c_2\cdots c_n\cdots,\tag{2}$$

它可以看作是实数 α 的一种表示。

例外情形，当 α 本身就是整数，或者一般說来是有限十进小数时，可以用类似的方法依次地来确定数 C 与数字 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$，只不过是从比(1)更一般的关系式

$$C.c_1c_2\cdots c_n\leqslant\alpha\leqslant C.c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n}\tag{1a}$$

出发而已。

事情是这样，在某个时候数α会与包含它的区間的一个端点相重合，至于它与左端或右端重合，那却可以随便；从这时开始，相应地在(1a)中的左边或右边就經常地出現等式。要看这两种可能性中是那一种实現，才决定相继的数字全部是零或全部是9。因此，这时数 α 有两种表示：一种以零来循环，而另一种以 9 来循环，例如，

$$2.718=2.718000\cdots=2.717999\cdots,$$

$$-2.718=\bar{3}.282=\bar{3}.282000\cdots=\bar{3}.281999\cdots.$$

两个盈与亏的十进小数近似值

$$C.c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n}\text{与 } C.c_1c_2\cdots c_n$$

之間的差等于$\frac{1}{10^n}$，这个差数随着 n 的增大可以小于任意的有理数 $e>0$。事实上，因为不超过数$\frac{1}{e}$的自然数只存在着有限多个，所以不等式 $10^n\leqslant\frac{1}{e}$，或者和它等价的不等式$\frac{1}{10^n}\geqslant e$ 只能为有限多个 n 的值所滿足；对于其余一切的 n 的値总是

$$\frac{1}{10^n}<e.$$

由这附注，我們根据补助定理 2 得出結論：凡异于 α 的数 β 不能象 α 一样滿足所有的不等式(1)或(1a)，因而，它的无尽十进小数表示式不同于 α。

由此可見，在特別情形下，不等于任何有限小数的数，它的表

示式既不能有 0 作循环节，也不能有 9 作循环节——因为每一个以 0 或 9 作循环节的小数显然地表示一个有限十进小数。

可以証明，如果任意地取一个无尽小数(2)，則存在有一个实数 α，使得小数 (2) 就是 α 的表示。显然，这只要作出一个数 α 使得所有的不等式 (1a) 都能够滿足。为了这个目的，我們引进簡短的記号

$$C_n = C.c_1c_2\cdots c_n \text{ 与 } C'_n = C.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n},$$

并注意每一个小数 C_n 都小于每一个小数 C'_m (不仅当 $m=n$ 时是这样，而且当 $m \gtrless n$ 时也是这样)。我們現在在有理数域中作一分割：凡大于所有的 C_n 的有理数 a' (例如所有的数 C'_m) 都放在上类 A' 中，其余一切的有理数 (例如数 C_n 自身) 都放在下类 A 中。不难驗証，这确实是一个分割；它定义着所要求的实数 α。

事实上，因为 α 是夹在两类中間的界数，所以也就有

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n.$$

从此讀者可以把这实数本身看作不尽十进小数。在中学課本里大家知道，循环的不尽小数表示有理数；反之，每一个有理数可以分解为循环小数。由此可見，不循环的不尽小数是用我們新介紹来的无理数表示。这种表示法也可以作为无理数理論构造的出发点。

附注　以后我們需要利用有理数值 a 与 a' 来逼近实数 α：

$$a < \alpha < a',$$

它們的差数小于任意小的有理数 $e>0$。就有理数 α 而言，数 a 与 a' 显然是存在的；对于无理数 α，譬如說，我們可以采用 n 足够大时的十进小数近似值 C_n 与 C'_n 作为 a 与 a'。

5. 实数集合的連續性　現在轉过来討論全部实数集合的一个极为重要的性質，这个性質把它和有理数集合从本質上区別开来。在考慮有理数集合中的分割时，我們已看到，有时有这样一种分割

存在，使在这集合中沒有产生这个分割的界数。正是有理数集合在其內留有空隙的这种不完备性，为引进新的数——无理数提供了根据。我們現在开始来討論全部实数集合中的分割。在这种分割下，我們把这个集合分成两个非空的并且具备下列性質的集合 $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$:

1° 每一个实数在而且只在集合 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}'$ 的一个中；

2° 集合 $\mathbf{A}$ 中每一个数 α 小于集合 $\mathbf{A}'$ 中每一个数 α'。

于是发生一个問題：对于这种分割来說，究竟在实数集合中总可找到产生这个分割的界数，或者在这集合中还存在有空隙(这种空隙能作为再引进新数的根据)？

可以証明，事实上这种空隙不再存在。

基本定理(狄台金) 对于实数集合中任何的分割 $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$，存在有产生这个分割的实数 β，这个数 β：1)或者是下类 $\mathbf{A}$ 中的最大数，2) 或者是上类 $\mathbf{A}'$ 中的最小数。

实数集合的这个性質叫做它的完备性，也叫做它的連續性或密接性。

証明 用 A 表示所有属于 $\mathbf{A}$ 的有理数的集合，而用 A' 表示所有属于 $\mathbf{A}'$ 的有理数的集合。不难証实，集合 A 与 A' 作成全部有理数集合的一个分割。

这个分割 $A|A'$ 定义了某一个实数 β。它应該落在 $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ 两类之一；假定說，它落在下类 $\mathbf{A}$ 中，我們要証明这时情形 1)要实現，也就是說，β 是 $\mathbf{A}$ 中最大的数。事实上，假若不然，則可找到这类中另一个大于 β 的数 α_0。于是(根据补助定理1)我們可在 α_0 与 β 之間插入一有理数 r:

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

r 属于 $\mathbf{A}$ 类，因而也属于 A 类，我們就得出了矛盾：在定义数 β 的分割的下类中会有有理数 r 比 β 这个数更大！这样我們的論断就

证明了。

同样可证明，如果 β 落在上类 A' 中，則情形 2)便要实現。

附注　要想在 A 类中有最大的数而同时在 A' 类中有最小的数，这是不可能的；这一論断可以象对于有理数域中的分割情形一样来证明(利用补助定理 1)。

6. 数集合的界　我們現在要利用基本定理 [5] 来建立在近代分析学上起重要作用的一些概念。这些概念在討論实数的算术运算时也是我們所需要的。

我們举出任意的实数无穷集合[①]；它可以用任何方式給定。例如，自然数的集合、一切眞分数的集合、在 0 与 1 之間的一切实数的集合，方程 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的所有根的集合，等等，都是无穷集合。

用 x 表示集合中任一数，于是 x 是集合中的数的标准記号；数 x 的集合本身用 $\mathscr{X}=\{x\}$ 表示。

如果对于所考虑的集合 $\{x\}$ 存在有这样的数 M，使得一切的 $x\leqslant M$，我們便說，这个集合是(由数 M 限制)上有界的；在这情形下数 M 本身是集合 $\{x\}$ 的一个上界。例如，眞分数的集合是以数 1 或任何一个大于 1 的数为上界；自然数列是沒有上界的。

与此类似：如果能找到这样的数 m，使得一切的 $x\geqslant m$，則称集合 $\{x\}$ 是 (由数 m 限制) 下有界的，而数 m 本身叫做集合 $\{x\}$ 的一个下界。例如，自然数列是以数 1 或任何一个比 1 小的数为下界的；眞分数集合是以数 0 或任何一个負数为下界的。

上(下)有界的集合可以同时是下(上)有界的，也可以不是下(上)有界的。例如，眞分数的集合是下有界而又上有界的，可是自然数列只有下有界而不是上有界的。

如果一集合不是上(下)有界的，則取“广义的数”$+\infty(-\infty)$

---

① 下面所說的一切对于有限的集合也保持有效，不过这种情形是不关重要的。

作为它的上界(下界)。記号$+\infty$与$-\infty$讀作"正无穷大"与"負无穷大"。对于这两个"广义的"或"无穷大的"数，我們算作

$$-\infty<+\infty \text{ 与 } -\infty<\alpha<+\infty,$$

不論α是怎样一个("有限的")实数。

如果一个集合是上有界的集合，就是說，有着有限的上界M，則它同时也有着无穷多个上界（因为任何一个大于M的数也都是它的上界)。在所有的上界中特别重要的是最小的一个，我們称它为**上确界**。同样，如果一集合是下有界的，那我們就称所有下界中的最大者为**下确界**。例如，就一切的眞分数的集合言，它的两个确界是0与1。

成問題的是：对于上(下)有界的集合是否总存在有上(下)确界？实际上，因为在这情形下所有的上界(下界)形成一无穷集合，而在数的无穷集合中未必总有最大的或最小的数[①]，所以在所考慮的集合的所有上(下)界中，这种最小的(最大的)数的存在性需要加以証明。

定理 如果集合$\mathscr{X}=\{x\}$是上(下)有界的，則它一定有上(下)**确界**[②]。

証明 我們就上确界来进行論証。考慮下面两种情况：

1° 首先假定在**集合$\mathscr{X}$的数x中可找到最大的数**$\bar{x}$。于是集合中的所有数都要满足不等式$x\leqslant\bar{x}$，就是說，$\bar{x}$是$\mathscr{X}$的上界。另一方面，$\bar{x}$属于$\mathscr{X}$；因此，对于任何的上界M不等式$\bar{x}\leqslant M$成立。由是肯定，$\bar{x}$是集合$\mathscr{X}$的上确界。

2° 現在設在**集合$\mathscr{X}$的数x中沒有最大的数**。我們用下面的

---

① 例如，在所有的眞分数中就沒有最大与最小的数。

② 1817年捷克的哲学家兼数学家伯恩哈德波尔察諾(1781—1848)首先发表了这个定理——不过是用其他的一些术語叙述的。它的严格的証明只有确定了实数概念以后才能够有。

方法作出全部实数区域中的分割。把集合$\mathscr{X}$的一切上界α'归入上类A'，而把其余一切的实数α归入下类A。在这个分法之下集合$\mathscr{X}$所有的数x都落在A类，因为由假設，其中任何一个数都不是最大的。可見A与A'两类都不是空的。这个分法实际上是一个分割，因为全部实数都分布在这两类中，并且A'类中每个数大于A类中任何的数。根据狄台金的定理[5]，一定有一个作成这个分割的实数β存在。属于A类的一切数x不能超过这个"界数"β，就是說，β是对于x的一个上界，因此，β本身属于A'类而且是A'中最小的数。由此可見，作为一切上界中最小者的数β，就是所要求的集合$\mathscr{X}=\{x\}$的上确界。

定理的第二部分(关于下确界的存在性)完全可同样地証明。

若M^*是数集合$\mathscr{X}=\{x\}$的上确界，則对于一切的x有

$$x\leqslant M^*.$$

現在取任一个小于M^*的数α。因为M^*是上界中的最小者，所以数α一定不是集合$\mathscr{X}$的上界，就是說，可在$\mathscr{X}$中找到这样的数x'，使得

$$x'>\alpha.$$

集合$\mathscr{X}$的上确界M^*的特征完全由这两个不等式表达出来。

同样，集合$\mathscr{X}$的下确界m^*的特征可如下描述之：对于一切的x有

$$x\geqslant m^*,$$

并且，不論β是怎样一个大于m^*的数，总可在$\mathscr{X}$中找到这样的数x''，使得

$$x''<\beta.$$

关于数集合$\mathscr{X}$的上确界M^*与下确界m^*的記法，我們采用符号

$$M^*=\sup\mathscr{X}=\sup\{x\},\quad m^*=\inf\mathscr{X}=\inf\{x\}$$

(按拉丁語: supremum＝最高的, infimum＝最低的)。

我們指出以后时常会遇到的一个明显的推理:

若一集合的全部数 x 满足不等式 $x\leqslant M$, 则

$$\sup\{x\}\leqslant M.$$

事实上, 数 M 是集合的所有上界中的一个, 所以一切上界中的最小者不能超过它。

同样, 从不等式 $x\geqslant m$ 推出 $\inf\{x\}\geqslant m$。

最后我們規定, 如果集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 不是上有界的, 则称它的上确界是 $+\infty$: $\sup\{x\}=+\infty$。同样, 如果集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 不是下有界的, 则称它的下确界是 $-\infty$: $\inf\{x\}=-\infty$。

§2. 实数的四则运算

7. 实数的和的定义及其性質 設有两个实数 α 与 β。我們开始考慮满足不等式

$$a<\alpha<a',\quad b<\beta<b' \tag{1}$$

的有理数 a, a' 与 b, b'。

所謂数 α 与 β 之和 $\alpha+\beta$ 是这样的一个实数 γ, 它介于所有形如 $a+b$ 之和与所有形如 $a'+b'$ 之和的中間:

$$a+b<\gamma<a'+b'. \tag{2}$$

首先我們要証明, 对于任何一对实数 α 与 β 存在有这样的数 γ。

考慮所有一切可能的和 $a+b$ 的集合。这个集合是上有界的, 譬如說, 是以任何一个形如 $a'+b'$ 的和为上界的。我們就令[6]

$$\gamma=\sup\{a+b\}.$$

于是 $a+b\leqslant\gamma$, 并且同时 $\gamma\leqslant a'+b'$。

因为不論 a, b, a', b' 是满足(1)中各条件的怎样的有理数, 总能够加大 a, b 两数, 减小 a', b' 两数, 而仍保持这些条件, 所以在剛才所得到的带有等号的不等式中无論在什么情况下可以沒有等号。由此可見, 数 γ 满足和的定义。

可是, 問題发生在和 $\gamma=\alpha+\beta$ 是否由不等式(2)唯一地确定。为了要証

实和的唯一性，我們(按照第4段中的附注)取有理数 a, a', b, b'，使得

$$a'-a<e \text{ 与 } b'-b<e,$$

其中 e 是任意小的一个正有理数。由此得

$$(a'+b')-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)<2e,$$

这就是說，这个差数可以使得它任意地小①。于是由补助定理 2，在和数 $a+b$ 与 $a'+b'$ 的中間存在着唯一的一个数。

最后，我們注意，如果 α 与 β 是两个有理的数，則它們的普通的和 $\gamma=\alpha+\beta$ 显然满足不等式(2)。因此，上面所給的两个实数之和的一般定义与两个有理数之和的旧定义是不矛盾的。

对于实数来說，加法的所有基本性质仍然可以保持：

$$1)\ \alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad 2)\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad 3)\ \alpha+0=\alpha,$$

最后，有

4) 由 $\alpha>\beta$ 推得 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

根据前面所給的和的定义以及有理数的一些熟知的性质，不难証明上面四个性质；我們在这里不去談它。利用最后一个性质，两个不等式的对应项逐项相加可以得到証实。

8. 对称数 · 絕对值 我們現在来証明，对于每一个实数 α 存在有满足条件 $\alpha+(-\alpha)=0$ 的(对称的)数 $-\alpha$。

这时只要考虑无理数 α 的情形。

假定数 α 由分割 $A|A'$ 确定，我們用下面的方法来定义数 $-\alpha$。把一切的有理数 $-a'$(其中 a' 是 A' 类中任意的数)归入数 $-\alpha$ 的下类 $\bar{A}$，而把一切的数 $-a$(其中 a 是 A 类中任意的数)归入这个数的上类 $\bar{A'}$。不难看出，所作的分法是一个分割，并且实际上定义着一个实数(在現在的情形下是无理的)；用 $-\alpha$ 表示这个数。

我們現在要查实它满足上面所說的条件。利用数 $-\alpha$ 本身的定义，我們知道，和 $\alpha+(-\alpha)$ 是夹在形如 $a-a'$ 与 $a'-a$ 的两数中間的实数，其中 a 与 a' 是有理数并且 $a<\alpha<a'$。可是，很明显，

$$a-a'<0<a'-a,$$

这就是說，数 0 是夹在剛才所說的两数中間。根据具有这种性质的数的唯一

① 只要取 $e<\dfrac{e'}{2}$，数 $2e$ 就会小于任意的数 $e'>0$.

性，我們得到

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

这就是所要証明的。

再补充說一句，与已知数对称的数也一样具有这些性质：

$$-(-\alpha)=\alpha,\quad -(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta).$$

利用对称数的概念可以把减法看作加法的逆运算而解决实数中的減法問題。所謂 α 与 β 之差（也用 $\alpha-\beta$ 表示）是滿足条件

$$\gamma+\beta=\alpha(\text{或 } \beta+\gamma=\alpha)$$

的一个数 γ。根据加法的性質，不难証明，这样的数是 $\gamma=\alpha+(-\beta)$；实际上，

$$\gamma+\beta=[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha+[(-\beta)+\beta]=$$
$$=\alpha+[\beta+(-\beta)]=\alpha+0=\alpha.$$

同样可以建立差的唯一性。

从第 7 段中的性質 4) 可以作出关于两不等式

$$\alpha>\beta \text{ 与 } \alpha-\beta>0$$

的等价性的有用的說明，由这一說明即可确立由 $\alpha>\beta$ 引出 $-\alpha<-\beta$ 的事实。

最后，数的絕对值的概念也与对称数的概念有联系。从对称数本身的构造发现了：当 $\alpha>0$ 时必然 $-\alpha<0$，而由 $\alpha<0$ 推得 $-\alpha>0$。换句話說，只要 $\alpha\neq0$，就知 α 与 $-\alpha$ 两数中有一个（而且只有一个）要大于零；它就是我們所說的数 α 与数 $-\alpha$ 的絕对值，用記号

$$|\alpha|=|-\alpha|$$

来表示。数零的絕对值应該等于零：$|0|=0$.

关于絕对值我們也給出在以后有用的两个說明。

首先我們要确定，不等式 $|\alpha|<\beta$（其中自然有 $\beta>0$）与二重不等式 $-\beta<\alpha<\beta$ 是等价的。

事实上，从 $|\alpha|<\beta$ 推得同时有 $\alpha<\beta$ 与 $-\alpha<\beta$，就是 $\alpha>-\beta$. 反之，如果已知 $\alpha<\beta$ 与 $\alpha>-\beta$，那就同时有 $\alpha<\beta$ 与 $-\alpha<\beta$；可是数 α 与 $-\alpha$ 中的一个是 $|\alpha|$，可見一定是 $|\alpha|<\beta$.

同样，不等式

$$|\alpha|\leqslant\beta \text{ 与 } -\beta\leqslant\alpha\leqslant\beta$$

也是等价的。

其次，我們来証明有用的不等式

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

把显明的不等式

$$-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha| \text{与} -|\beta|\leqslant\beta\leqslant|\beta|$$

逐項加起来，我們得到

$$-(|\alpha|+|\beta|)\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+|\beta|,$$

于是根据上面所作的說明就推出所要求的不等式。

利用数学归納法可把已証明的不等式推广到含有任意多个項的情形。此外，不难得到

$$|\alpha+\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|,$$

以及

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

因为同时又有

$$|\beta|-|\alpha|\leqslant|\alpha-\beta|,$$

所以显然有

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|\leqslant|\alpha-\beta|.$$

所有这些不等式以后都是常常有用的。

9. 实数的积的定义及其性質 我們首先就正的数来談实数的乘法。設已給两个这样的数 α 与 β。这时我們也来考虑滿足不等式(1)的所有一切可能的有理数，但是我們假定这些数都是正的。

所謂两个正的实数 α 与 β 的积 $\alpha\beta$，是这样的一个实数 γ，它介于一切形如 ab 的积与一切形如 $a'b'$ 的积之間：

$$ab<\gamma<a'b'. \qquad (3)$$

要証明这样的数 γ 的存在性，我們取所有一切可能的积 ab 的集合；它是以任何形如 $a'b'$ 的积为上界的。如果令

$$\gamma=\sup\{ab\},$$

則自然有 $ab\leqslant\gamma$，而且同时有 $\gamma\leqslant a'b'$。

象在和的情形一样，可以加大数 a, b 而减小数 a', b' 借以去掉这里的等号，所以数 γ 滿足积的定义。

积的唯一性可根据下面的理由推出来。取有理数 a, a' 与 b, b'，使得(参考第4段中的附注)

$$a'-a<e \text{ 与 } b'-b<e,$$

其中 e 是任意小的正有理数。这时可以算作数 a 与 b 是正的，而数 a' 与 b' 分别不超过预先规定的某两个数 a'_0 与 b'_0。于是差数

$$a'b'-ab=a'(b'-b)+b(a'-a)<(a'_0+b'_0)e,$$

就是說，可以使得这个差数任意地小①，而由补助定理2，这就足以肯定只有一个数 γ 能够滿足不等式(3)。

如果 α 与 β 二正数都是有理的，则它們的普通的积 $\alpha\beta$ 显然滿足不等式(3)，就是說，与按两实数之积的一般定义得到的結果是一样的——并无矛盾。

最后，为了要定义任意一对实数（不一定是正的）的积，我們作出下面的規定。

首先我們規定

$$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0,$$

不論 α 是怎样的实数。

如果两个乘数都不为零，我們就根据通常的"符号規則"令：

$$\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|, \text{ 当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 同号},$$

$$\alpha\cdot\beta=-(|\alpha|\cdot|\beta|), \text{ 当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 异号}$$

（这就是我們已經知道的正数 $|\alpha|$ 与 $|\beta|$ 的积）。

象在有理数的情形一样，对于任何实数保持有下面的性質：

$$1)\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha,\quad 2)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma),\quad 3)\ \alpha\cdot 1=\alpha,$$

$$4)\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma,$$

而且

5) 从 $\alpha>\beta$ 与 $\gamma>0$ 推得 $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.

利用最后这个性質，具有正項的两个不等式逐項相乘得到証实。

如果定义 α 与 β 二数之商 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是这样的数 γ，或它滿足条件

$$\gamma\cdot\beta=\alpha\ (\text{或 } \beta\cdot\gamma=\alpha),$$

则可以建立商的存在性与唯一性，只要除数 β 不为零。

在結束实数的四則运算时，我們再一次着重指出，作为初等代数的基础的有理数的所有基本性質，对于实数也能成立。因此，有关四則运算以及等

① 我們看出，只要取 $e<\frac{e'}{a_0'+b_0'}$，数 $(a_0'+b_0')e$ 就会小于任何的数 $e'>0$.

式和不等式的結合，所有这些代数法則对于实数都保持有效。

§3. 实数的其他性质及其应用

10. 根的存在性 · 具有有理指数的乘冪 象平常一样，由实数的乘法(与除法)的定义可直接引出具有正(与負)整指数的乘冪的定义。要一般地来談具有有理指数的乘冪，我們先講述一下根的存在問題。

我們还記得，在有理数域中最簡单的根数都会不存在，这一事实提供了扩充有理数域的一个根据；我們来檢查一下，扩充了的数域(这时不作进一步的扩充)在何种程度上弥补了旧有的缺陷。

設 α 是任一实数，n 是自然数。

大家知道，所謂数 α 的 n 次方根是使

$$\xi^n=\alpha$$

的这样一个实数 ξ。

我們限定 α 是正数的情形来求满足这关系式的正数 ξ，也就是，求所謂的根的算术値。我們来証明这样的数 ξ 总存在并且只有一个。

关于数 ξ 的唯一性的断語立即可从以下事实推得，那就是，不同的正数有其不同的乘冪：如果 $0<\xi<\xi'$，則 $\xi^n<\xi'^n$。

如果存在有这样的正有理数 γ，它的 n 次乘冪等于 α，則它就是所要求的数 ξ。所以今后只限于这种有理数不存在的情形。

我們現在用下面的方法作出全部有理数域的分割 $X|X'$。把全部負有理数、零以及使得 $x^n<\alpha$ 的全部正有理数 x 归 X 类，而把使得 $x'^n>\alpha$ 的全部正有理数 x' 归入 X' 类。

不难看出，这两类都不是空的并且 X 里有正数。如果取数(比方說是自然数) m 使得 $\frac{1}{m}<\alpha<m$，則更加有 $\frac{1}{m^n}<\alpha<m^n$，于是数 $\frac{1}{m}$ 属于 X，而数 m 属于 X'。

对于分割的其他要求可以直接檢驗。

現在設 ξ 是由分割 $X|X'$ 所确定的数，我們要証明，$\xi^n=\alpha$，也就是 $\xi=$ $=\sqrt[n]{\alpha}$。

把 ξ^n 看作是等于 ξ 的 n 个因子的乘积，根据正实数之积的定义我們肯定，如果 x 与 x' 是使

$$0<x<\xi<x'$$

的有理数，则

$$x^n < \xi^n < x'^n.$$

因为，很显然，x 屬于X类，而 x' 屬于 X' 类，所以由这两类的定义，同时又有

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

可是差数 $x'-x$ 可以使之小于任意的数 $e>0$（参考第4段中的附注），并且不妨把 x' 算作小于某一預先固定的数 x'_0。在这情况下差数

$$x'^n - x^n = (x'-x)(x'^{n-1} + x\cdot x'^{n-2} + \cdots + x^{n-1}) < e\cdot n x_0'^{n-1},$$

也就是說，可以使得它任意地小①。于是由补助定理2，推得数 ξ^n 与 α 的等式。

根的存在性旣經证明后，用通常的方法可以建立具有任何有理指数 r 的乘冪的概念，并且可以檢驗在初等代数課本中所介紹的普通法則对于这种乘冪也是正确的：

$$\alpha^r\cdot\alpha^{r'} = \alpha^{r+r'},\quad \alpha^r:\alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r\cdot r'},\quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r\cdot\beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^r}{\beta^r}, \text{等等。}$$

我們着重指出，当 $\alpha>1$ 时乘冪 α^r 随着有理指数 r 的增大而增大。

11. 具有任何实指数的乘冪　我們来定义具有任何实指数 β 的任何（正的）实数 α 的乘冪。

在討論中我們要引进数 α 的乘冪

$$\alpha^b \text{ 与 } \alpha^{b'},$$

其中指数 b 与 b' 是滿足不等式

$$b < \beta < b'$$

的有理数。

所謂具有指数 β 的数 $\alpha>1$ ② 的乘冪（用記号 α^β 表示），是这样的一个实数 γ，它介于 α^b 与 $\alpha^{b'}$ 两个乘冪之間：

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \tag{1}$$

不难证实，这样的数总存在。实际上，乘冪的集合 $\{\alpha^b\}$ 是上有界的，譬如

① 我們看出，只要取 $e<\dfrac{e'}{nx_0'^{n-1}}$，数 $e\cdot nx_0'^{n-1}$ 就要小于任意的数 $e'>0$.

② 可以只討論这种情形，因为当 $\alpha<1$ 时，我們可令 $\alpha^\beta = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$.

說，是以任何的乘冪 $\alpha^{b'}$ 为上界的。于是我們取[6]

$$\gamma = \sup_{b<\beta} \{\alpha^b\}.$$

对于这个数我們有

$$\alpha^b \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{b'}.$$

事实上，在这裏等号是不需要的，因为把 b 加大而把 b' 减小是可以的；于是所作出的数 γ 滿足条件(1)。

現在轉回来証明由这些条件所确定的数的唯一性。

为此，首先我們要注意到，如果不要求数 s，s'，与 e 一定为有理数，則第 3 段中的补助定理 2 仍保持有效；証明也一样。

其次我們要建立一个很簡单的但常有用的不等式：若 n 是大于 1 的自然数并且 $\gamma>1$，則

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma-1). \tag{2}$$

实际上，令 $\gamma = 1+\lambda$，其中 $\lambda>0$，則由牛頓的二項式公式我們有

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots;$$

因为其中未写出来的項都是正的，所以

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

这与不等式(2)是等价的。

在这不等式中令 $\gamma = \alpha^{\frac{1}{n}}$ $(\alpha>1)$，我們得到不等式

$$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\alpha-1}{n}, \tag{3}$$

它是我們現在要利用的不等式。

我們知道(第 4 段中附注)，可以选取数 b 与 b'，使得差数 $b'-b$ 对于任一預定的自然数 n 都会小于 $\frac{1}{n}$，并且 b' 小于一固定的数 b'_0；于是由不等式(3)，得

$$\alpha^{b'} - \alpha^b = \alpha^b(\alpha^{b'-b}-1) < \alpha^b\,(\alpha^{\frac{1}{n}}-1) < \alpha^b \cdot \frac{\alpha-1}{n};$$

結果有

$$\alpha^{b'} - \alpha^b < \alpha^{b'_0} \cdot \frac{\alpha-1}{n}.$$

最后这个表达式由于依賴于 n 而可使得它小于任意的正数 ε：这只要取

$$n > \frac{\alpha^{b'_0}(\alpha-1)}{\varepsilon}.$$

在这种情况下，按照上面推广了的补助定理 2，在界数 α^b 与 $\alpha^{b'}$ 之間不能包

含两个不同的数 γ。

如果 β 是有理的，則上面所給的定义回到我們的通常記号 α^β 的意义。

不难檢驗，对于具有任意的实指数的乘冪，所有关于乘冪的普通法則都成立，而且当 $\alpha>1$ 时乘冪 α^β 随着实指数 β 的增大而增大。

12. 对数 利用具有任意实指数的乘冪的定义，現在不难确定以正实数 α 异于 1（譬如說，我們算作 $\alpha>1$）为底的任何正实数 γ 对数的存在。

如果存在这样的有理数 r，使得

$$\alpha^r=\gamma,$$

則 r 就是所求的对数。我們假定这种有理数 r 不存在。

于是在全部有理数的区域中按下面的方法作出分割 $B|B'$。把所有使 $\alpha^b<\gamma$ 的有理数 b 归入 B 类，而把所有使 $\alpha^{b'}>\gamma$ 的有理数 b' 归入 B'。

我們来証明，B 与 B' 两类不是空的。由不等式(2)得

$$\alpha^n>1+n(\alpha-1)>n(\alpha-1),$$

并且只要取

$$n>\frac{\gamma}{\alpha-1},$$

就有 $\alpha^n>\gamma$；这样的自然数 n 属于 B' 类。同时我們有：

$$\alpha^{-n}=\frac{1}{\alpha^n}<\frac{1}{n(\alpha-1)},$$

并且只要取

$$n>\frac{1}{\gamma(\alpha-1)},$$

就有 $\alpha^{-n}<\gamma$，而数 $-n$ 落在 B 类中。

对于分割所提出的其他要求，在这里也都滿足。

所作的分割 $B|B'$ 确定了实数 β，它是夹在这两类数中間的"界数"。按乘冪的定义我們有

$$\alpha^b<\alpha^\beta<\alpha^{b'}\quad(b<\beta<b'),$$

并且 α^β 是滿足所有类似不等式的唯一的数。可是对于数 γ（按照分割本身的构造）我們有

$$\alpha^b<\gamma<\alpha^{b'}.$$

因此，

$$\alpha^\beta=\gamma \text{ 而 } \beta=\log_\alpha\gamma;$$

对数的存在已証明。

18. 綫段的測量 只有有理数的集合不能給予一切綫段以长度，这也是引进无理数的最重要的原因。我們現在来証明，有了扩充了的数的概念就足以解決綫段的測量問題。

首先我們来叙述問題本身。

我們要求与每一条直綫段 A 相联系，有一个叫做"綫段 A 的长度"的正实数 $l(A)$，使得

1)一个預先选定的綫段 E("长度的标准")有单位长度：$l(E)=1$；

2)相等的綫段有同样的长度；

3)在加法下，两綫段之和的长度总是等于两綫段的长度之和：

$$l(A+B)=l(A)+l(B)$$

("可加性")。

在所提的几个条件下問題的解答是唯一的。

由 2)与 3)推知，标准长度的 q 分之一应有长度$\frac{1}{q}$；如果把这个部分重复加到 p 次，則所得的綫段由 3)应有长度$\frac{p}{q}$。由此可見，如果綫段 A 与标准长度是可通約的，并且用綫段 A 与 E 的公共测度分別在它們上面可量 p 与 q 次，則一定

$$l(A)=\frac{p}{q}.$$

不难看出，这个数不依賴于所取的公共測度，并且，如果对于与标准长度可通約的綫段按这个法則各給以有理的长度，則(对于这些綫段)測量的問題就完全解决。

如果綫段 A 大于綫段 B，因而 $A=B+C$，此处 C 也是一个綫段，則由 3)应該有：

$$l(A)=l(B)+l(C),$$

并且，因为 $l(C)>0$，所以 $l(A)>l(B)$。于是不同的綫段应有不同的长度，也就是較大的綫段有較大的长度。

因为每一个正有理数$\frac{p}{q}$是一个与标准长度 E 可通約的綫段的长度，所以根据所述，可知任何一个与标准长度不可通約的綫段不能有有理的长度。

再設 Σ 是这样一个与 E 不可通約的綫段。試求綫段 S 与 S' 的一个无穷集合，其中 S,S' 都与 E 是可通約的，并且分別地小于或大于 Σ。如果令

$$l(S)=s,\quad l(S')=s',$$

則所求的长度 $l(\Sigma)$ 应滿足不等式

$$s < l(\Sigma) < s'$$①.

如果分全部有理数为 S 与 S' 两类，把数 s(除此以外，还有一切負数与零)归入下类 S，而把数 s' 归入上类 S'，則得到有理数集合的一个分割。因为在下类中显然沒有最大的数，而在上类中沒有最小的数，所以由这个分割确定的无理数 σ 是滿足不等式 $s<\sigma<s'$ 的唯一的实数。就是説，必須令长度 $l(\Sigma)$ 等于这个数。

我們現在假定，按照所說的法则对所有与 E 可通約的以及与 E 不可通約的全部綫段都給予了长度。条件 1)、2) 显然是成立的。

考虑具有长度

$$\rho=l(\mathrm{P}),\quad \sigma=l(\Sigma)$$

的两个綫段 P，Σ 以及它們的和 $\mathrm{T}=\mathrm{P}+\Sigma$，T 的长度記为 $\tau=l(\mathrm{T})$。取任意的正有理数 r, r', s, s'，使得

$$r<\rho<r',\quad s<\sigma<s',$$

我們作出綫段 R, R', S, S'，使得这些数正好分別地是它們的长度。綫段 $R+S$(长度是 $r+s$)小于 T，而綫段 $R'+S'$(长度是 $r'+s'$)大于 T。所以

$$r+s<\tau<r'+s'.$$

可是[7] 和 $\rho+\sigma$ 是包含在数 $r+s$② 与数 $r'+s'$ 中間的唯一的实数，因此有 $\tau=\rho+\sigma$。这就是所要证明的。

用数学归納法可把"可加性"扩充到任何有限多个項的情形。

如果在軸(有向直綫)上(图 1)选取原点 O 与长度标准 E，則这直綫上每一点 X 对应于某一实数——它的横标 x，这一个数 x 等于綫段 OX 的长度，或者这个长度的負数，依点 X 落在从 O 出发的正向或負向而定。

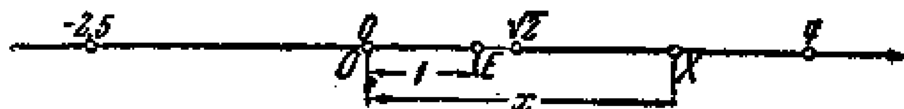


图 1.

我們自然要問反命題是否也正确。是否每一个实数也对应于直綫上某一个点？这个問題在几何上的回答是肯定的，那就是利用对直綫所建立的直綫的連續性公理，即把直綫看作是点集合时类似于实数集合的連續性的那样

① 自然，对于与 E 可通約的綫段 Σ 的长度，这些不等式也成立。

② 由正数 r 与 s 所定的界限自然是不关重要的。

一种性质[第5段]。

由此可見，在全部实数与有向直綫(軸)的全部点之間可以建立双方單值的对应。实数可以表示成軸上的点，因此我們称这軸为实数軸。我們今后經常要应用与此类似的表示法。

第二章 单变量的函数

§1. 函数概念

14. 变量 在研究自然現象时以及在实踐活动中，人們会遇到許多不同的物理量；如时間、長度、体积、速度、質量、力，等等都是。其中每个量，按照考察它的問題里面的条件，或者取不同的一些值，或者只取一个值。在第一种情形下我們遇到变量，而在第二种情形下則遇到常量。

如果选取一定的測量单位(例如，象我們在第13段中談到長度时一样去做)，則量的每个值可用数来表达。数学通常抽去所考察的量的物理意义而只注意它們的数值。这就是恩格斯所說的合理的抽象化的过程[1]。恩格斯認为"純数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的"，幷又接着說：

"可是为要能够在其純粹状态中去研究这些形式和关系，那么就必須完全使它們脫离其內容，把內容放置一边作为不相干的东西；这样我們就得到沒有面积的点，沒有厚度和寬度的綫，a 和 b，x 和 y，常数和变数；…"[2]

变量之引入数学——这件事通常是与笛卡儿的名字相联系着的——乃是一件重要的大事。这样数学就不仅提供了可能来建立一些常量間的数量关系，而且也提供了可能来研究变量所参与的在自然界中进行着的过程。恩格斯[3]用下面的話着重指出了这一

---

① 恩格斯，"反杜林論"，中文譯本 1956 年人民出版社出版，第 37—38 頁。

② 恩格斯，"反杜林論"中譯本，1956 年人民出版社出版，第 37—38 頁。

③ 恩格斯，"自然辯証法"中譯本，1955 年，人民出版社出版，第 217 頁。

点:

“笛卡儿的变量是数学中的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学，因此微分与积分也就立刻成为必要的了…”。

15. 变量的变域 在数学分析中——只要不是談它的应用——所謂变量自然是指抽象的，或者是数的变量。它們可用任何一种用来記載数值的記号(例如字母 x)来表示。如果变量 x 可取得的一些值的集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 已經指出，我們就認为变量 x 是已知的。这一个集合又叫做变量 x 的变域。一般說来，任何的数集合可以当作变量的变域。

常量可以看作变量的特殊情形：它与集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 是由一个元素組成的假定相符合。

在第 13 段中我們已知道，数在几何上可以解释为数軸上的点。变量 x 的变域 $\mathscr{X}$ 就可用这軸上的点集合来表示。因此，变量的数值常称为点。

常会遇到取所有自然数值

$$1, 2, 3, \cdots, 100, 101, \cdots$$

的变量 n；这变量的变域就是全体自然数集合 $\{n\}$，我們总用 $\mathscr{N}$ 来表示它。

可是在分析中通常研究的是所謂連續地或密接地变化着的变量：如动点所經过的时間，路程，等等的物理量，就是这种变量的原形。数的区間就是这一类的变量的变域。最常用的区間是以两个实数 a 与 b $(a<b)$——它的两个端点——为界限的有限区間，两端点本身可以包含在区間内，也可以不包含在內。因此，我們可把区間分为：

閉区間 $[a, b]$: $a\leqslant x\leqslant b$ (两端点包括在內)；

半开区间 $\begin{cases}(a, b]: a<x\leqslant b\\ [a, b): a\leqslant x<b\end{cases}$ (仅一端点包括在內)；

开区間(a, b): $a<x<b$(任一端点都不包括在内)。

在各种情形下都称数 $b-a$ 为区間的长度。

不难了解, 数軸上的綫段是数的区間的几何表示, 并且——按照区間的类型——綫段的端点可归入綫段, 也可不归入綫段。

有时也要考慮无穷区间, 用"广义的"数 $-\infty$, $+\infty$作为它的一端或两端。它們的記号和上面所引进的相类似。例如, $(-\infty, -\infty)$是全体实数集合; $(a, +\infty)$表示満足不等式 $x>a$ 的所有数 x 作成的集合; 区間$(-\infty, b]$由不等式 $x\leqslant b$ 来定义。无穷区間在几何上可用两端无限伸延的直綫或一半射綫来表示。

16. 变量間的函数关系 · 例题 在数学分析中研究的对象不是一个变量独自的变化, 而是在两个或多个变量的共同变化下来研究它們之間的相依关系。我們現在只限于討論两个变量的最簡单的情形。

在科学及生活的各种領域內——在数学上、物理上、工程上——讀者已屢見这种共同变化的一些变量。它們不能同时(在各自的变域中)各取任意的值: 如果已給定其中一变量(自变量)的一个具体的值, 則另一变量(因变量或函数)的值也就跟着确定。我們来介紹几个例子。

1) 圓的面积 Q 是它的半徑 R 的函数; 它的数值可以从給定的半徑数值用已知的公式

$$Q=\pi R^2$$

計算出来。

2) 在受重力作用的質点自由下落的情形下——不計其阻力——从运动开始計算起的时間 t (秒)与在这时間內所經过的路程 s (米)是由方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

来联系的, 其中 $g=9{,}81$米/秒^2 是重力加速度。于是与所取的时間

t 相对应的数值 s 也就被确定：路程 s 是所經过的时間 t 的函数。

3) 考察某种在汽缸的活塞下面的（理想）气体。在温度保持不变的假設下，这气体的体积 V（立升）与压力 p（大气压力）就服从波义耳-馬瑞特定理：

$$pV=c=\text{常数}.$$

如果任意地改变 V，則 p 作为 V 的函数就由公式

$$p=\frac{c}{V}$$

唯一地确定。

还要指出，在所考察的两个量中选取自变量有时是随意的，有时要看是否簡单便利而作选擇。在大多数情形下自变量的选擇是由进行研究的目的来决定的。例如，在上述例題中我們也可以考虑体积 V 依賴于在活塞上的（由气体傳递的）外压力 p，而这压力是变化着的；于是它自然可以写成下面形狀：

$$V=\frac{c}{p},$$

p 算作是自变量，而 V 是 p 的函数。

在别的一些情形下，函数相依关系表征出实际按时間进行着的过程，——特别是，象在例 2）中一样，时間本身就是自变量。可是，如果以为变量的变化总是与經过的时間相联系的，那就是錯誤的。在例 1）中研究圓的面积与其半徑的相依关系时，我們并没有涉及任何的时間过程。

17. 函数概念的定义 象平常一样，我們现在抽去所考察的量的物理意义，来給出函数概念（它是数学分析中的基本概念之一）的准确而普遍的定义。

設給定具有变域 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 的两个变量 x 与 y。假定按照問題的条件变量 x 可以不受任何限制地取得变域 $\mathscr{X}$ 中任意的值。如果依照某一法則或規律，对于 $\mathscr{X}$ 中每个值 x 相应地有（$\mathscr{Y}$ 中）一个确定的 y 值，則变量 y 就叫做变量 x（在其变域 $\mathscr{X}$ 中）的函数。

自变量 x 又叫做函数的变元。

在这定义中存在有两个要素：第一，指出变元 x 的变域 $\mathscr{X}$（它又叫做函数的定义域）；第二，确定 x 与 y 的数值之間的对应法則或規律（函数 y 的变域 $\mathscr{Y}$ 通常是不指出的，因为对应的規律本身就已确定函数值的集合）。

在定义函数概念时可以从更普遍的观点出发，就是假定对应于 $\mathscr{X}$ 中的 x 的每个值，y 的值不止一个，而是几个（甚至是无穷多个）。在这样的情形下我們称函数是多值的，以区别于上面所定义的单值函数。可是，在分析教程中，我們是从实变量的观点出发，而避免討論多值函数；以后說到函数时，如无特别的声明，我們都理解为单值函数。

为了表明 y 是 x 的函数这一事实，我們写成：

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x),\quad y=F(x),\text{ 等等}^{①}.$$

字母 $f, \varphi, F, \cdots$ 就是表示这样的一种法則，按此法則可由給定的 x 值得到对应的 y 值。因此，如果同时考察含同一个变元 x 但由不同的对应規律来联系的几个不同的函数，那就不能用同一个字母表示出它們。

虽然字母"f"（在各种文字中）恰恰是与"*function*（函数）"这个字相联系的，可是作为函数相依关系的記号，自然也可用任何别的字母；有时甚至就重复用同一个字母 y：記 $y=y(x)$。在某些情形中我們也把函数的变元写成函数的附标形状，例如 y_x。

如果在考察函数譬如說 $y=f(x)$ 时，我們希望注明与所选取的 x 的特定值 x_0 相对应的 y 的特定值，那就用記号 $f(x_0)$ 来表示它。例如，若

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad g(t)=\frac{10}{t},\quad h(u)=\sqrt{1-u^2},$$

---

① 这种写法讀作："y 等于 fx"，"y 等于 φx"，等等。

則 $f(1)$ 就是函数 $f(x)$ 当 $x=1$ 时的数值，簡化后也就是数 $\frac{1}{2}$；同样，$g(5)$就是数 2，$h\left(\frac{3}{5}\right)$就是数$\frac{4}{5}$，等等。

現在回轉来討論在变量的数值之間的对应法則或規律，它就是函数相依关系这个概念的实質。这种法則，因为对它沒有什么限制，那就可以有着各种不同的特質。

利用公式来表現这种法則是最簡单而且很自然的，公式是以解析表达式的形式来表示函数的；为要得到 y 的对应值，在表达式里指出了施行于一些常数以及 x 的数值所必須进行的那些解析运算。这种表示函数的解析方法在数学分析上是最重要的（在下一段中我們还要討論它）。讀者最好在中学的数学教程中去熟悉它；在介紹第 16 段中的几个例題时我們正应用了分析方法。

可是，假若認为这是表示函数的唯一方法，那就錯了。在数学中也常有不用公式来定义函数的情形。例如，有这样的函数 $E(x)$，它表示"数 x 的整数部分"，① 不难了解

$$E(1)=1,\ E(2.5)=2,\ E(\sqrt{13})=3,\ E(-\pi)=-4,\ 等等,$$

然而我們并沒有表达 $E(x)$的任何公式。

在自然科学与工程学中，变量之間的相依关系往往是由实驗或用观察方法建立起来的。例如，如果使水受任意选定的压力 p（大气压力），則由实驗可以确定与它对应的沸点的温度 θ°C：θ 是 p 的函数。可是这个函数相依关系不能用任何公式来表示，而只能列出由实驗所得的数值表来表示。用列表法表示函数的例子，在任何工程手册上都容易找到。它的不方便的地方，就是它只能給出对于变元的某些数值的函数值。

---

① 或者更确切地說，它是不超过 x 的最大整数（E是法文字 entier 的头一个字母，entier 表示"整的"意思。

最后，我們还要提到，在某些情形下——利用自动記录器——物理量之間的函数相依关系是直接用图形表示的。例如，用指示器摄成的“指示图表”給出在工作着的蒸汽机的汽缸內汽压 p 与体积 V 之間的相依关系；由气压指示器所得到的“气压图”表示出大气压力一昼夜的变化过程，等等。自然，这种表示方法只能近似地确定函数的值。

关于确定函数相依关系的列表法或图示法，我們不去詳細談它，因为在数学分析中并不需要利用它們。

18. 函数的解析表示法 由于在数学分析中，函数用*解析表达式*或*公式*的表示法起着极重要的作用，因此我們要作出一系列的附注来說明它們。

1° 首先，在这些公式中能够有怎样的*解析运算*？在这里首先自然是有在初等代数及三角学中所研究过的一切运算：四則运算、乘幂（与开方）、取对数、由角度求其三角函数值以及其反运算（参閱后面 §2）. 可是，必須着重指出，随着我們的分析知識的发展，还需要加入其他的运算，而首要的是第三章中要講的极限步驟。

因此，术語“解析表达式”或“公式”的完全內容只能逐漸地去揭露。

2° 次一附注是在說明用解析表达式或公式所表示的函数的*定义域*。

每一个包含变元 x 的解析表达式具有所謂*自然的*适用区域：这是使解析表达式保持有意义的（也就是使它具有确定的有限实数值的）一切 x 值的集合。我們用最簡单的例题来說明它。

例如，表达式 $\frac{1}{1+x^2}$ 的定义域是全体实数的集合。

表达式 $\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是閉区間 $[-1, 1]$，在这范圍以外它的值不再是实数。相反的，我們必須取开区間 $(-1, 1)$ 作为表达式

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的自然的适用区域，因为在两端点上它的分母等于零。有时使表达式保持有意义的那种值的区域是由分散的区間所組成：对于$\sqrt{x^2-1}$来說，有区間$(-\infty, -1]$与$[1, +\infty)$；对于$\frac{1}{x^2-1}$来說，有区間$(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$与$(1, +\infty)$；等等①。

在下面的叙述中需要考察更复杂更一般的解析表达式，并且我們将时常研究由这类表达式在其保持有意义的全部区域內所确定的函数的性質，也就是研究解析工具本身。

可是另一种可能的情况我們也認为必須預先提醒讀者注意。設想不論怎样的一个具体問題导致我們去考察一个具有解析表达式的函数$f(x)$，而在这个問題內变量x由于問題的本質被限制在变域$\mathscr{X}$中。虽然可能遇到这表达式在区域$\mathscr{X}$以外也有意义的情形，但要超出这范圍来研究我們的具体問題却不可能。在这里解析表达式只起着附属的輔助作用。

例如，如果研究受重力作用的質点从地面上高h处自由下落时我們用公式

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

[16, 2)]，則考察t的負值或大于$T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$的t值都是荒謬的，因为很明显，当$t=T$时質点已落到地上。然而表达式$\frac{gt^2}{2}$本身却对于t的全部实数值都保持有意义。

3° 可能遇到这种情形，对于变元的一切值函数不是由同一个公式确定，而是对于变元的某些值函数由某一公式确定，对于另一些值由另一公式确定。在区間$(-\infty, +\infty)$內由下面三个公式来定义的函数就是这种函数的一个例子：

$f(x)=1$，当$|x|>1$时（即当$x>1$或$x<-1$时），

---

① 自然，对于x的任何数值都沒有意义的那种表达式，我們是不感到兴趣的。

$$f(x)=-1, \text{当} |x|<1 \text{时(即当} -1<x<1 \text{时)},$$

而且最后 $$f(x)=0, \text{当 } x=\pm 1 \text{ 时。}$$

可是，不要以为对于 x 的全部值由一个公式定义的函数与利用几个公式定义的函数，两者之間有着原则上的区別。通常由几个公式給定的函数也可由一个公式来給定(当然，要用一复杂的表达式)。特别是，对于上面引入的函数，这是正确的[参閱第 43 段，5)]。以后我們会时常遇到这一类的例子。

19. 函数的图形 虽然在数学分析中并不用图形給出函数，可是我們經常使用函数的图解，图形具有直观性与明显性这个特点使它成为研究函数的性質时不可缺少的輔助工具。

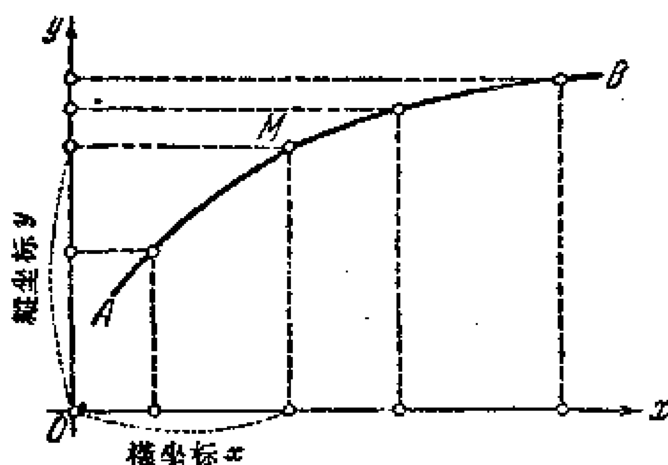


图2.

設在某一区間 $\mathscr{X}$ 內給定了函数 $y=f(x)$。我們設想在平面上有两条互相垂直的坐标軸——x 軸与 y 軸。考察相对应的一对 x 与 y 的值，其中 x 取自区間 $\mathscr{X}$，而 $y=f(x)$；这一对值在平面上的形象就是具有横标 x 与縱标 y 的点 $M(x, y)$。当 x 在其区間范圍內变化时所得到的这种点的全体，就是函数的图形，也就是它的几何形象。平常的图形是象图 2 中曲綫 AB 的一条曲綫，在这些条件下方程 $y=f(x)$ 本身叫做曲綫 AB 的方程。

例如，在图 3 与图 4 中画出了函数

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{与} \quad y=\pm\sqrt{x^2-1}$$
$$(|x|\leqslant 1) \qquad\qquad (|x|\geqslant 1)$$

的图形；讀者能認出它們是圓周与等軸双曲綫。在下面几段中讀

者可看到其他許多函数的图解法的例子。

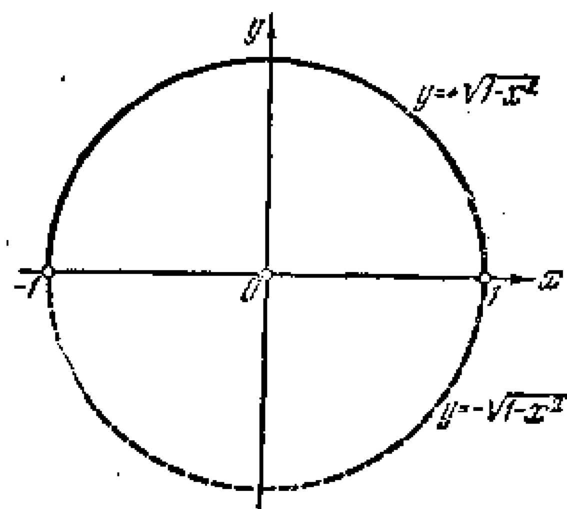


图 3.

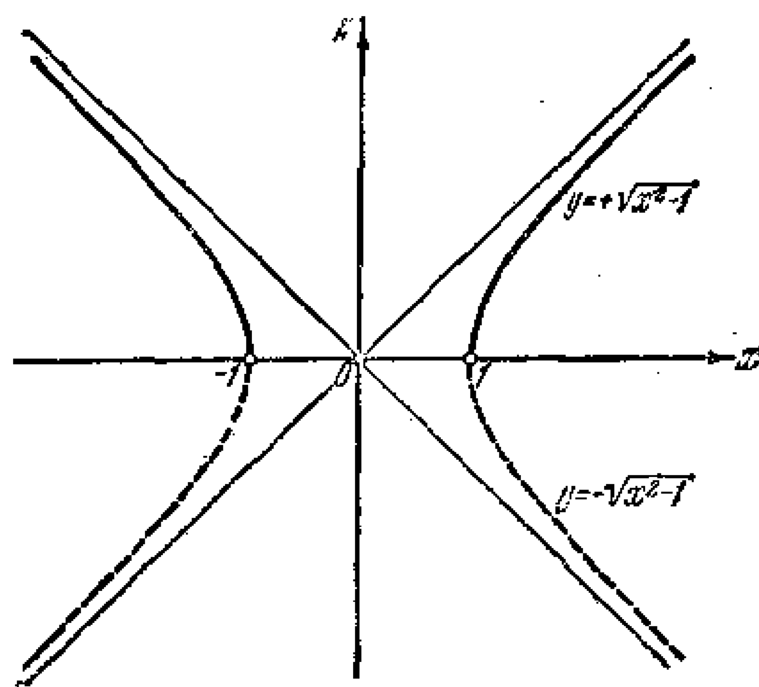


图 4.

图形通常是逐点地描出的。在区間$\mathscr{X}$中取一系列互相邻近的 x 的值，按公式 $y=f(x)$ 标出 y 的各个对应值：

$x=x_1$	x_2	$\cdots$	x_n
$y=y_1$	y_2	$\cdots$	y_n

并且在图上描出这些点

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \cdots (x_n, y_n).$$

通过这些点用手或用曲綫板作出曲綫，它就是所求的图形(自然，这只是近似的图形)。图形的进程愈平順并且所取的点愈稠密，則描出的曲綫就愈准确地代表这图形。

必須注意，虽然函数的几何图形总能“表示”函数本身，可是这个图形并不总是在直观意义下的曲綫。

例如，我們来作函数 $y=E(x)$ 的图形。因为在区間…，

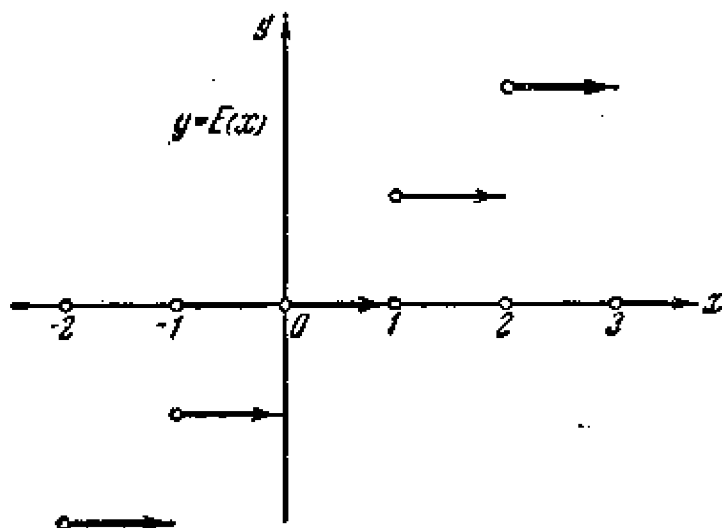


图 5.

$[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, …內函数保持常数值…, $-2, -1, 0, 1, 2$, …，所以它的图形是由一系列的隔离的水平綫段所組成，而且各綫段都缺少右边的端点(图 5)。①

20. 以自然数为变元的函数 直到現在为止，我們只考察了一些变元連續变化的函数的例子，变元的数值填滿了整个的区間。我們現在要講到在根本上較簡单的(但并非不重要的)变元 n 的函数 $f(n)$ 的情形，变元 n 只取 $\mathcal{N}$ 中一系列自然数值。这种以自然数

① 这种情况可用一些箭头来表明，箭头的尖端指出不属于图形的各点。

为变元的函数以后将起着特别的作用。

对于这种函数我們往往不用通常的函数記号，并且写成任何一个具有下标 n 的字母，例如 x_n，以代替着 $f(n)$。如果用具体的自然数，例如 1, 23, 518, …来代替这个下标(在这里我們理解它是自变量)，则 x_1, x_{23}, x_{518}, …就是函数 x_n 的对应数值，好似 $f(1)$, $f(23)$, $f(518)$, …就是函数 $f(n)$ 的数值一样。

根据一般的定义，函数 x_n 認为是已知的，只要我們有一个法則，使得它的任何值在 n 的值一指出时就能够計算出来。

通常的情形是这样，即函数 x_n 是由一个公式給出，这公式建立了在自然数变元 n 上(与在常数上)所必須进行的那些用来求出函数的对应值的解析运算。

例如：

$$x_n=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4},\quad a_n=q^n,\ y_n=\log n,\text{等等}.$$

可是，在现在所考慮的情形下，函数当然也可用任何其他的法則給定。例如，"数 n 的阶乘"：

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n,$$

以及表示 n 的因子个数的函数 $\tau(n)$，或者表示在 1, 2, 3, · · ·, n 内所有与 n 互質的数字个数的函数 $\varphi(n)$。不管給定这些函数的法則的特性如何，它們也和公式一样确切地使得能够算出函数的确定数值：

$$\tau(10)=4,\quad \tau(12)=6,\quad \tau(16)=5,\cdots$$

$$\varphi(10)=4,\quad \varphi(12)=4,\quad \varphi(16)=8,\cdots$$

再一例子：我們取

$$1.4;\ 1.41;\ 1.414;\ 1.4142;\cdots$$

作为 $\sqrt{2}$ 的十进小数近似值(指亏近似值)，这些近似值具有愈来愈高的准确度。知道了根的近似計算法，我們虽然沒有这近似值的一般表达式，但是我們也可以計算这一个完全确定了的函数，它

等于所說的根数的近似值，达到$\frac{1}{10^n}$的准确度。

在中学的数学教程中讀者不止一次遇见过具有自然数附标的函数。如果給定了无穷的几何序列

$$\div\div\ a, aq, aq^2, \cdots,$$

則这序列的一般項是附标 n 的函数

$$a_n = aq^{n-1}$$

并且序列的 n 項之和是

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} \qquad (q \neq 1).$$

在定义圓周的长度与圓的面积时，通常考察內接于圓周的正多边形，从內接正六边形起将边数逐次加倍，則得到一系列的內接正多边形。如果将这种正多边形的边数逐次加倍到第 n 次（n 是任意的），則这种多边形的边，它的边心距、周界与面积全都是自然附标数 n 的函数。

21. 历史的附注 "函数"这一术語本身早在 1692 年就已出現于萊布尼茲的一著作中①，其后被雅谷·伯努利与約翰伯努利两兄弟②在論及与一曲綫的点有联系的各种綫段的性質时应用到了。1718 年約翰伯努利首次給出了不受几何意义約束的函数的定义。他的学生欧拉③所著的"无穷小量分析引論"(1748)教科书，为整个一輩数学家所学习；在这书中轉載了伯努利的定义，并把它写得更精确一些：

"变数的函数是由这个变数与一些数目或者一些常数用任何方式組成的解析表达式"④。

---

① 萊布尼茲 (1646—1716) 是德国著名的哲学家兼数学家。他与牛顿同有創立微积分学的功績（参閱第十四章中历史概述）。

② 雅谷·伯努利(1654—1705)与約翰伯努利 (1667—1748) 出身于数学史上著名的荷兰家庭；两人都継承了萊布尼茲的数学，并（特别是約翰伯努利）对微积分学的傳播功績很大。

③ 欧拉(1707—1783)是杰出的数学家；出身是瑞士人，他在我国度过了其大部分活动的年代，是彼得堡科学院的院士。

④ 所提的著作（原本是用拉丁文写的）第一卷有俄文譯本(1936)，参考第 30 頁。

由此可見，在这个定义中函数可以任意地与产生它的解析表达式等同起来。

除了“显”函数以外，欧拉还考虑了由未求出解的方程所定义的“隐”函数。同时——由于著名的弦的振动問題（在第二卷中将細詳地叙述它）——欧拉認为在分析上能容許的，不仅是在区間的不同的部分內由不同的解析表达式所給出的“混合的”函数[参考第 18 段，3°]，甚至是由任意画出的图形所确定的函数。在它的“微分学”(1755 年) 序言中我們还可見到更一般的虽然也不够确切的定义：

“如果某些变量以这样一种方式依賴于另一些变量，即当后面这些变量变化时前面那些变量也經历变化，則前面那些变量叫做后面这些变量的函数”①

在几十年的期間內函数概念这个定义都沒有得到本質上的发展。把对应的观念唯一地作为这个概念的基础并列为首要地位这一件事，通常归功于狄里希萊②。

1837 年狄里希萊对于变量 x 的函数 y 給出了这样一个定义(假定x取某一区間內的全部数値)：

“如果对应于每一个 x 有唯一的有限的 y …，則 y 叫做…在这区間內的 x 的函数。这时并无必要限定 y 在这整个区間內按照同一个規律依賴于 x，甚至不必是用数学运算来表达其依賴关系”。

这个定义（虽然由于作者的用語而略減其一般性）在数学分析上起了重要的作用。

罗巴契夫斯基③叙述过这个观念不仅比較早，而且是以无錯誤的形式来叙述的，然而这事很久沒引起注意。罗氏的观点起初与欧氏的相接近，以后逐漸地脫离了它，罗氏在其著作“Об исчезании тригонометрических строк”(1834 年)中已肯定地說：

“要称一数为 x 的函数，其一般的概念要求对于每一个 x 这个数是确定的，并且它是与 x 一起逐漸变化着的。函数的値可以由解析表达式給定，或者由条件給定(这个条件提供一种手段来从全部的数中选取其中一数)；甚或

---

① 参考俄文譯本“微分学”(1949 年)，第 38 頁。

② 狄里希萊(1805—1859)是德国著名的数学家。

③ 罗巴契夫斯基(1793—1856)是俄国的大数学家，因創立非欧几何学而著名。

函数依赖关系可以存在但依然的未知的"①。

最后我們指出，习惯上用的函数記号 $f(x)$ 是欧拉的記号。

§2. 几类最重要的函数

22. 初等函数 在这里我們要列举几类所謂的初等函数。

1° 有理整函数与有理分式函数 由 x 的多项式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

($a_0, a_1, a_2, \cdots$是常数)所表示的函数，叫做有理整函数。

两个这样的多项式之比

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

是有理分式函数。它对于 x 的一切值除了使分母为零那些值以外都是确定的。

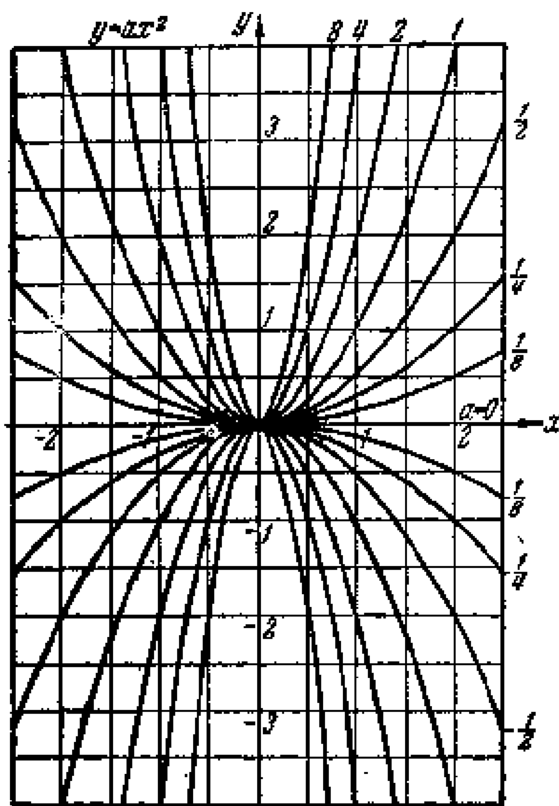


图6.

例如，在图 6 中給出了函数 $y=ax^2$ 在系数 a 为各种不同数值时的图形（拋物綫），而在图 7 中給出了函数$y=\dfrac{a}{x}$对于各种不同的 a 值的图形(等軸双曲綫)。

2° 冪函数 所謂冪函数就是

$$y=x^{\mu},$$

其中 μ 是任何的实常数。当 μ 为整数时得到有理函数。当 μ 为分数时得到根式。例如，設 m 是自然数，并且

$$y=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}.$$

① 罗巴契夫斯基的全集，卷五(1951)，(俄文版)第 43 頁。

这函数对于 x 的一切值只要 m 是奇数就都是有定义的，而当 m 是偶数时则只有对于 x 的正值与零值才有意义（在这情形下我們只考虑根的算术值）。最后，如果 μ 是无理数，我們就預設 $x>0$（只在 $\mu>0$ 时才許 $x=0$）。

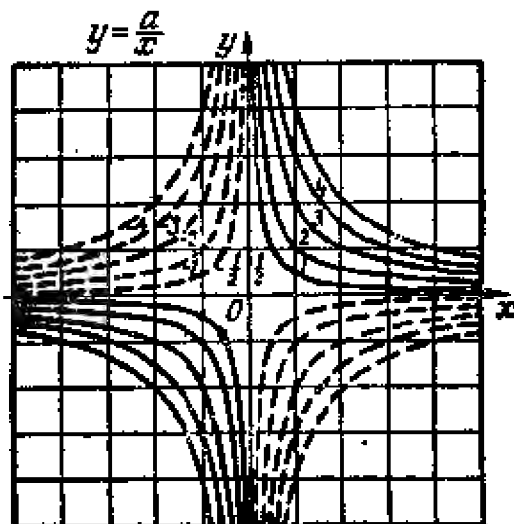


图7.

在图 8 与图 9 中給出了冪函数在各种不同的 μ 值时的图形。

3° 指数函数 就是形如

$$y=a^x$$

的函数，其中 a 是异于 1 的正数；x 可取任何实数值。

在图 10 中給出了指数函数在各种不同的 a 值时的图形。

4° 对数函数 就是形如

$$y=\log_a x$$ ①

的函数，其中 a 和前面一样是正数(异于1)；x 只能取正数值。

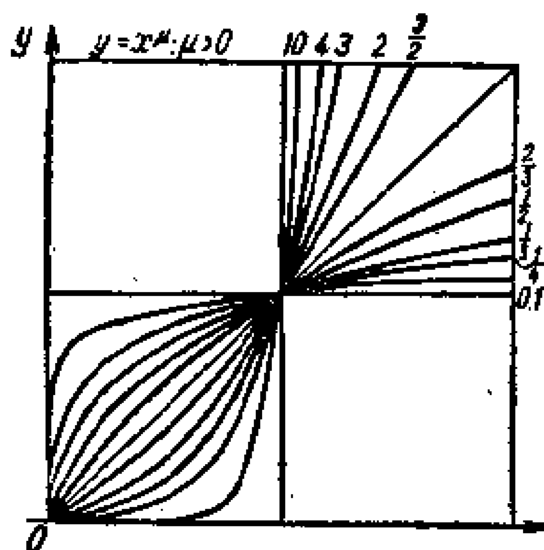


图 8.

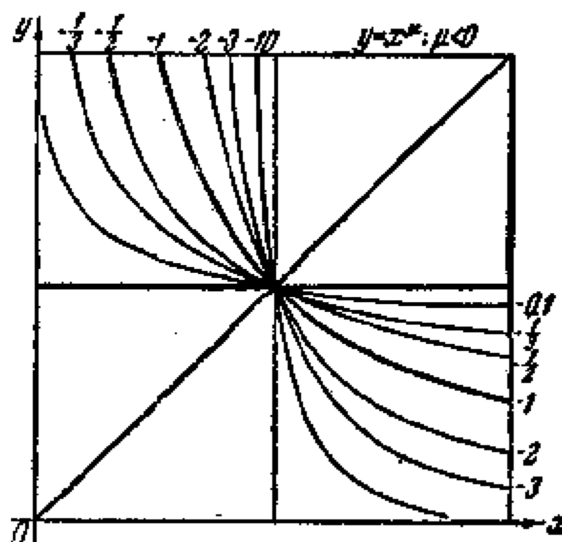


图 9.

① 我們用 $\log x$ 作为十进对数(常用对数)的記号：$\log x=\log_{10} x$.

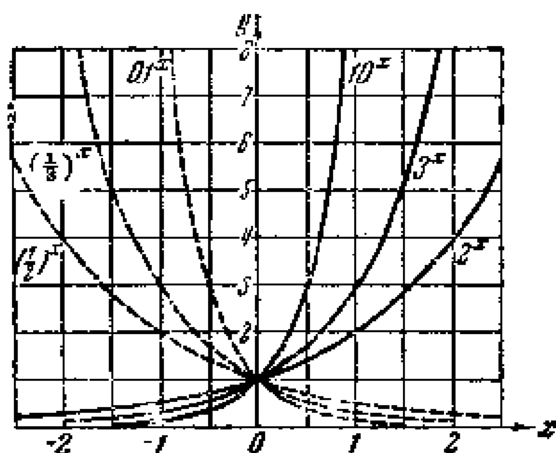


图 10.

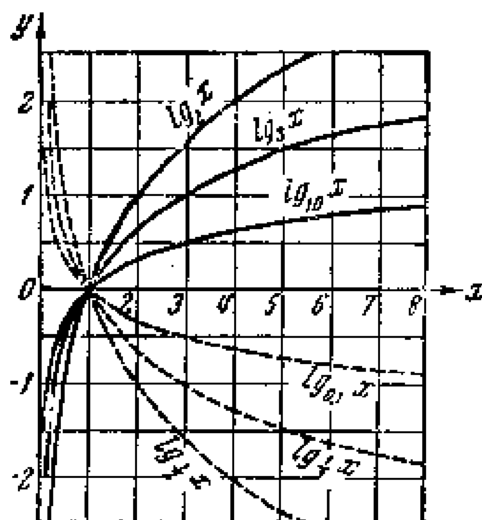


图 11.

在图 11 中給出了这个函数在各种不同的 a 值下的图形。

5° 三角函数:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg}x,\quad y=\operatorname{ctg}x,$$

$$y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

最重要的是要永远記住，三角函数的变元如果作为角度看待时总是表示角的弧度(假如沒有相反的声明)。对于 $\operatorname{tg}x$ 与 $\sec x$

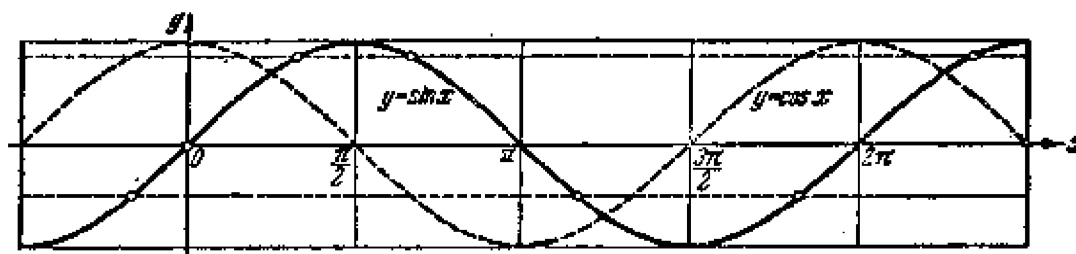


图 12.

需要除掉形如 $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 的值，而对于 $\operatorname{ctg}x$ 与 $\csc x$ 需要除掉形如 $k\pi$ 的值(k 是整数)。

在图 12 与图 13 中給出了函数 $y=\sin x(\cos x)$ 与 $y=\operatorname{tg}x(\operatorname{ctg}x)$ 的图形。正弦的图形通常叫做正弦曲綫。

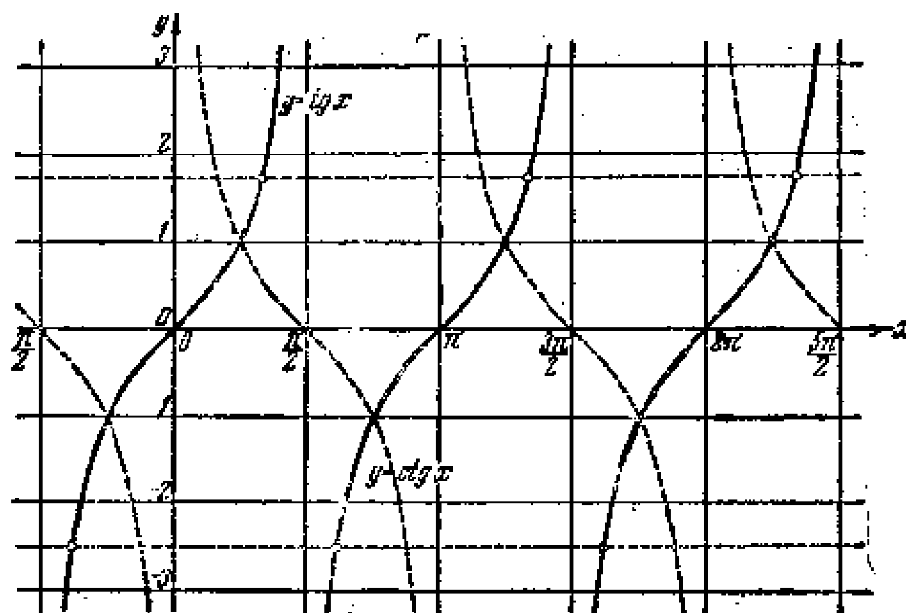


图 13.

23. 反函数的概念 在討論反三角函数以前，我們先对反函数作一般的說明。

假定在某一区域$\mathscr{X}$内給定了函数 $y=f(x)$，并設$\mathscr{Y}$是这个函数当 x 在区域$\mathscr{X}$的范圍內变化时所取的一切值的集合。在实用上$\mathscr{X}$与$\mathscr{Y}$通常都是区間。

在区域$\mathscr{Y}$内选取任一数值 $y=y_0$；于是在区域$\mathscr{X}$内一定能求得这样一个数值 $x=x_0$，使我們的函数恰好就在 x_0 处取得 y_0 值，即

$$f(x_0)=y_0;$$

这样的数值 x_0 可能出現好几个。因此，对应于$\mathscr{Y}$中每一个数值 y 可有一个或多个 x 的数值；这样就在区域$\mathscr{Y}$内对应地确定出单值的或多值的函数 $x=g(y)$，它就叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数。

考察几个例子。

1. 設 $y=a^x(a>1)$，其中 x 在区間$\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$内变化。$y$ 的数值布滿了区間$\mathscr{Y}=(0,+\infty)$，并且对应于这区間內的每一个 y，如我們所知［第 12 段］，在$\mathscr{X}$内有一个确定的 $x=\log_a y$。在这情形下反函数是单值的。

2. 反之，对于函数 $y=x^2$，如果 x 在区間 $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$ 內变化，則反函数是双值的：对应于区間 $\mathscr{Y}=[0, +\infty)$ 內每一个数值 y 有着 $\mathscr{X}$ 內的两个数值 $x=\pm\sqrt{y}$。代替这种双值函数我們通常分別地考察两个单值函数 $x=+\sqrt{y}$ 与 $x=-\sqrt{y}$（双值函数的两“分支”）。它們也可以分別算作函数 $y=x^2$ 的反函数，只要假定 x 的变域是分別由区間 $[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 限制的。

我們注意，按照函数 $y=f(x)$ 的图形，容易判断它的反函数 $x=g(y)$ 是单值的或者不是单值的。如果任一条平行于 x 軸的直綫只与这函数的图相交于一点，則出現第一种情形。反之，如果这样的直綫中有若干条与图形相交于多个点，則反函数就是多值的。在这种情形下按照图形也容易把 x 的变化区間分成几个部分，使得每一部分都与这函数的单值“分支”相对应。例如，只要一看图 14 中的抛物綫（它是函数 $y=x^2$ 的图形），显然知道这函数的反函数是双值的，并且要得到单值的“分支”只要分別地考慮这抛物綫的左边部分与右边部分，也就是分別地考慮 x 的正值与負值。[①]

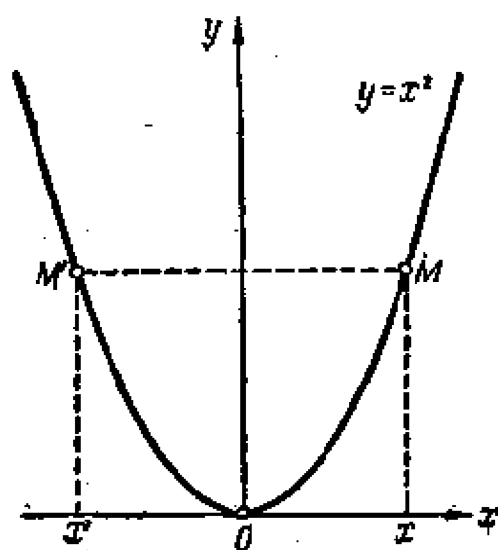


图 14.

若 $x=g(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，則两函数的图形显然重合。但是，可以要求反函数的变元也用字母 x 来表示，就是說，代替函数 $x=g(y)$ 我們来考察函数 $y=g(x)$。这时只要称水平軸为 y 軸，而称鉛垂軸为 x 軸；图形还保留以前的。如果希望（新的）x 軸也和习惯上一样是水平的，而（新的）y 軸是鉛垂的，那就需要把这两軸交

① 在后面第 71 段中我們还要討論反函数的存在性与单值性的問題。

换位置，这也就会改变原来图形。要做到这一点，最簡单的办法是把图中的平面 xOy 繞第一象限角的分角綫旋轉 180°(图 15)。

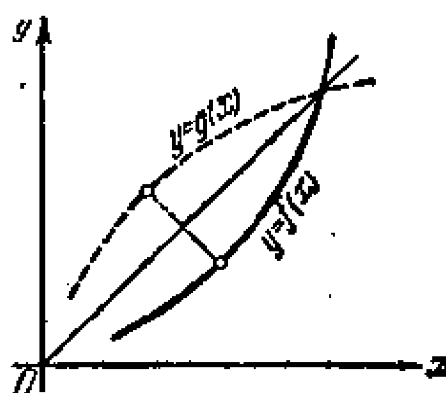


图 15.

于是，$y=g(x)$ 的图形就可視为 $y=f(x)$ 的图形关于这分角綫的鏡面反射而得到。例如，由图 10 与图 11 立即看出，它們就是用这种方法可以互相得到的图形。同样，根据上述理由，不难解釋清楚在图 8 与图 9 中每一图形（关于分角綫）的对称性。

24. 反三角函数 作为第 **22** 段中已叙述过的初等函数类的补充，我們現在来考慮

6° 反三角函数：

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\operatorname{arcctg} x,\quad (y=\operatorname{arcsec} x,\quad y=\operatorname{arccsc} x).$$

首先来講其中第一个。函数 $y=\sin x$ 在区間 $\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ 內是确定的，并且它的数值布满了区間 $\mathscr{Y}=[-1,1]$ 的全部。平行于 x 軸的直綫如与正弦曲綫——即函数 $y=\sin x$ 的图形(图 12)——相交，其交点就有无限多个；換句話說，与区間 $[-1,1]$ 中每一个 y 值相对应，有着无限多个 x 的值。所以反函数，記为

$$y=\operatorname{Arc}\sin y^{①},$$

是(无穷)多值的。

通常只考慮这函数对应于 x 在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間变化的那一"分支"。与 $[-1,1]$ 中的每个 y 对应的只有这范圍中的一个 x 值；用

① 我們在当初[第 **22** 段，5°]已着重指出，三角函数的变元 x 表示角的弧度；自然，在这里反三角函数的值——如果把它們当作角的測度——也都是用弧度表示的。

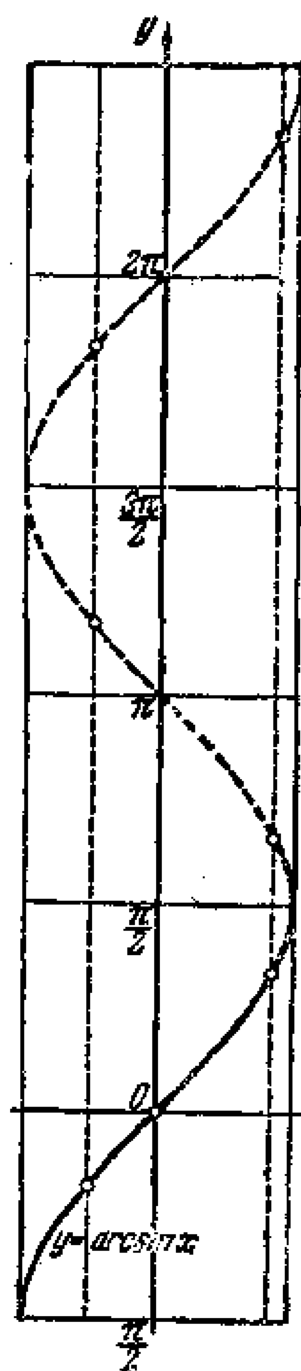


图 16.

記号

$$x = \mathrm{arc}\ \sin y$$

表示它并称它为反正弦函数的主值。

把正弦曲綫繞第一象限角的分角綫翻轉来(图 16)，我們得到多値函数 $y = \mathrm{Arc}\sin x$ 的图形；其主支 $y = \mathrm{arc}\sin x$ 是用粗綫标出的，主支在 x 值的区間$[-1, 1]$内是单値地确定的并且满足不等式

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{arc}\sin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

这不等式表达出主支在其他各分支中間的特征。

回忆在初等三角学中，如何把具有已知正弦的角的全部数值用其中一个数值表达出来，就不难把給出反正弦函数全部数値的公式写出如下：

$$\mathrm{Arc}\ \sin x = \mathrm{arc}\ \sin x + 2k\pi$$

或者 $$(2k+1)\pi - \mathrm{arc}\sin x,$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

类似的討論也可应用于函数 $y = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$. 在这里反函数

$$y = \mathrm{Arc}\ \cos x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

是(无穷)多值的(参閱图 12)。要分出它的单値的分支，可給它一个条件

$$0 \leqslant \mathrm{arc}\ \cos x \leqslant \pi;$$

这是反余弦函数的主支。

函数 arc cos x 与 arc sin x 間有明显的关系式：

$$\operatorname{arc}\ \cos x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\sin x;$$

事实上，不仅是角$\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\sin x\right)$的余弦等于$\sin(\operatorname{arc}\ \sin x)=x$，而且这角的本身也包含在0与$\pi$之間。$\operatorname{Arc}\cos x$的其余諸值可由其主值借公式

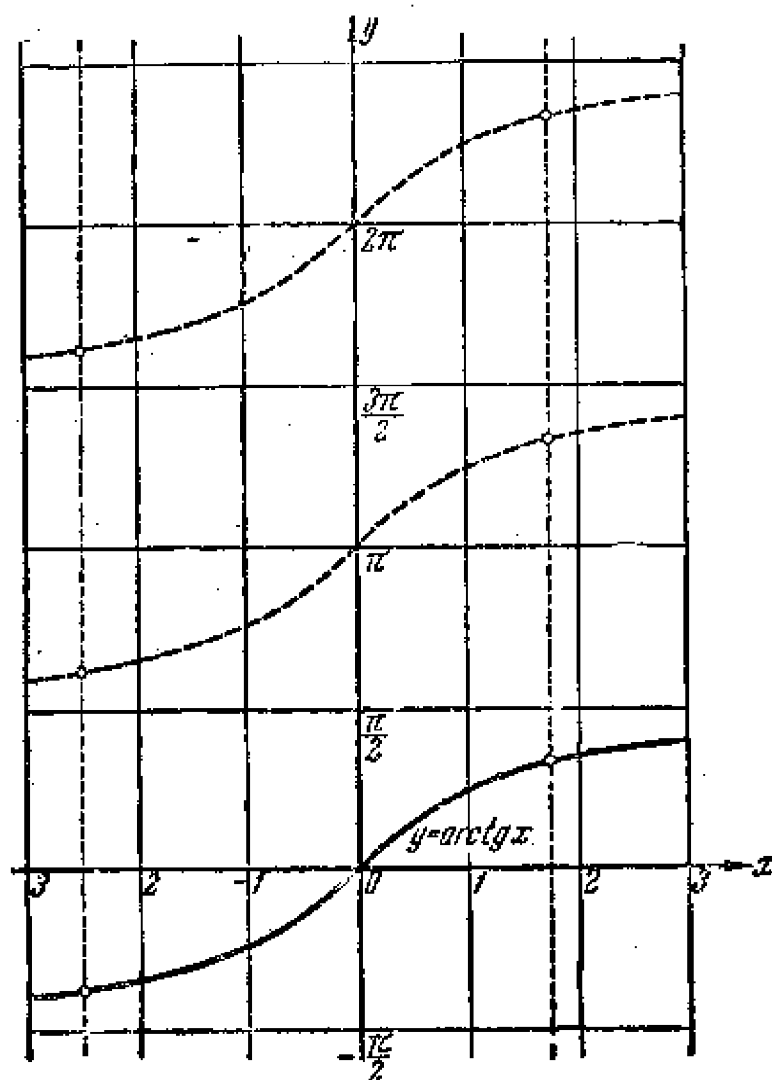


图 17.

$$\operatorname{Arc}\ \cos x=2k\pi\pm\operatorname{arc}\ \cos x$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

表达出来。

函数 $y=\operatorname{tg}x$ 对于 x 的全部数值，除了

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

諸数値以外都是确定的。在这里 y 的数值布满了区間 $(-\infty, +\infty)$，并且对应于每一个 y 仍有无限多个 x 的值(参閱图 13)。所以給定在区間 $(-\infty, +\infty)$ 内的反函数 $x=\mathrm{Arc\,tg}y$ 是(无穷)多值的。在图 17 上画出了函数 $y=\mathrm{Arctg}x$ 的图形，它是把函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的图形繞第一象限角的分角綫旋轉 180° 而得到的。我們取这多值函数滿足不等式

$$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arc\,tg}x<\frac{\pi}{2}$$

的数值作为反正切函数 $\mathrm{arc\,tg}x$ 的**主值**。

于是单值函数——反正切函数的**主支**对于 x 的一切值都是确定的。容易証明反正切函数的其余諸值可由下公式求得:

$$\mathrm{Arctg}x=\mathrm{arctg}x+k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

不难在函数 $\mathrm{arc\,tg}x$ 与 $\mathrm{arc\,sin}x$ 之間建立直接的联系:

$$\underset{(-\infty<x<+\infty)}{\mathrm{arc\,tg}x=\mathrm{arc\,sin}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 或 } \underset{(-1<x<+1)}{\mathrm{arc\,sin}x=\mathrm{arc\,tg}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例如，若令 $\alpha=\mathrm{arc\,tg}x$，因而 $\mathrm{tg}\,\alpha=x$，则 $\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=$ $=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，并且因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 根式前应取正号；由此推得

$$\alpha=\mathrm{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

我們再講到函数 $\mathrm{Arc\,ctg}x\,(-\infty<x<+\infty)$；它的**主值**由不等式

$$0<\mathrm{arcctg}x<\pi$$

确定，并且与 $\mathrm{arc\,tg}x$ 有如下的关系:

$$\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}x.$$

反余切函数的其余的数值可表成下形:

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

我們不再講函数 arc sc$x$($-\infty < x \leqslant -1$ 及 $1 \leqslant x < +\infty$) 以及 arc csc x(同是那两个变化区間), 让讀者自己去研究它們。

25. 函数的迭置 · 結束語 我們来介紹函数的迭置这个概念, 那就是要用(另一个变元的)另一个函数来代替已知函数的变元。例如, 函数 $y = \sin x$ 与 $z = \log y$ 的迭置給出函数 $z = \log \sin x$; 同样又能得到函数

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad 等等。$$

一般情形, 假定函数 $z = \varphi(y)$ 在某一区域 $\mathscr{Y} = \{y\}$ 中是确定的, 而函数 $y = f(x)$ 对于区域 $\mathscr{X} = \{x\}$ 中的 x 是确定的, 并且它的全部值包含在区域 $\mathscr{Y}$ 中。于是我們說, 变量 z 通过 y 而成为 x 的函数:

$$z = \varphi(f(x)).$$

依照 $\mathscr{X}$ 內給定的 x 首先(按照記号 f 所表征的法則)求出 $\mathscr{Y}$ 內对应于它的 y 值, 然后再(按照記号 φ 所表征的法則)确定对应于这个 y 值的 z 值; 它就是与所选的 x 值对应的 z 值。所得的*函数的函数*或*复合函数*就是函数 $f(x)$ 与 $\varphi(y)$ *迭置*的結果。

函数 $f(x)$ 的值不超出函数 $\varphi(y)$ 的定义域 $\mathscr{Y}$ 的范圍这一假設, 是极为重要的: 如果沒有这假設, 就会得出謬論。例如, 令 $z = \log y$, 而 $y = \sin x$, 我們就只能考察使 $\sin x > 0$ 的那种 x 的值, 否則表达式 $\log \sin x$ 就会沒有意义。

我們认为在这里着重指出下面一事是有益处的: 作为复合函数看待的函数, 它的特征与 z 依賴于 x 这一函数关系的本身沒有联系, 而只与这个关系的表示方法有联系。例如, 設 $z = \sqrt{1-y^2}$ 当 y 在 $[-1, 1]$ 內, 而 $y = \sin x$ 当 x 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 內, 于是

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

在这里函数 $\cos x$ 是按复合函数的形式出現的。

完全弄清楚了函数的迭置概念以后，我們現在可确切地說明在分析上所研究的那些函数中最簡单的几类：首先就是前面所列举的初等函数 1°—6°，其次是由这些函数利用算术四則运算与运用有限多次迭置方法所得到的函数。我們称这种函数是有限形式的初等函数；有时也同样地称它們为初等函数。

以后，掌握了更复杂的解析工具（无穷級数、积分）时，我們还要介紹在分析上同样起重要作用的其他一些函数，不过它們已超出了初等函数的范圍。

第三章　极限論

§1. 函数的极限

26. 历史的說明　极限这个概念現在貫串着整个的数学分析，并且在数学的其他領域中也起着重要的作用。可是这个概念(讀者將在第十四章中看到)却不是在微积分学产生时就已成为微积分学的基础的。极限概念的定义首次出現于华利斯①的"无穷量的算术"中(1655)实际上这个定义和后面第28段中叙述的定义是一样的形式。牛頓在著名的"自然哲学的数学原理"(1686—1687)中发表了其最初比与最后比(或和数)的方法，其中可看到极限理論的萌芽。可是在十八世紀的大数学家中誰都沒有想到用极限概念来論証新的計算方法以及用极限概念来回答新計算法所受到的正确批評②。就这一点来說，欧拉的論点是特出的，他在"微分学"(1755)这本书的序言中明白地說到了极限，可是在全书中沒有一处用过这个概念!

哥西③的"代数分析"(1821)以及他后来的諸著作是上述問題的轉折点，在这些著作中极限理論首次有了发展，并成了哥西严格地构成整个数学分析的有力工具。哥西的論点企图扫除在他以前掩盖分析学原理的神秘障碍，他的論点得到了普遍的承認。

可是，其他的学者也应分享哥西的功績，特别是波尔察諾，波氏在許多方面的工作不仅超在哥西之前，而且也超在后来諸数学家之前。这些工作沒有得到推广，而且只在几十年以后才被提起。

27. 数的序列　我們从最簡单的特殊的(甚至是在中学教程中已知道的)情形开始，也就是从以自然数为变元的函数 x_n 的极限开始，来建立分析学中的极限基本概念。我們将知道，更加复杂的情形原則上可化为这种情形。

---

① 华利斯(1616—1703)是英国的数学家。

② 关于这一点的詳細情形可参考第十四章。

③ 哥西(1789—1857)是法国著名的分析学家。

設变元 n 取自然数的序列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, n', \cdots \tag{1}$$

中全部数値，我們假定这序列的項是依由小到大的順序排列的，較大的数 n' 在較小的数 n 的后面，較小的数 n 在較大的数 n' 的前面。

如果給定了函数 x_n，則它的变元或者附标 n 可以当作变量的对应値的序号。于是 x_1 是它的第一个値，x_2 是第二个値，x_3 是第三个値，等等。我們以后总假定这些数値的集合 $\{x_n\}$ 象自然数的序列(1)一样是按序号增大的順序排列的，也就是按数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots, x_{n'}, \cdots \tag{2}$$

的形式排列的①。当 $n'>n$ 时，数値 $x_{n'}$ 在 x_n 的后面(x_n 在 $x_{n'}$ 的前面)而不論数値 $x_{n'}$ 本身大于、小于或者等于 x_n。

例如，若由下列公式之一来給定函数 x_n：

$$x_n=1,\quad x_n=(-1)^{n+1},\quad x_n=\frac{1+(-1)^n}{n},$$

則对应的数列为：

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{1},\cdots$$

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{-1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{-1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{-1},\cdots$$

$$\underset{1}{0},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{0},\ \underset{4}{\frac{1}{2}},\ \underset{5}{0},\ \underset{6}{\frac{1}{3}},\cdots$$

在第一种情形下我們只得到常量：它所取的数値的"集合"只含一个元素 1，在第二种情形下这个集合是由 x_n 交錯取得的两个数値 1 与 -1 所組成。最后，在第三种情形下函数 x_n 所取得的各种数値組成一无穷集合，但这并不妨碍这个函数每隔一次取一个等于零的数値。因此，作为变量来看，函数 x_n 的变域 $\mathscr{X}$ 与序列(2)本

① 同样地可以說到直綫上的点序列或任何記有自然数附标的其他对象的序列。

質上是彼此不同的。第一个不同地方是：在集合$\mathscr{X}$中每一个元素出現一次，而在序列(2)中同一个元素可重复几次(甚至无穷多次)。第二个不同地方——也是本質上不同的地方——在于：集合$\mathscr{X}$是"无定形的"，沒有次序，而对于序列(2)中的元素来說，則規定了一定的次序。

記載序列的慣用方法［参閱(2)］好象預定了序列中元素的空間的位置。可是这种記載法只是为了便利，而与問題的本質无关。如果我們将来說，变量"經过"这样的一序列的数值，則讀者可能会产生变量在相継各时刻經过其数值的时間观念，可是事实上这却与时間完全无关。不过为了借喻說話方便，我們有时也用如下的一些說法：变量的"很远的"数值，变化从某一"位置"或某一"时刻"开始，等等。

28. 序列的极限定义 将变量x_n的数值依其序号增大的次序排列，导致对这些数值的序列(2)的考察，这也就使得我們易于了解，当n无限地增加时变量x_n逼近于极限a的"过程"。

如果x_n的数值从某一位置开始(也就是对于一切足够大的序号n)可以与常数a相差任意小，則常数a叫做变量x_n的极限。

极限的本質已由此鮮明地表达出来，可是什么是"任意小"与什么是"足够大"，还需要明确說明：

若对于每一个正数ε，不論它怎样小，恒存在这样一个序号N，使得当$n>N$时，一切x_n的数值都满足不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon, \tag{3}$$

則数a叫做变量x_n的极限。a是变量x_n的极限这个事实，記成：

$$\lim x_n=a$$

(lim 是拉丁字 limes 的簡写，就是"极限"的意思)。我們也說，变量趋向于a，并写成

$$x_n\to a.$$

最后，数 a 也叫做序列(2)的极限，并称这序列收斂于 a。

不等式(3)，其中 ε 是任意的，就是可使 x_n 与 a"相差任意小"这一断語的确切記法，而序号 N 恰好就指出这个"位置"，从它开始不等式(3)成立，于是所有 $n>N$ 的序号 n 就都是"足够大"的了。

重要的是要了解：序号 N 一般説来不能一次指定就永不变化；它依賴于所选取的数 ε。为要着重指出这一点，我們有时写 N_ε 以代替 N。当 ε 减小时，对应的序号 $N=N_\varepsilon$ 一般説来就要增大：要想变量 x_n 的数值与 a 接近的程度愈大，就必須在序列(2)中考慮它的"愈远的"数值。

例外的一种情形，是变量 x_n 的全部数值都等于常数 a。显然，这时 $a=\lim x_n$，可是这时对于任何的 $\varepsilon>0$ 以及 x_n 的一切数值，不等式(3)同时能够成立[①]。

我們已知道[第 8 段]，不等式(3)与下面等价：

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

或者

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon; \tag{4}$$

这是我們以后常要用到的不等式。

以 a 点为中心的开区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 叫做这点的邻域。因此，不論 a 点的邻域取得怎样小，x_n 的全部数值从其中某一个起应該落在这邻域内(因而在这邻域外只能有有限多个这种数值)。如果



图 18.

把数 a 与变量 x_n 的各个数值用数軸上的点表示[第 13 段](图 18)，則表示数 a 的点好似表示 x_n 的数值的点的凝集中心。

29. 无穷小量 当变量趋向于零时：$x_n\to 0$ 的这种情形，是值

---

① 对于其数值从某一位置起都等于 a 的那种变量 x_n，有与此类似的情况。

得特别注意的。

以零为极限的变量 x_n 叫做无穷小量，或简称无穷小。

如果在 x_n 的极限定义[第 28 段]中令$a=0$，则不等式(3)成下面的形状：

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon \quad (当n>N_\varepsilon).$$

因此，上面給出的无穷小的定义可以不用术語"极限"而更詳細地叙述如下：

若对于足够大的序号，变量 x_n 的絕对值可变得小于并保持小于預給的任意小数 $\varepsilon>0$，则它叫做无穷小。

(在历史上形成起来的)不十分恰当的术語"无穷小"量，希望不要引起讀者的誤解：这个量所取的任何一个个别的数值，只要它不是零，就不能断定是"很小的"。問題的实質在于，无穷小量是变量[①]，它仅在自己的变化过程中最后能够变到小于任意选取的数 ε。

如果回到以 a 为极限的变量 x_n 的一般情形，则变量与其极限的差

$$\alpha_n=x_n-a$$

显然是无穷小：因为由(3)，有

$$|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon \quad (当n>N_\varepsilon).$$

反之，如果 α_n 是无穷小，则 $x_n\to a$。这就使我們推得下面的結論：

变量 x_n 以常数 a 为其极限的必要且充分条件，是它們的差数 $\alpha_n=x_n-a$ 为无穷小量。

因此，关于"极限"概念也可以給出另一个(与旧定义等价的)定义：

---

① 除掉当它恒等于零的那种无趣的情形。

常数 a 叫做变量 x_n 的极限，只要它們的差是无穷小量。

自然，如果从这个极限的定义出发，則对于无穷小量就必須应用上面引进的第二个定义。否則便会得到循环推理：极限由无穷小量来定义，而无穷小量又由极限来定义！

因此，若变量 $x_n \to a$，則它可以表成

$$x_n = a + \alpha_n,$$

其中 α_n 是无穷小量。反之，若变量具有这种表示式，則它就有极限 a。在实用上常利用这个式子来确定变量的极限。

30. 例 1) 考察变量

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

与它們相对应的数列是：

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \cdots,$$

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \cdots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \cdots.$$

这三个变量都是无穷小量，就是都以零为其极限。实际上，要想对于这三个变量有

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

就只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$。因此，我們可以取比 $\frac{1}{\varepsilon}$ 小的最大整数，即 $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$① 当作 N_ε.

我們注意，第一个变量总大于它的极限零；第二个总小于零；第三个則輪流地时而大于零，时而小于零。

2) 若令

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n},$$

則变量通过这样的一列数値：

---

① 参閱第 17 頁。

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{6},\ \cdots.$$

在这情形下也有 $x_n\to0$, 因为当 $n>\frac{3}{\varepsilon}$时

$$|x_n|\leqslant\frac{3}{n}<\varepsilon,$$

所以可取 $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$为 N_ε。

在这里我們遇到变量的希奇的性質：变量依次地时而接近于其极限 0，时而又离开它。

3)現在設

$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{n};$$

在第 **27** 段中我們已見到它。在这里也是 $x_n\to0$, 因为要

$$|x_n|\leqslant\frac{2}{n}<\varepsilon,$$

就只要 $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

我們注意，对于 n 的一切奇数值变量都等于它的极限。

这些簡单的例子是很有趣的，它們表征出了前面所下的极限定义中各种各样的可能性。变量的数值是否都在它的极限的一方，这是不关紧要的；变量是否一步一步地接近于它的极限，这也是不关紧要的；最后，变量是否能达到它的极限，也就是說，是否能取得等于它的极限的数值，这仍是不关紧要的。重要的只在于定义中所說的：变量与其极限的差終归要任意小，也就是对于所有項数足够远的数值这个差要任意小。

4)用公式

$$x_n=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ (a>1)$$

来定义变量 x_n, 我們可証明 $x_n\to1$.

如果利用第 **11** 段中不等式(3)，則可以写成：

$$|x_n-1|=\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}<\varepsilon,\quad 只要\ n>N_\varepsilon=E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

但也可用另外方法来証明。不等式

$$|x_n-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$$

等价于

$$\frac{1}{n}<\log_a(1+\varepsilon)\quad\text{或}\quad n>\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)},$$

因此，当 $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right)$时它就成立。

由于所选的論証方法不同，我們就得到不同的 N_ε 的表达式。例如，当 $a=10$，$\varepsilon=0.01$ 时我們按第一种方法得到 $N_{0.01}=\frac{9}{0.01}=900$，而按第二种方法得到 $N_{0.01}=E\left(\frac{1}{0.00432\cdots}\right)=231$。按第二种方法我們得到了 $N_{0.01}$ 的一切可能的数值中的最小者，因为 $10^{\frac{1}{231}}=1.010017\cdots$ 与 1 的差已大于 $\varepsilon=0.01$。在一般情形下也是如此。

我們注意，如果只在討論极限的存在問題，我們就可以不管 N_ε 的最小的可能数值。不等式(3)的成立是应該要保証的，至于它的成立是从远些的或者近些的位置开始，那是可以不管的。

5)重要的一个无穷小量的例子是

$$\alpha_n=q^n,\quad\text{其中 } |q|<1.$$

要证明 $\alpha_n\to0$，我們考察不等式

$$|\alpha_n|=|q|^n<\varepsilon;$$

它等价于：

$$n\cdot\log|q|<\log\varepsilon\ \text{或}\ n>\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\text{①}.$$

因此，若假設(設 $\varepsilon<1$)

$$N_\varepsilon=E\left(\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right),$$

則当 $n>N_\varepsilon$ 时上述不等式一定成立。

同样不难証实变量

$$\beta_n=Aq^n$$

也是无穷小，其中 $|q|<1$，而 A 是常数。

6)其次，考慮无穷的漸減几何序列

$$\div\ a,\ aq,\ aq^2,\cdots,\ aq^{n-1},\cdots\quad(|q|<1)$$

并提出关于它的和的定义問題。

---

① 必須注意到，$|q|<1$ 与 $\log|q|<0$；所以在用这数除不等式的两端时，不等号应該換成相反的向。

所謂无穷序列的和，大家知道，自然是它的首 n 项之和 s_n 当 n 无限增加时的极限。但

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{n}{1-q}\cdot q^n,$$

可見变量 s_n 与常数 $\frac{a}{1-q}$ 相差之量 $\alpha_n=\frac{a}{1-q}\cdot q^n$，就是我們刚才已看到的一个无穷小量。因此，依极限的第二个定义，所求的序列的和为

$$s=\lim s_n=\frac{a}{1-q}.$$

31. 无穷大量 无穷大量（簡称无穷大）在某种意义下是与无穷小量相对立的。

若变量 x_n 的絕对值，对于足够大的 n 值，可以变得并且保持大于任意預定大的数 $E>0$:

$$|x_n|>E \quad (当\ n>N_E),$$

則 x_n 叫做无穷大。

象在无穷小的情形一样，在这里也应着重指出，无穷大量所取的任何一个个别的数值都不能当作"很大的"量看待，我們在这里，所談到的是变的量，它只在自己的变化过程中最后才能够变到大于任意取定的数 E。

变量

$$x_n=n,\quad x_n=-n,\quad x_n=(-1)^{n+1}n$$

都是无穷大的例子，它們通过自然数序列，不过第一个总带正号，第二个总带負号，第三个的符号則是正負相間的。

还有一个无穷大量的例子：

$$x_n=Q^n,\quad 当\ |Q|>1.$$

事实上，不論 $E>0$ 是怎样的数，不等式

$$|x_n|=|Q|^n>E$$

总能成立，只要

$$n\cdot\log|Q|>\log E \quad 或\quad n>\frac{\log E}{\log|Q|}①,$$

① 因为 $|Q|>1$，所以 $\log|Q|>0$.

因此，可以取数

$$E\left(\frac{\log E}{\log|Q|}\right)$$

当作 N_E。

特别重要的是当无穷大量 x_n（至少对于所有足够大的 n）保持着一定的符号（＋或－）的那种情形；这时，依符号为正或为負我們称变量 x_n 有极限$+\infty$或$-\infty$，也說它趋向于$+\infty$或$-\infty$；并且写作

$$\lim x_n=+\infty,\quad x_n\to+\infty \text{ 或 } \lim x_n=-\infty,\quad x_n\to-\infty.$$

就这两种情形言，可以看情形怎样，用不等式

$$x_n>E \text{ 或 } x_n<-E$$

来代替不等式$|x_n|>E$，以作为每种无穷大量的单独的定义，由此就可推得分别地有 $x_n>0$ 或 $x_n<0$.

显然，在一般情形下无穷大量 x_n 是由关系$|x_n|\to+\infty$来表征的。

在前面所举的无穷大量的例子中，显然，变量 $x_n=n$ 趋向于 $+\infty$，变量 $x_n=-n$ 趋向于 $-\infty$。至于第三个变量 $x_n=(-1)^{n+1}n$，則既不能說它趋向于 $+\infty$，也不能說它趋向于 $-\infty$。

最后，說到变量 $x_n=Q^n$，只有当 $Q>1$ 时才能說它趋向于 $+\infty$；当 $Q<-1$时它既不趋向 $+\infty$ 又不趋向 $-\infty$①。

在第 6 段中我們已遇見过"广义的数"$\pm\infty$，必須記住，它們的应用假定完全有意义的，并且对这些数进行算术运算时要小心。我們常把$+\infty$ 簡写为 ∞。

最后，我們叙述一下在无穷大量与无穷小量之間存在着的簡单联系。

若变量 x_n 是无穷大，則它的倒数 $\alpha_n=\dfrac{1}{x_n}$就是无穷小。

① 原书作"它沒有极限"——譯者注。

取任意数 $\varepsilon>0$. 按无穷大的定义，对于数 $E=\frac{1}{\varepsilon}$ 可找到这样的序数 N，使得

只要 $n>N$ 就有 $|x_n|>\frac{1}{\varepsilon}$。

于是对于这种数值 n，显然就有

$$|\alpha_n|<\varepsilon,$$

这就証明了我們的命題。

同样也可以証明逆命題：

若变量 α_n（不会变成零的）是无穷小，则它的倒数 $x_n=\frac{1}{\alpha_n}$ 就是无穷大。

32. **函数的极限定义** 考虑数的集合 $\mathscr{X}=\{x\}$。若在点 a 的任何邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 内［第 **28** 段］含有 $\mathscr{X}$ 中异于 a 的 x 的数值，则点 a 叫做这集合的聚点。这时聚点本身可属于 $\mathscr{X}$ 或不属于 $\mathscr{X}$。例如，如果 $\mathscr{X}=[a, b]$ 或 $\mathscr{X}=(a, b]$，則在两种情况下 a 都是 $\mathscr{X}$ 的聚点，但在第一情况下 a 属于 $\mathscr{X}$，而在第二情况下则不属于 $\mathscr{X}$。

在 a 是 $\mathscr{X}$ 的聚点的假設下，可以从 $\mathscr{X}$ 中取出——且可用无穷多种方法取出——各异于 a 的 x 的数值，作成这样一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots, \tag{2}$$

使得它以 a 为其极限。事实上，給定一收斂于零的正数序列 δ_n，則在点 a 的每个邻域 $(a-\delta_n, a+\delta_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 内都可找到 $\mathscr{X}$ 中异于 a 的一点 $x=x_n$；因为 $\delta_n \to 0$ 且 $|x_n-a|<\delta_n$，

所以 $$x_n \to a.$$

現在設在以 a 为其一聚点的区域 $\mathscr{X}$ 中給定了某一函数 $f(x)$。这函数当 x 趨近于 a 时的性态是値得注意的。如果不論自变量 x 通过怎样的一个以 a 为极限的并且是从 $\mathscr{X}$ 中取出的序列(2)，对应的函数值序列

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots \tag{5}$$

总有极限 A，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时(或在点 a 处)有极限 A(有限的或无穷的)。我們把这一事实記成:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \tag{6}$$

或者

$$当\ x\to a\ 时,\ f(x)\to A. \tag{7}$$

現在假定集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 含有任意大的正数值 x；这时我們說，$+\infty$ 是这集合的一个聚点。如果把区間 $(\Delta,+\infty)$ 理解为点 $+\infty$ 的邻域，則所作的假定也可表述成这样的形式：在点 $+\infty$ 的每个邻域内应含有集合 $\mathscr{X}$ 內的数。

若这假定成立，則从 $\mathscr{X}$ 中可以分出一个具有极限 $+\infty$ 的序列(2)来。实际上，取任一个趋向于 $+\infty$ 的正的变量序列 Δ_n，则对于每一个 $\Delta_n(n=1,2,3,\cdots)$，我們在 $\mathscr{X}$ 中可找到一个数值 $x_n>\Delta_n$；显然，$x_n\to+\infty$。

在 $+\infty$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个聚点的假設下，我們来考慮在这区域內所定义的函数 $f(x)$。对于这个函数可以建立当 $x\to+\infty$ 时的极限概念

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

这完全和前面一样，只要把 a 换成 $+\infty$，

同样，当 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念也可建立:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

在这里只需要預先假定 $-\infty$ 是集合 $\mathscr{X}$ 的一个聚点——其意义自然明显。

最后我們要說一下，在第 **29** 段与第 **31** 段中就自然数为变元的函数所建立起来的术語，如何轉移到現在所考慮的函数极限的一般情形。設当 x 趋向于一确定的极限时，函数 $f(x)$ 趋向于零；这时我們称这函数为无穷小量。若函数 $f(x)$ 趋向于有限的极限 A，則差数 $f(x)-A$ 就是无穷小；反轉来也是正确的。当 $|f(x)|$ 趋

向于$+\infty$时我們称函数$f(x)$为无穷大量[①]。最后，也不难把第31段末所建立的有关无穷小量与无穷大量之間的联系的定理轉移到現在所考慮的一般情形。

33. 函数的极限的另一定义 以前在研究較基本的序列的极限概念时，我們已建立函数$f(x)$当x趋向于a时的极限概念。但是，可以不利用序列的极限来給出函数的极限的另一定义。

我們首先就a与A两数都是有限的情形来討論。假定a是函数$f(x)$的定义区域$\mathscr{X}$的一个聚点，于是极限的新定义可以叙述如下：

若对于任一数$\varepsilon>0$，可求得这样的一个数$\delta>0$，使得

$$\text{只要}\ |x-a|<\delta,\ \text{就有}\ |f(x)-A|<\varepsilon \tag{8}$$

(其中x取自$\mathscr{X}$内并且异于a)[②]，則称函数$f(x)$当x趋向于a时以数A为其极限。

这一定义与前面第32段中所給的定义完全等价。为了証明起見，我們首先假定剛才所述的条件成立，并且对于任意选取的$\varepsilon>0$，已在所指的意义之下找到与它相对应的数$\delta>0$。从$\mathscr{X}$内选出任意一个收斂于a的序列(2)（并且所有的x_n都异于a）。按序列的极限定义，对应于数$\delta>0$有这样的序数N，使得当$n>N$时不等式$|x_n-a|<\delta$成立，因而[参考(8)] $|f(x_n)-A|<\varepsilon$也成立。这就証明了序列(5)收斂于A。由此可見，包含在以前的定义中的条件成立。

現在假定，按照以前的定义函数的极限存在。为了要証明包含在新定义中的条件也成立，我們采用归謬証法。假定对于某一个数$\varepsilon>0$，沒有对应的δ，就是說无論δ取得怎样小，总可找到变

① 如果这一情况发生于$x\to a$时，則又称在点a处函数成为无穷大。

② 正因为a是$\mathscr{X}$的聚点，所以可知在点a的近邻$(a-\delta,\ a+\delta)$内这种數值x一定存在。

量的一个数值 $x=x'$(异于 a)，使得

$$虽然 |x'-a|<\delta,\ 但仍有 |f(x')-A|\geqslant\varepsilon.$$

取收斂于零的正数序列 δ_n。根据刚才所述，对于每一个数 $\delta=\delta_n$ 可找到这样的数值 $x'=x'_n$，使得

$$虽然 |x'_n-a|<\delta_n,\ 但仍有 |f(x'_n)-A|\geqslant\varepsilon.$$

于是这些数值作成一个使

$$|x'_n-a|<\delta_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

的序列

$$x'_1, x'_2, x'_3, \cdots, x'_n, \cdots;$$

因为 $\delta_n\to 0$，所以 $x'_n\to a$.

由假設，对应的函数值序列

$$f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \cdots, f(x'_n), \cdots$$

应該收斂于 A，但这是不可能的，因为对于一切的 $n=1,2,3,\cdots$，我們有 $|f(x'_n)-A|\geqslant\varepsilon$。所得的矛盾证明了我們的断言。

当数 a 与 A 中有一个或者两个等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，也不难說明极限定义的新的形式。我們以 $a=+\infty$ 与 A 为有限值(或者也等于 $+\infty$)的情形为例来引进新的定义：

若对于任一数 $\varepsilon>0$($E>0$)可求得这样的数 $\Delta>0$，使得

只要 $x>\Delta$(x 在 $\mathscr{X}$ 内)，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$($f(x)>E$)，

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 $+\infty$ 时以有限的数 A(或 $+\infty$)为极限.

这个定义与"用序列說法"的定义是等价的，其证法象上面一样。

如果把这个定义应用到(作为自变量 n 的函数的)变量 x_n，当 $n\to+\infty$ 时的情形，我們就回到这种函数的起初的极限定义，也就是回到第 **28** 段与第 **31** 段所給的序列的极限定义(在那里 N 起着数 Δ 的作用)。由此可見，一方面函数的极限以前的定义可归結为序列的极限；同时序列的极限定义一般也是函数的极限

定义(在其新的形式下)的特殊情形。这个极限,我們以前曾用記号

$$\lim x_n$$

来表示,現在按照新的定义应写成

$$\lim_{n\to+\infty} x_n.$$

可是,实际上記号 $n\to+\infty$ 总可以省掉而不致发生誤会,因为在这里不能有任何其他的极限过程:自然指数 n 的变域 $\mathscr{N}$ 有着唯一的聚点 $+\infty$。

虽然(在新的形式下)函数极限的各个定义随着对 a 与 A 的假設不同而有所区别,可是它們的本質是一样的:函数必須包含在其极限 A 的任意的"邻域"内,只要自变量包含在其极限 a 的适当选取的"邻域"内。

总之,我們得到在分析中重要的两个等价的函数的极限定义;哪一个定义用起来方便,我們就用哪一个。

34. 例 1) 类似于第 30 段 5) 中已証明的极限关系

$$\lim a^{\frac{1}{n}}=1 \quad (a>1),$$

可以得到更一般的极限关系:

$$\lim_{x\to 0} a^x=1 \quad (a>1).$$

对于給定的 $\varepsilon>0$①,需要求出这样的 $\delta>0$,使得

只要 $|x|<\delta$,就有 $|a^x-1|<\varepsilon$.

后一不等式或者与它等价的两个不等式

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$$

是成立的,只要

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

因为

$\log_a(1-\varepsilon)+\log_a(1+\varepsilon)=\log_a(1-\varepsilon^2)<0$ 并且 $\log_a(1-\varepsilon)<-\log_a(1+\varepsilon)$,

所以只要

① 并且不妨設作 $\varepsilon<1$.

$$-\log_a(1+\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)\text{或者}|x|<\log_a(1+\varepsilon),$$

則所說的两个不等式自然成立。

因此，只要令 $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$，就可使得当 $|x|<\delta$ 时有 $|a^x-1|<\varepsilon$。这就完成了証明。

2) 求証

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (\text{当 } a>1).$$

对于任一个 $E>0$ 只要取 $\Delta=\log_a E$，便可

$$\text{由 } x>\Delta \text{ 引出 } a^x>E,$$

这就証明了我們的断言①

同样可以証明

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (\text{当 } a>1).$$

就是說，不論 $\varepsilon>0(\varepsilon<1)$ 怎样，只要取

$$\Delta=\log_a\frac{1}{\varepsilon}=-\log_a\varepsilon,$$

則当 $x<-\Delta$ 时一定有 $a^x<\varepsilon$。

如果 $0<a<1$，則利用变换

$$a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

容易建立下面的結果

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad (\text{当 } 0<a<1).$$

3) 当 $a>1$ 与 $x>0$ 时我們来建立

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0} \log_a x=-\infty.$$

对于任一給定的 $E>0$，只要 $x>a^E$ 便有 $\log_a x>E$；同样，只要 $0<x<a^{-E}$ 不等式 $\log_a x<-E$ 便成立。这就証明了上面两个关系。

4) 其次，我們有

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

我們取第一个极限为例来講述。对于任一个 $\varepsilon>0$，只要取 $x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，就有 $\operatorname{arctg} x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$，于是

① 在第 31 段中我們已有过較特殊的結果 $\lim a^n=+\infty$.

$$0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x<\varepsilon.$$

5) 現在我們要建立下面的(在以后也是重要的)結果:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{9}$$

我們需要預先証明有用的不等式:

$$当\ 0<x<\frac{\pi}{2}时\ \sin x<x<\operatorname{tg}x. \tag{10}$$

为了这个目的,我們考慮在半徑为 R 的圓中的銳角 AOB,弦 AB 以及在 A 点处圓周的切綫 AC(图 19)。于是我們有:$\triangle AOB$ 的面积<扇形 AOB 的面积<$\triangle AOC$ 的面积[①]。

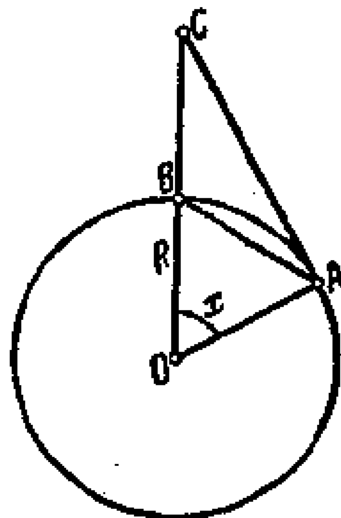


图 19.

若用 x 表示角 AOB 的弧度,因而弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长可由乘积 Rx 来表达,則这些不等式可以改写成:

$$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}R^2\cdot x<\frac{1}{2}R^2\cdot\operatorname{tg}x.$$

由此——約去 $\frac{1}{2}R^2$ ——我們就得到不等式(10).

在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 的假定下,我們用不等式(10)的各項去除 $\sin x$ 便得:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

由此得

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

但

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x.$$

[根据(10)],于是

① 这里我們利用了在中学教本內已說明过的有关初等图形的面积的知識。

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x.$$

由此推得不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|.$$

它显然在 x 改变符号时也保持有效，就是說，对于一切的 $x\neq0$，只要 $|x|<\frac{\pi}{2}$，它都是正确的。

所得的不等式就解决了我們的問題。事实上，如果任意地給定了 $\varepsilon>0$，则只要选取 ε 与 $\frac{\pi}{2}$ 两数中的最小者作为 δ：当 $|x|<\delta$ 时，首先是这个不等式成立$\left(\text{因为 }\delta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，再根据它(因为 $\delta\leqslant\varepsilon$)就有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

6) 最后，举一个函数的极限不存在的例子也是很有趣的：函数 $\sin x$ 当 x 趋向于 $+\infty$(或 $-\infty$)时根本沒有极限。

从"序列的观点"出发来証实极限的不存在点是比較容易的。只要注意到对应于两个以 $+\infty$ 为极限的 x 值的序列

$$\left\{\frac{4n-1}{2}\pi\right\}\text{与}\left\{\frac{4n+1}{2}\pi\right\}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

有着趋向于不同的极限的函数值的序列：

$$\sin\frac{4n-1}{2}\pi=-1\to-1,\quad\sin\frac{4n+1}{2}\pi=1\to1.$$

如果回忆起正弦曲綫的"振动"的特性，則在所考慮的情形下极限之不存在是很明显的。

同样，函数 $\sin\frac{1}{\alpha}$ 当 α 趋向于零时(无論是当 $\alpha>0$ 或当 $\alpha<0$)沒有极限。实質上这不过是上面所引进的例子的另一形式：只要在函数 $\sin x$ 中用 $\frac{1}{\alpha}$ 来代替 x。显然，如果 α 通过趋向于零的正值(負值)序列，則 $x=\frac{1}{\alpha}$ 趋向于 $+\infty$

$(-\infty)$，反之亦成立。

在表达式 $\sin\frac{1}{\alpha}$ 中把字母 α 仍写成字母 x（使成为慣用的横标記号）并就 x 的值从 0 到 $\frac{2}{\pi}$（与从 $-\frac{2}{\pi}$ 到 0）来考慮所得的函数的图形

$$y=\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0).$$

記出依次下降到 0 的 x 的数值：

$\frac{2}{\pi},\frac{1}{\pi},\frac{2}{3\pi},\frac{1}{2\pi},\frac{2}{5\pi},\frac{1}{3\pi},\frac{2}{7\pi},\cdots,\frac{2}{(2n-1)\pi},\frac{1}{n\pi},\frac{2}{(2n+1)\pi},\cdots$；与它們相对应，有着上升到 $+\infty$ 的 $\frac{1}{x}$ 的数值：

$$\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\frac{5\pi}{2},3\pi,\frac{7\pi}{2},\cdots,\frac{(2n-1)\pi}{2},n\pi,\frac{(2n+1)\pi}{2},\cdots.$$

在所述的（当 x 下降时）諸值之間的各个区間内我們的函数更迭地由 1 下降到 0，再由 0 下降到 -1，然后由 -1 上升到 0，再由 0 上升到 1，等等。由此可見，函数 $\sin\frac{1}{x}$ 类似于函数 $\sin x$ 有着无限多次的振动，可是后者的振动分布在无穷的区間上，而在这里 $\sin\frac{1}{x}$ 的振动则全在凝聚于 0 点的有限的区間内。

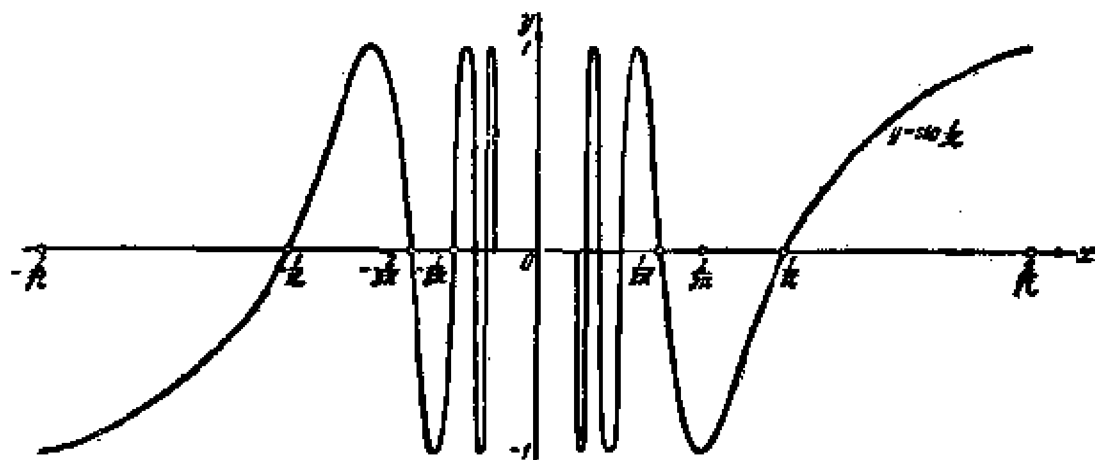


图 20.

在图 20 上画出了它的图綫（自然是不完全的——要表出无限多次的振动是不可能的！）。因为当 x 的符号改变时 $\sin\frac{1}{x}$ 的符号也改变，所以图綫的左半与右半关于原点是对称的。

7) 若就 $x\neq 0$ 来考慮函数 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$（它与剛才已研究的函数 $\sin\frac{1}{x}$ 仅差一个乘数 x），則当 $x\to 0$ 时这次却有极限存在：

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

这个事实可以明显地从不等式

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$$

看出来。

当 x 逼近于零时，我們的函数仍然有着无限多次的振动，可是它們的振幅（由于有乘数 x 的緣故）下降而趋向于零，因此极限的存在得到保証。

函数

$$y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

的图綫在图 21 中已画出，它包容在坐标角的两条分角綫 $y=x$ 与 $y=-x$ 的中間①。

附注　我們已有极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

它們具有一共同的特点：在这里所考慮的函数中无論那一个都在 $x=0$ 处沒有定义。但这并不妨碍我們說到当 $x\to 0$ 时它們的极限存在，因为根据前面所給的定义的准确意义，数值 $x=0$ 恰好这时是不必考慮的。

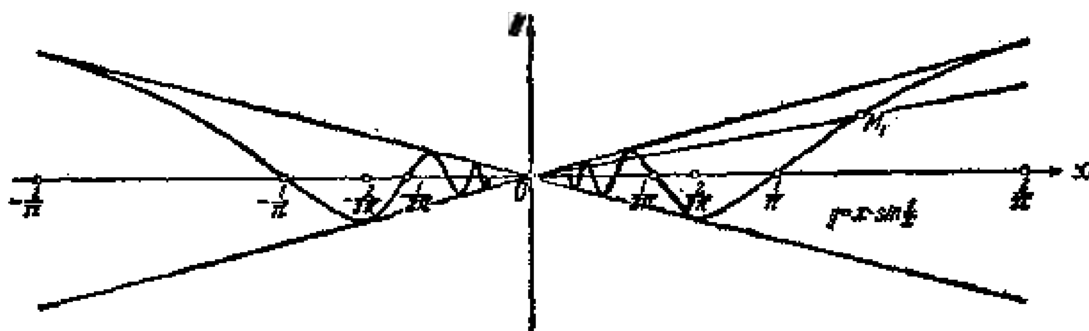


图 21.

同样，函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时沒有意义的这种情况，也不妨碍我們提出当

① 在图 20 与图 21 上，为求明晰起見，不得不在 x 軸上取較大的尺度，这就使函数的图形有了歪曲。

$x\to 0$ 时它的极限的存在問題；但这时极限并不存在。

35. 单侧极限 如果$\mathscr{X}$是这样一种区域，在 a 的右边任一近邻内可找到$\mathscr{X}$中的数值 x，则可以把第 32 段与第 33 段中所給的函数极限的定义特殊化，使之仅限于討論 $x>a$ 的数值。在这种情形下函数的极限如果存在，我們就称它为当 x 从右边趋向于 a 时（或簡称在点 a 的右边）函数 $f(x)$ 的极限，并用下面的記号表示：

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ 或 } f(a+0).$$

同样可以定义当 x 从左边趋向于 a 时（或在 a 点的左边）函数的极限概念

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ 或 } f(a-0)^{①}.$$

这两个极限都叫做是单侧的。

如果区域$\mathscr{X}$从右边与从左边都可无限制地逼近于 a，则两种极限都可以考虑。不难查明，要通常的（“双侧的”）极限 (6) 存在，必須且只須左右两极限分别地存在并且相等：

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

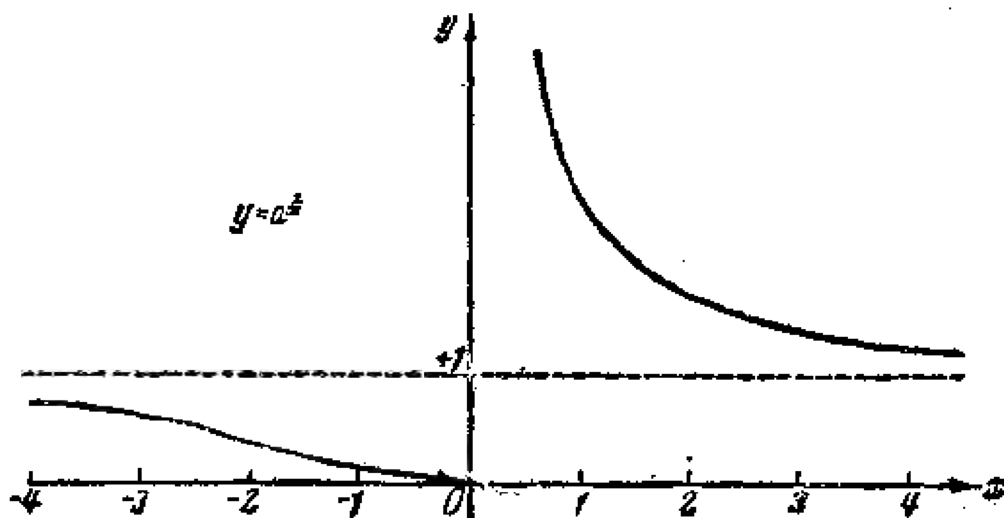


图 22.

① 如果 $a=0$，则 $0+0(0-0)$ 就簡写为 $+0(-0)$.

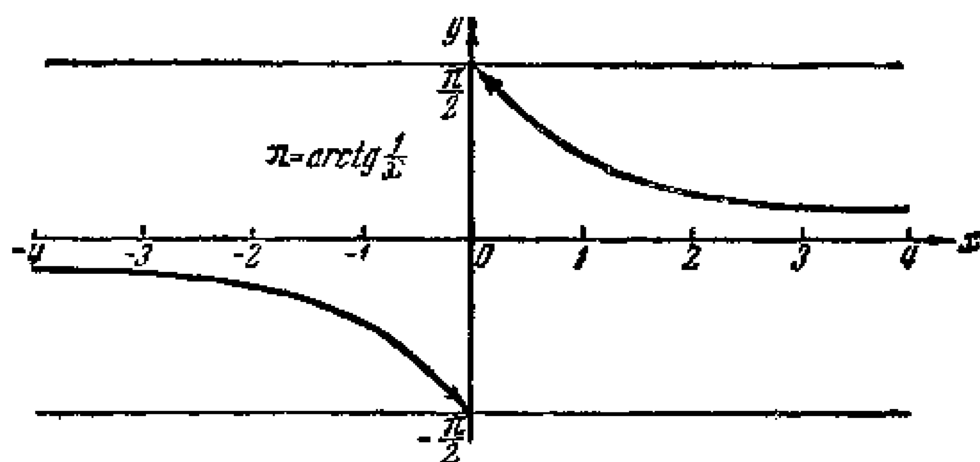


图 23.

我們要指出，这两个极限可能都存在但并不相等。从第 **34** 段中已考察过的例 1) 与例 4) 出发，不难作出这种极限的例子。

例　我們就 $x\neq 0$ 用下面的两等式来定义两个函数：

$$f_1(x)=a^{\frac{1}{x}}(a>1),\quad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

就其中第一个函数而言，我們有：

$$f_1(+0)=\lim_{x\to+0}a^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to+\infty}a^z=+\infty,$$

$$f_1(-0)=\lim_{x\to-0}a^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to-\infty}a^z=0.$$

就第二个函数而言，有：

$$f_2(+0)=\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{z\to+\infty}\operatorname{arctg}z=\frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0)=\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{z\to-\infty}\operatorname{arctg}z=-\frac{\pi}{2}.$$

这两个函数的图綫在图 22 与图 23 中已画出。

§2. 关于极限的定理

36. 具有有限的极限的自然数变元的函数的性質　因为关于自然数变元的函数的定理其叙述与証明都比在一般形式下的函数情形更为簡单，所以我們首先就这种特殊情形来叙述一些定理并

加以証明，然后只要作出一些把它們轉移到一般情形的説明。

1）若变量 x_n 趋向于极限 a，并且 $a>p(a<q)$，则变量的一切数值从某一个开始也都大于 p（小于 q）。

选取正数 $\varepsilon<a-p(q-a)$，我們有

$$a-\varepsilon>p\ \ (a+\varepsilon<q).$$

但由变量 x_n 的极限的定义［第 **28** 段］，对于这个 ε，可找到这样的 N，使得当 $n>N$ 时有

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

就这些数值言自然更有：$x_n>p\ \ (x_n<q)$.

这一简单的命题有着一系列的有用的推論。

2. 若变量 x_n 趋向于极限 $a>0(<0)$，则变量本身从某一位置开始也必 $x_n>0\ \ (<0)$.

要証明这断言，只要应用上述命題，选取 $p=0\ \ (q=0)$.

3）若变量 x_n 趋向于极限 a，并且总是

$$x_n\leqslant p\ \ (\geqslant q),$$

则也有

$$a\leqslant p\ \ (\geqslant q).$$

如若不然，则得到与命题 1）相矛盾的結果。

根据题命 1)，我們現在可証明极限的唯一性。

4）变量 x_n 不能同时趋向于两个不同的（有限的）极限。

事实上，假定命题不成立：設同时有 $x_n\to a$ 与 $x_n\to b$，并且 $a<b$。在 a 与 b 之間取任一个数 r：

$$a<r<b.$$

因为 $x_n\to a$ 并且 $a<r$，所以可求得这样的序号 N'，使得 $n>N'$ 时不等式 $x_n<r$ 成立。另一方面，由 $x_n\to b$ 并且 $b>r$，所以可求得这样的序号 N''，使得 $n>N''$ 时有 $x_n>r$。若取大于 N' 与 N'' 的序号 n，则变量 x_n 的对应值就要同时旣小于 r 而又大于 r，这是

不可能的。

这一矛盾証明了我們的断言。

5) 若变量 x_n 有有限的极限，则它是有界的，就是說，它的全部数値在两个有限的界限之間：

$$m \leqslant x_n \leqslant M \quad (n=1,2,3,\cdots), \tag{1}$$

首先，由极限的定义很明显的是，不論取怎样一个 $\varepsilon>0$，可求得这样一个 N，使得 $n>N$ 时有

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

因此，当 $n=N+1,\ N+2,\cdots$时，各个数値 x_n 已落在界限 $a-\varepsilon$ 与 $a+\varepsilon$ 之内。在这两界限之外只可能有序列的前面 N 个数値

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

中的某些数値。因为这种例外的値的个数总是有限的，所以我們可以把所說的两个界限换为彼此相隔較远的两个新界限 m 与 M，使得全部的数値 x_n 都已包含在 m 与 M 之間。例如，我們可以取

$$a-\varepsilon, x_1, x_2, \cdots, x_N$$

諸数中的最小者当作 m，而取

$$a+\varepsilon, x_1, x_2, \cdots, x_N$$

諸数中的最大者当作 M。

附注 由此可見，具有有限的极限的变量，不能同时又趋向于 $+\infty$ 或趋向于 $-\infty$。这是关于极限唯一性的定理 4) 的一个补充。

37. 推广到任意变量的函数情形。 不难把第 35 段中的内容轉述到定义于具有聚点 a[①] 的某一个区域 $\mathscr{X}$ 中的函数 $f(x)$ 的一般情形。

1) 若当 x 趋向于 a 时函数 $f(x)$ 趋向于有限的极限 A，并且 $A>p\ (A<q)$，则对于充分接近于 a 的（但异于 a 的）x 的数値，函

① 数 a 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$；但为了确定起見我們只講 a 是有限的这一情形。

数本身也满足不等式

$$f(x)>p \qquad (f(x)<q). \tag{2}$$

擇取正数 $\varepsilon<A-p(q-A)$，我們有

$$A-\varepsilon>p \qquad (A+\varepsilon<q).$$

但按函数的极限的第二个定义[第 33 段]，对于这个 ε 可找得这样的 δ，只要 $|x-a|<\delta$（其中 x 取自 $\mathscr{X}$ 并且异于 a），就有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

对于这些 x 值不等式(2)自然也成立。

讀者可看出，在証明时并不需要引进任何新的观念。

由此可以直接地証实与第 36 段中的 2)、3)、4) 类似的断言。例如，在 1) 中令 $p=0$ ($q=0$)，我們得到：

2) 若当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 有有限的正的（負的）极限，则至少对于充分接近于 a 但异于 a 的 x 的数值，函数本身也是正的（負的）。

类似于 5) 的断言也是正确的，但表現为較弱的形式：

3) 若当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 有有限的极限 A，则对于充分接近于 a 的 x 的数值，函数是有界的，就是說，它的数值包含在两个有限的界限之間：

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \quad \text{只要 } 0<|x-a|<\delta.$$

事实上，由极限的定义，給定了 $\varepsilon>0$，可找到这样的 $\delta>0$，使得

$$\text{当 } 0<|x-a|<\delta \text{ 时 有 } A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

回忆到我們起初就变量 x_n 已得到的类似的結果：

$$\text{当 } n>N \text{ 时不等式 } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \text{ 成立。}$$

可是在起初的情形下只能有有限多个 x_n 的数值在这两个界限 $a-\varepsilon$ 与 $a+\varepsilon$ 之外，并且不难求得两个新的界限以使 x_n 的全部数值无例外地都包含在新的两界限之間。在这里一般說来，不能有同

样的情形，因为使 $|x-a|\geqslant\delta$ 的 x 的数值可以是无穷集。例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（当 $x>0$），当 $x\to1$ 时趋向于 1；显然，只要 $|x-1|<\frac{1}{2}$ 就有 $0<f(x)<2$；可是对于所考虑的 x 的一切数值函数 $f(x)$ 决不能是有界的：当 $x\to+0$ 时 $f(x)$ 趋向于 $+\infty$。

38. 在等式与不等式中取极限 凡說到用等式或不等式把两个变量 x_n 与 y_n 結合起来，我們所指的总是它們的对应的数值，也就是指具有同样的序号的数值。

1）若两个变量 x_n，y_n 在它們的一切变化下是相等的：$x_n=y_n$，并且每个变量都有有限的极限：

$$\lim x_n=a,\qquad \lim y_n=b,$$

则此两极限也相等：$a=b$

这可从极限的唯一性［第 36 段，4）］直接推知。

这个定理通常写成在等式中取极限的形式：由 $x_n=y_n$ 得出結論：$\lim x_n=\lim y_n$.

2）若对于两个变量 x_n, y_n 不等式 $x_n\geqslant y_n$ 常成立，并且每个变量都有有限的极限：

$$\lim x_n=a,\qquad \lim y_n=b,$$

则也有 $a\geqslant b$.

假定不是如此：設 $a<b$。象在第 36 段，4）中一样来討論，我們在 a 与 b 之間取数 r 使 $a<r<b$。于是一方面可求得这样的序号 N'，使得当 $n<N'$ 时有 $x_n<r$，另一方面又可求得这样的序号 N''，使得当 $n>N''$ 时有 $y_n>r$。若 N 大于 N' 与 N'' 两数，则对于各序号 $n>N$ 下二不等式同时成立

$$x_n<r,\quad y_n>r,\quad 因而\ x_n<y_n,$$

这与假設相矛盾。定理就已証明。

这个定理建立了在不等式（連带有等号的）中取极限的規則：

由 $x_n \geqslant y_n$ 可以肯定 $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

当然，各处的 $>$ 号都可换成 $<$ 号。

望讀者注意，从严格的不等式 $x_n > y_n$，一般說来，不能推得严格的不等式 $\lim x_n > \lim y_n$，而只能推得：$\lim x_n \geqslant \lim y_n$。例如，对于一切的 n 有 $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$，但是

$$\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

从定理 2) 可得到第 **36** 段中的断言 3) 作为一特例。

在确定极限的存在与极限的大小时，下面的定理往往是有用的：

3) 若对于变量 x_n, y_n, z_n 不等式

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

常成立，并且变量 x_n 与 z_n 趋向于公共的极限 a：

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

則变量 y_n 也有同样的极限：

$$\lim y_n = a.$$

給定任一个 $\varepsilon > 0$. 对于这个 ε，首先可求得这样的序号 N'，使得当 $n > N'$ 时有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

其次又可求得这样序号 N''，使得当 $n > N''$ 时有

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

設 N 大于 N' 与 N'' 两数；于是当 $n > N$ 时，前面两个二重不等式都成立，因而有

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

最后，当 $n > N$ 时有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ 或者 } |y_n - a| < \varepsilon.$$

由此可見，确实有 $\lim y_n = a$.

从这个定理，特别可推得：若对于一切的 n 有

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

并且已知 $z_n \to a$，则也有 $y_n \to a$。要直接証明这个事实也是容易的。

定理 1)、2) 与 3) 不难推广到无穷极限的情形。

39. 关于无穷小量的預备定理 在以后各个定理中我們需要同时考察两个(或更多个)变量，并且要对它們作算术运算。这时和前面一样，我們所指的是对这些变量的对应数值作这些运算。例如，說到两个变量 x_n 与 y_n 的和时，如果它們分别地取下面两序列的数值

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

及

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots,$$

我們就有变量 $x_n + y_n$，它依次取下面一序列的数值：

$$x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \cdots, x_n+y_n, \cdots。$$

在証明关于变量的算术运算的定理时，下面两个关于无穷小量的預备定理是有用的：

預备定理 1. 任何有限多个无穷小量的和也是一个无穷小量。

我們只就两个无穷小量 α_n 与 β_n 的情形来进行証明（一般的情形可以同样地討論）。

給定任意的数 $\varepsilon > 0$。根据无穷小量的定义，对于数 $\frac{\varepsilon}{2}$，就无穷小量 α_n 言可求得这样的序号 N'，使得当 $n > N'$ 时有

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同样就无穷小量 β_n 言也可求得这样的序号 N''，使得当 $n > N''$ 时有

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若取大于 N' 与 N'' 两数的自然数 N，則当 $n > N$ 时这两个不等式同时成立，可見

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

于是 $\alpha_n+\beta_n$ 确实是无穷小量。

預备定理 2. 有界变量 x_n 与无穷小量 α_n 的乘积是无穷小量。

設对于一切的值 n 有

$$m\leqslant x_n\leqslant M.$$

用 L 表示絕对值 $|m|$、$|M|$ 中較大者，我們有

$$-L\leqslant x_n\leqslant L \quad 或者 \quad |x_n|\leqslant L.$$

若給定任意的 $\varepsilon>0$，則对于数 $\frac{\varepsilon}{L}$，就无穷小量 α_n 言可求得这样的序号 N，使得当 $n>N$ 时有

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{L}.$$

于是对于这些数值 n 显然有

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon.$$

由此可見，$x_n\cdot\alpha_n$ 是无穷小量。

40. 变量的算术运算 下面几个定理是很重要的，因为在許多情形中利用这些定理就不必每次都追究到极限概念的定义——按照給定的 ε 去求对应的 N，等等。利用这些定理，可大大地簡化极限的計算。

1) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限:

$$\lim x_n=a, \qquad \lim y_n=b,$$

則它們的和(差)也有有限的极限，并且

$$\lim(x_n\pm y_n)=a\pm b.$$

由定理中的条件推得

$$x_n=a+\alpha_n, \qquad y_n=b+\beta_n, \tag{3}$$

其中 α_n 与 β_n 是无穷小量，于是

$$x_n\pm y_n=(a\pm b)+(\alpha_n\pm\beta_n).$$

在这里 $\alpha_n\pm\beta_n$ 由第 **39** 段中的預备定理 1 是无穷小量；因此，

可以肯定变量 $x_n \pm y_n$ 有极限等于 $a \pm b$，这就是所要証明的。

这个定理以及它的証明可以推广到任何有限多个項的情形。

2) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限：

$$\lim x_n = a, \qquad \lim y_n = b,$$

則它們的乘积也有有限的极限，并且

$$\lim x_n y_n = ab.$$

从同样的等式(3)出发，我們这时有

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n - \alpha_n \beta_n).$$

由預备定理 1 与 2，在括弧內的表达式是无穷小量。由此可見，变量 $x_n y_n$ 实际上有极限 ab。

这个定理可以推广到任何有限多个因子的情形(例如，应用数学归納法卽可)。

3) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限：

$$\lim x_n = a, \qquad \lim y_n = b,$$

并且 b 异于零，則它們的比也有有限的极限，就是說，

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

譬如說，$b>0$；在零与 b 的中間插入一数 r。于是由第 **36** 段中的断言 1)，从某一项起有

$$y_n > r > 0,$$

因此无論如何 $y_n \neq 0$。限定取使这不等式成立的序数 n 的那些数值；于是比 $\frac{x_n}{y_n}$ 显然有意义。

仍由等式(3)出发，我們有

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

根据預备定理 1 与 2，在括弧內的表达式是无穷小量，而它的乘数根据开始所述是有界变量：

$$0<\frac{1}{by_n}<\frac{1}{br}.$$

因此，由預备定理 2，等式右端的乘积是无穷小量，但它表示变量$\frac{x_n}{y_n}$与数$\frac{a}{b}$的差。于是$\frac{x_n}{y_n}$的极限是$\frac{a}{b}$，这就是所要証明的。

41. 未定式 在前段中我們已考察过表达式

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{4}$$

并且在变量 x_n 与 y_n 趋向于有限的极限的假設下（在两变量的商的情形，y_n 的极限应該不等于零），确定了每个表达式的极限。

剩下来尚未考察的，是当变量 x_n 与 y_n（其中一个或两者）的极限为无穷大时或者（若論及两变量的商）当分母的极限为零时的情形。在这些情形中，我們此时只講述四种重要的而且有趣的特异性。

1° 首先考察商$\frac{x_n}{y_n}$并假設两变量 x_n 与 y_n 同时趋向于零。在这里我們头一次遇到十分特殊的情况：虽然我們已知 x_n 与 y_n 的极限，可是关于它們之比的限极——在不知道这两个 n 的函数的本身时——我們不能作出任何一般的断言。这个极限，依賴于这两变量变化的特殊規律，可以有各种不同的数值，或甚至不存在。下面的一些簡单的例子可以說明这一点。

設 $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$；这两个变量都趋向于零。它們的比$\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}$也趋向于零。如果反过来令 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$，則虽然它們都趋向于零，但这次它們的比$\frac{x_n}{y_n}=n$却趋向于$+\infty$！取任何不同于零的数 a 并作出两个无穷小量 $x_n=\frac{a}{n}$ 与 $y_n=\frac{1}{n}$，我們看出，它們之比以 a 为极限（因为比值恒等于 a）。

最后，若 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，$y_n=\frac{1}{n}$（两者都以零为极限），则比 $\frac{x_n}{y_n}=(-1)^{n+1}$ 根本沒有极限。

由此可見，只知道变量 x_n 与 y_n 的极限，在目前情况下还不能判断它們之比的性态：必須知道两个函数本身，即它們与 n 一起的变化規律，并且要直接研究比 $\frac{x_n}{y_n}$。为了要表征出当 $x_n\to0$ 与 $y_n\to0$ 时这一特异性，我們說式子 $\frac{x_n}{y_n}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式。

2° 在同时有 $x_n\to\pm\infty$ 与 $y_n\to\pm\infty$ 的情形下，也有类似的情况，不知道两函数本身，决不能作出关于它們之比的性态的一般断言。这个事实可用完全类似于 1° 所引进的例子来說明：

$$x_n=n\to\infty,\quad y_n=n^2\to\infty,\ \frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}\to0;$$

$$x_n=n^2\to\infty,\ y_n=n\to\infty,\ \frac{x_n}{y_n}=n\to\infty;$$

$$x_n=an\to\pm\infty(a\gtreqless0),\quad y_n=n\to\infty,\quad \frac{x_n}{y_n}=a\to a;$$

$x_n=[2+(-1)^{n+1}]n\to\infty$，$y_n=n\to\infty$，$\frac{x_n}{y_n}=2+(-1)^{n+1}$ 根本沒有极限。

在这情形下我們說，式子 $\frac{x_n}{y_n}$ 这时表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式。

轉过来考察乘积 x_ny_n。

3° 若 x_n 趋向于零，同时 y_n 趋向于 $\pm\infty$，則研究乘积 x_ny_n 的性态时，我們又遇到象在 1° 与 2° 中同样的特异性。关于这点可由下面的几个例子来說明：

$$x_n=\frac{1}{n^2}\to0,\quad y_n=n\to\infty,\quad x_ny_n=\frac{1}{n}\to0;$$

$$x_n=\frac{1}{n}\to0,\quad y_n=n^2\to\infty,\quad x_ny_n=n\to\infty;$$

$$x_n=\frac{a}{n}\to0(a\gtreqless0),\quad y_n=n\to\infty,\quad x_ny_n=a\to a;$$

$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\to 0,\ y_n=n\to\infty,\ x_ny_n=(-1)^{n+1}$根本沒有极限。

在 $x_n\to 0$ 与 $y_n\to\infty$ 这情形下，我們說，式子 x_ny_n 表示 $0\cdot\infty$ 型的未定式。

最后，我們来考察和 x_n+y_n。

4° 在这里也出現特殊的情形，即当 x_n 与 y_n 趋向于异号的无穷大时的情形：在这情形下，如不知道函数 x_n 与 y_n 的本身，就不能談到 x_n+y_n 的任何确定的极限。在这里所表現的各种不同的可能性可用下面的一些例子来說明：

$$x_n=2n\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\quad x_n+y_n=n\to+\infty;$$

$$x_n=n\to+\infty,\quad y_n=-2n\to-\infty,\quad x_n+y_n=-n\to-\infty;$$

$$x_n=n+a\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\quad x_n+y_n=a\to a;$$

$$x_n=n+(-1)^{n+1}\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\ x_n+y_n=$$
$$=(-1)^{n+1}\text{ 根本沒有极限。}$$

因此，当 $x_n\to+\infty$ 与 $y_n\to-\infty$ 时，我們說式子 x_n+y_n 表示 $\infty-\infty$ 型的未定式。

由此可見，要由变量 x_n 与 y_n 的极限来确定由它們組成的算术式 (4) 的极限幷非永远可能的。我們发現了四种显明不可能的情形，那就是型为

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty$$

的未定式①。在这些情形下，必須考慮到 x_n 与 y_n 的变化規律，必須直接地研究我們所关心的式子。类似的研究法叫做未定式的定值法。这种定值法幷不永远象在上面所举的簡单例子中那样簡

① 当然，这些記号是毫无数字的意义的。其中各記号只是这四种类型未定式的簡短而有条件的特征表达式而已。

单。

42. 推广到任意变量的函数情形 我們再作出关于一般情形的說明。因为在这里我們所指的是这样一些定理，其中的变量是用等式或算术运算等符号来联系的，所以我們首先应該說明，把两个或几个（在同一个区域$\mathscr{X}$中所定义的）函数 $f(x)$，$g(x)$，…用这种符号結合起来，我們总是把它們的数值理解为对应于同一个 x 的数值。

所有这些定理都可以用类似于第 **37** 段中所使用的方法重新来証明，但——也应郑重指出——实际上沒有必要去重复証明它們。如果从“序列的观点”出发来談函数的极限，那末，这些定理既然对于依賴于附标数 n 的变量已被証明，它們也就对于一般情形下的函数是正确的。

我們限于第 **40** 段中的定理 1)、2)、3) 作为例子。

設在区域$\mathscr{X}$（具有聚点 a）中給定了两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，并且当 x 趋向于 a 时两函数都有有限的极限

$$\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B.$$

于是函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5}$$

也有有限的极限（在两函数之商的情形下并假定 $B\neq 0$），那就是

$$A\pm B,\ A\cdot B,\ \frac{A}{B}.$$

用“序列的語言”可把所給关系解釋为：若 $\{x_n\}$ 是任一个从$\mathscr{X}$内所取出的（各异于 a 的）x 的数值的序列并且有极限 a，則

$$f(x_n)\to A,\quad g(x_n)\to B.$$

如果已經証明的定理应用到这两个已以自然数 n 为变元的函数，則立即得到：

$$\lim[f(x_n)\pm g(x_n)]=A\pm B,\quad \lim f(x_n)\cdot g(x_n)=A\cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B},$$

而这(用“序列的語言”)也正表达着所需要証明的定理①。

由此可見，在第 **41** 段中所說的有关于由有条件的記号

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty$$

所表征的“未定式”的事情，可以轉移到我們現在所考慮的一般情形。象在与自然数变元的函数有关系的最簡单的情形中一样，在这里要“确定未定式的值”，仅知道函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限是不够的，还必須考慮到它們的变化規律。讀者在下一段中可找到确定未定式的值的一些例子。

在第七章的 §3 中我們还要回头来講述这个問題，在那里将給出应用微分学来确定未定式的值的一般方法。

43. 例 1) 設 $p(x)$ 是具有常数系数的 x 的整多項式：

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k \quad (a_0\neq 0).$$

我們提出当 $x\to+\infty$ 时它的极限問題。如果这个多項式所有的系数都是正的(負的)，則很明显的，$p(x)$的极限是 $+\infty(-\infty)$。但在它的系数具有不同的符号的情形下，就有一些項趋向于 $+\infty$，另一些趋向于 $-\infty$，于是有 $\infty-\infty$ 型的未定式。

为要确定这未定式的值，我們把 $p(x)$表成下形：

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right).$$

因为括弧內所有各項从第二項起当 x 无限上升时都是无穷小量，所以在括弧內的表达式具有极限 $a_0\neq 0$；第一个因子也趋向于 $+\infty$。在这情形下整个表达式趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$，依 a_0 的符号为正或为負来决定。

特別情形，如果以自然数 n 来替代連續变化的变量 x，也得到同样的結果。

---

① 在商的情形下可注意到，[类似于在第 **40** 段 3)中我們就 y_n 所做过的那样]，对于充分接近于 a 的 x 的数值分母 $g(x)\neq 0$，因而分数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 至少对于这些 x 的数值有意义。

請讀者去确定当 $x \to -\infty$ 时的 $\lim p(x)$（这回要考虑到指数 k 是偶数或是奇数）。在一切情形下多项式 $p(x)$ 的极限与它的首项 $a_0 x^k$ 的极限相同。

用已知表达式的变形法来消灭"未定性"是常常应用于确定未定式的一种方法，我們在这里也已利用了它。

2) 若 $q(x)$ 也是这样的一个多项式

$$q(x) = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_{l-1} x + b_l \quad (b_0 \neq 0),$$

则商 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 当 $x \to +\infty$ 时表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式。

把其中每一个多项式象在例 1 中一样变形，我們得到：

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^{k-l} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_l}{x^l}}.$$

第二个因子这时有有限的极限 $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$。如果两多项式的次数相等：$k = l$，则比 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 也有这同样的极限。当 $k > l$ 时，第一个因子当 $x \to +\infty$ 时也趋向于 $+\infty$，因而所考虑的比趋向于 $\pm\infty$（依 $\frac{a_0}{b_0}$ 的符号来决定）。最后，当 $k < l$ 时极限为零。在这里 x 也可以用自然数 n 来代替。

不难确定 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限。在一切情况下两多项式之比的极限与它們的首项之比的极限相同。

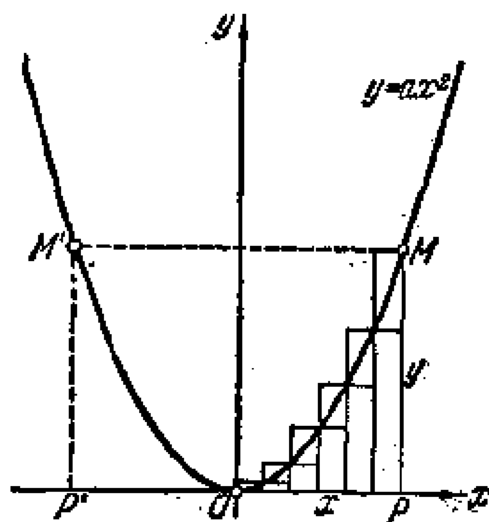


图 24.

3) 試求由抛物綫 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上的部分 OM，x 轴上的綫段 OP 以及綫段 PM（图 24）所作成的图形 OPM 的面积 Q。

把綫段 OP 分成 n 等分，并在各个等分上作抛物綫的內接与外接矩形，由这些楼梯形作成的面积 Q_n 与 Q'_n 之差是一个矩形的面积 $\frac{x}{n} \cdot y$。因此差数 $Q'_n - Q_n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），并且由于

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

所以显然有

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

因为各个单独的矩形的高是抛物綫上具有横标

$$\frac{1}{n}x, \frac{2}{n}x \cdots, \frac{n}{n}x = x$$

的各点的縱标，并且——由曲綫的方程——它們的大小分別地等于

$$a \cdot \frac{1}{n^2}x^2, a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2 \cdots, a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

所以我們得到 Q'_n 的表达式①

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \cdot \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

因此，如果利用例题 2)，便知

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

根据这个結果，不难知道抛物綫弓形 $M'OM$ 的面积等于 $\frac{4}{3}xy$，也就是等于它的外接矩形的面积的三分之二(这个結果早已为阿几米德所知道)②。

附注 曲綫形面积的一般定义只好在第十二章中去講；这里所应用的面积的計算法将在那里推广，使适用于其他的曲綫图形[第 **196** 段]。

4) 試求两变量

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

的极限，再求变量

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

的极限。

变量 x_n 与 z_n 表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式(因为两者的根式都大于 n，所以它們都趋于无穷大)。用 n 除分子与分母把它們变形:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

因为在两式的分母中根式都以 1 为极限③，所以 $x_n \to 1$，$z_n \to 1$。

---

① 在这里我們利用了为首的 n 个自然数的各个平方之和的著名公式。

② 阿几米德是古代(紀元前三世紀)最偉大的一个数学家。

③ 例如，就第一个根式言，这可由不等式 $1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$ 推得[第 **38** 段，3)]。

至于 y_n 的表达式，則具有特有的形状：这个和的每一項都依賴于 n，而且其項數也随着 n 而增加。因为每一項都小于首項而大于末項，所以

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<y_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad 即\ x_n<y_n<z_n.$$

但(根据已求得的結果)变量 x_n 和 z_n 趋向于共同的极限 1，所以，由第 88 段中定理 3)，变量 y_n 也趋向于这同一个极限。

5) 回轉来講第 18 段，3° 中已考察过的函数 $f(x)$，它是由三个不同的公式(对于不同的 x)所定义的，現在对于一切的 x 同时可令：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

若 $|x|>1$，則在这里我們有 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，用 x^{2n} 来除分子分母立可化去它的未定性；我們得到：$f(x)=1$. 当 $|x|<1$ 时，显然 $x^{2n}\to0$ 与 $f(x)=-1$. 最后，若 $x=\pm1$，則分数的分子常等于零，因而 $f(x)=0$. 絲毫不差地这是那同一个函数，可是这次它是由一个公式給出。

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$.

实际上，

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1};$$

但
$$1-|x|<\sqrt{1+x}<1+|x|,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\sqrt{1+x}=1,$$

由此得到所要求的結果。

7) 极限[第 34 段，5)]

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

常被用来求其他的极限。

(a)
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

显然，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2;$$

因为括弧内的式子趋向于 1，所以总的极限就是$\frac{1}{2}$.

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

在这里变形方法引到已研究过的各极限:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

我們注意到，当 $x\to 0$ 时 $\cos x\to 1$，就可由前一結果(a)推出这里的結果。

§ 3. 单調函数

44. 自然数变元的单調函数的极限 关于函数的极限的存在定理（到現在止已为我們所引出过的）有着这样的特点：先假定了某些函数的极限存在，然后来証明另一些与前者这样或那样地联系着的函数的极限也存在。当所給的函数与其他的函数无关时，却尙未提出关于判断有限的极限的存在問題。这个問題的一般形式的解答留待 §5 中去講，我們在这里只考虑一种簡单而重要的特殊的函数类，就这类函数言极限的問題很容易解决，并且象平常一样我們从最簡单的情形——自然数变元的函数 x_n——开始。

变量 x_n 叫作是*上升的*，如果

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots,$$

也就是説，如果从 $n'>n$ 可推得 $x_{n'}>x_n$。若

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

也就是説，若由 $n'>n$ 只推得 $x_{n'}\geqslant x_n$，則变量 x_n 叫作是*不下降*的。在后一情形下也可以称变量是*上升的*，只要对上升一語給以更广泛的意义。

同样可以建立*下降的*——在狭义或广义下——n 的函数的概念：变量 x_n 叫作是*下降的*，只要对于它对应地有：

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots$$

或

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

因而从 $n'>n$ 推得(看情形决定) $x_{n'}<x_n$ 或只是 $x_{n'} \leqslant x_n$。

所有这种当 n 上升时向一个方向改变的变量，总称为单調变量。关于这个类型的变量，我們通常說它"单調上升"或者"单調下降"。

同时，不但是依赖于自然数附标的变量 x_n 称为上升或下降的，而且这个变量的值的序列在对应的情形下也叫作是上升序列或下降序列：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

关于单調变量有着下面的定理。

定理 設已給单調上升的变量 x_n。如果它上有界：

$$x_n \leqslant M \quad (M = \text{常数}; n = 1, 2, 3, \cdots),$$

則它必有有限的极限；在相反的情形下，它趋向于 $+\infty$。

完全同样，单調下降的变量 x_n 也常有极限。如果它下有界，則它的极限是有限的；在相反的情形下，它的极限是 $-\infty$[①]

証明 我們只講述变量 x_n 上升的情形，卽使是广义上升的也行(下降变量的情形同样地可証明)。

首先假定这变量上有界。于是由第 6 段的定理，对于它的数值的集 $\{x_n\}$ 必存在有(有限的)上确界：

$$a = \sup\{x_n\};$$

我們要証明这个数 a 就是变量 x_n 的极限。

实际上，回忆一下[第 6 段]上确界的特性，我們知道：第一，对于 n 的一切数值有

$$x_n \leqslant a;$$

---

① 不难了解，全部的結論对于那种从某一位置开始才变成单調的变量也保持有效(因为拋弃任何多个起头的数值，对于变量的极限并无影响)。

在定理的本文中，可以不說单調变量 x_n，而改說单調序列。

第二，不論取怎样的数 $\varepsilon>0$，总可求得变量的这样一个数值，譬如說 x_N，使得 x_N 超过 $a-\varepsilon$:

$$x_N>a-\varepsilon.$$

因为，由变量 x_n 的单調性(在这里我們首次用到它)，当 $n>N$ 时有 $x_n\geqslant x_N$，因而更加有 $x_n>a-\varepsilon$，所以对于序号 n 的这些数值下不等式成立:

$$0\leqslant a-x_n<\varepsilon,\quad 因而\ |x_n-a|<\varepsilon,$$

由此推得，$\lim x_n=a$。

現在設变量 x_n 不是上有界。于是不論 $E>0$ 是怎样大的数，仍可求得变量的一个数值大于 E; 設这数值是 x_N:$x_N>E$。由变量 x_n 的单調性当 $n>N$ 时更加有

$$x_n>E,$$

而这就是說，$\lim x_n=+\infty$.

附注　有界单調变量具有有限的極限这个事实，在上一世紀的前半期认为是不言而喻的。要求这一具有基本重要性的論断得到严格的证明，实际上也是建立无理数的算术理論的一个原因。再补充說一句，上述的論断与实数集合的連續性质[第 5 段]完全是等价的。

我們来讲定理应用的例題。

45. 例　1)考慮表达式(算作 $c>0$)

$$x_n=\frac{c^n}{n!},$$

其中 $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$(它在 $c>1$ 时表示$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式)。

因为

$$x_{n+1}=\frac{c}{n+1}x_n,$$

所以只在 $n>c-1$ 时变量才变成下降的; 同时它是下有界的，例如 $x_n>0$，因此，变量 x_n——按照定理——有有限的极限，用 a 来表示它。

为了要求出 a，我們在上面的等式中取极限; 因为 x_{n+1} 与 x_n 取同样的一序列数值(除了第一項以外)，并且有同一个极限 a，所以我們得到

$$a=a\cdot0,$$

由此得$a=0$，最后有

$$\lim\frac{c^n}{n!}=0.$$

2) 再設 $c>0$，我們現在定义 x_n 为：

$$x_1=\sqrt{c},\quad x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}},\quad x_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\cdots$$

一般地說

$$x_n=\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n\text{ 个根式}}.$$

于是依公式

$$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$$

由 x_n 可求得 x_{n+1}。

显然，变量 x_n 单調上升。同时它是上有界的，例如各个 $x_n<\sqrt{c}+1$. 实际上，$x_1=\sqrt{c}$ 小于这个数；如果現在假定任何的值数 $x_n<\sqrt{c}+1$，則对于它后面的数值也得到

$$x_{n+1}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1.$$

因此，由数学归納法我們的論断得到証实。

根据基本定理变量 x_n 有某一个有限的极限 a. 为要确定它，我們在等式

$$x_{n+1}^2=c+x_n$$

中取极限；于是知道 a 满足二次方程

$$a^2=c+a.$$

这个方程有异号的两个根；但我們所要的极限 a 不能是負的，所以，a 就等于其正根：

$$a=\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}\text{ ①}.$$

上面两个例題引出了下面的附注：已經証明的那个定理是典型的“存在定理”：在这定理中只建立了极限存在的事实，但沒有給出任何計算极限的方法。虽然如此，但它有着非常重要的意义。因

① 这个有趣的例題实际上是雅谷・伯努利的，他考察过形如

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots}}}\text{ 以至无穷}$$

的表达式。

为一方面，在理論問題中往往只是极限的存在性是需要的。另一方面，在許多情形中預先証明极限存在的可能是很重要的，它开辟了实际計算这极限的途徑。象在所举的例題中，就是先知道了极限存在的事实，才許可在某些等式中用极限步驟来确定极限的确实数值。

46. 关于区間套的預备定理 我們現在来講两个“相向”变化着的单調变量。

設已給单調上升的变量 x_n 与单調下降的变量 y_n，并且总有

$$x_n < y_n. \tag{1}$$

若它們的差 $y_n - x_n$ 趋向于零，则两变量具有公共的有限的极限：

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

实际上，对于 n 的一切数值有 $y_n \leqslant y_1$，因而由 (1) 式又有 $x_n < y_1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$。上升的变量 x_n 是上有界的，因此它有有限的极限

$$c = \lim x_n.$$

同样，对于下降的变量 y_n 来說有

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

因而它也趋向于有限的极限

$$c' = \lim y_n.$$

但由第 40 段中的定理 1)，两极限的差

$$c' - c = \lim (y_n - x_n),$$

即按条件它应等于零，因而有 $c' = c$；这就是所要証明的。

对于这个已証明的断言可給以另一种常被应用的形式。

我們約定說，区間 $[a', b']$ 包含在区間 $[a, b]$ 之內或者套在其內，只要第一个区間的全部点属于第二个区間，或者說，只要

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b$$

也是一样。它的几何意义是很明显的。

设有一个套着一个的区間的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots,$$

后面的每一个总包含在其前面的一个之内①，并且当 n 上升时这些区間的长度趋向于零:

$$\lim(b_n - a_n) = 0.$$

于是区間的端点 a_n 与 b_n(从不同的两边)趋向于公共的极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

这只是前面已証明的定理的另一种說法: 根据条件，有

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

所以第 n 个区間的左端 a_n 与右端 b_n 在这里起着单調变量 x_n 与 y_n 的作用。

以后我們时常要用到这个命題，就称它为"关于区間套的預备定理"。

47. 在一般情形下单調函数的极限 我們現在重新来考虑任意变量的函数 $f(x)$。在这里关于函数的极限

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

的存在問題，对于由单調变量 x_n [第 44 段] 这概念推广来的特殊类型的函数，可特别簡单地来解决。

設函数 $f(x)$ 是在某一区域 $\mathscr{X} = \{x\}$ 内所定义的。若对于这区域内任意一对数値 x 与 x',

$$\text{从 } x' > x \text{ 可推得 } f(x') > f(x) \ [f(x') < f(x)],$$

则 $f(x)$ 叫做在这区域内的上升(下降)函数。

如果

$$\text{从 } x' > x \text{ 只推得 } f(x') \geqslant f(x) \ [f(x') \leqslant f(x)],$$

则函数 $f(x)$ 叫做是不下降的(不上升的)。在这情形下有时也称

---

① 以后我們簡称这种序列为区間套——譯者注。

函数是广义上升的(下降的)較为便利。

所有这种类型的函数总称为单調函数。对于单調函数有着完全类似于第 44 段中所建立的关于依賴于 n 的单調变量 x_n 的定理。

定理 設函数 $f(x)$ 在区域 $\mathscr{X}$ 内是单調上升的，卽使是广义上升的也行，区域 $\mathscr{X}$ 有比 x 的一切数值大的数 a 为其一聚点(a 可以是有限的或等于 $+\infty$)。若这时函数是上有界的:

$$f(x)\leqslant M \text{ (对于}\mathscr{X}\text{内的一切 } x),$$

則当 $x\to a$ 时函数有有限的极限；在相反的情形下它趋向于 $+\infty$。

証明 先假定函数 $f(x)$ 是上有界的，卽当 x 在区域 $\mathscr{X}$ 内变化时函数的对应值的集合 $\{f(x)\}$ 是上有界的。于是这一集合有着有限的上确界 A [第 6 段]。我們来証明这个数 A 就是所求的极限。

首先，对于 x 的一切数值有

$$f(x)\leqslant A.$$

其次，給定任意一数 $\varepsilon>0$，由上确界的性質可求得这样的数值 $x'<a$，使得 $f(x')>A-\varepsilon$。由函数的单調性，当 $x>x'$ 时就更加有: $f(x)>A-\varepsilon$，因而对于上述的 x 的一切数值成立着不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就証明了我們的断言，只要当 a 是有限的数时取 $\delta=a-x'$ (因而不等式 $x>x'$ 可写成 $x>a-\delta$)，而当 $a=+\infty$ 时取 $\Delta=x'$。

若函数 $f(x)$ 不是上有界的，則不論 E 是怎样的数，可求得这样的 x'，使得 $f(x')>E$；于是对于 $x>x'$ 时，更有 $f(x)>E$，等等。

当极限值 a 小于 x 的一切数值时的情形以及对于单調下降的函数的情形，讓讀者去敍述这个定理。

显然，第 44 段中关于单調变量 x_n 的定理是这一定理的特殊情形。在这里标数 n 是自变量，而具有聚点 $+\infty$ 的自然数序列 $\mathscr{N}=\{n\}$ 就是它的变域。

以后我們时常会遇到作为函数 $f(x)$ 的定义域的区域$\mathscr{X}$是整个的区間$[a', a)$，其中 $a'<a$ 并且 a 是有限的数或$+\infty$，或者是区間$(a, a']$，其中 $a'>a$ 并且 a 是有限的数或$-\infty$。

§4. 数 e

48. 数 e 看作序列的极限 我們在这里要利用极限的步驟来定义一个新的直到現在止尚未遇見过的数，这一个数不論对于分析学本身或者对于它的应用来說，都是非常重要的。

考慮变量

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

并設法应用第 **44** 段中的定理来确定它的极限。

因为在这里当指数n上升时冪的底数下降，所以变量的“单調”性質不能直接看出来。为要証实它的单調性，我們根据二项式定理将它展开：

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\;\cdots\;\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{1}$$

如果現在把 x_n 改为 x_{n+1}，也就是把 n 加上 1，则首先增加了新的第$(n+2)$ 項（正的），已写出的 $n+1$ 項中的每个項也都增大

了，因为在括弧內任一个 $1-\frac{s}{n}$ 型的因子都为更大的因子 $1-\frac{s}{n+1}$ 所代替。由此可見

$$x_{n+1}>x_n,$$

即变量 x_n 是上升的。

現在来证明它又是上有界的。在 (1) 式中去掉一切括弧內的因子，这样就增大了它，因此

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=y_n.$$

其次，(从第三个分数起)把分母中的每个因子都换成数 2，我們又增大了所得的式子，因此也有

$$y_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

但是由第二項 $\frac{1}{2}$ 起的級数的总和小于 1，所以 $y_n<3$，因而更加有 $x_n<3$。

于是由第 **44** 段中的定理，就推得变量 x_n 有有限的极限。这个极限依欧拉的記法总用字母 e 表示。因而我們有数

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

它的居首的 15 位十进小数就是

$$e=2.71828\ 18284\ 59045\cdots.$$

虽然序列

$$x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2;\ x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25;\ x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=$$

$$=2.3703\cdots;\ \cdots;\ x_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2.7048\cdots;\ \cdots$$

也收斂于数 e，可是收斂得很慢，利用它来进行数 e 的近似計算也不方便。在下一段中我們要叙述簡便的方法来計算它的近似值，并順便证明 e 是无理数。

49. 数 e 的近似計算法 回到等式(1)。如果固定 k 并設 $n>k$，弃去第 $(k+1)$ 項以后的一切項，則得不等式

$$x_n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

在这式中取 n 趋向于无穷大时的极限；因为所有各括弧内的极限都是1，所以我們得到：

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}=y_k.$$

这一不等式对于任何的自然数 k 都成立。因此，我們有

$$x_n<y_n\leqslant e,$$

由此显然可見[根据第38段中定理3)]又有

$$\lim y_n=e.$$

就計算数 e 的近似値言，用变量 y_n 比用 x_n 便利得多，我們来估計 y_n 接近于 e 的程度。为了这目的，我們先考虑任意一个在 y_n 后的值 y_{n+m} $(m=$ $=1,2,3,\cdots)$ 与 y_n 本身之間的差，得

$$y_{n+m}-y_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}.$$

若在括弧 $\{\cdots\}$ 内把各个分母中所有的因子都换成 $n+2$，則得到不等式

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\};$$

如果把括弧内的和换为无穷級数，那末不等式只有加强：

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

現在固定 n 不变而令 m 无限地增加，于是变量 y_{n+m} (具有标号 m 的)取一序列显然收斂于 e 的数值

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ \cdots,\ y_{n+m},\ \cdots,$$

所以，取极限时就得到

$$e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

或最后，得到

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!\,n}\text{①}.$$

若用 θ 表示差 $e-y_n$ 与数 $\frac{1}{n!\,n}$ 之比（它显然位于 0 与 1 之間），則又可写成

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!\,n}.$$

在这式中用 y_n 的展开式代入，我們就得到一个重要的公式：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!\,n}, \tag{2}$$

它是計算数 e 的起点。弃去最后的一項"余項"，并把其余的各項都換成其十进小数的近似值，我們就得到 e 的一个近似值。

利用公式(2)我們來計算 e，譬如說，准确到 $\frac{1}{10^4}$. 首先需要确定怎样选取数 n（它可由我們支配），才能达到这个准确度。

逐次地計算阶乘的倒数（参閱附表），我們看出，当 $n=7$ 时公式(2)中的"余項"已經是

$$\frac{\theta}{n!\,n}=\frac{\theta}{7!\,7}<0.00003,$$

因此，弃去它时，誤差远小于所提出的限度。我們就取 n 的这个值。把其余各項都化为十进位小数，在第五位小数上取近似值（达到后备的准确度），使得誤差在絕对值上小于 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$。我們把計算的結果列成一表。

$$\begin{aligned}
&2.00000\\
\frac{1}{2!}&=0.50000\\
\frac{1}{3!}&=0.16667-\\
\frac{1}{4!}&=0.04167-\\
\frac{1}{5!}&=0.00833+\\
\frac{1}{6!}&=0.00139-\\
\frac{1}{7!}&=0.00020-\\
\hline
&2.71826
\end{aligned}$$

与近似值并列的記号（+或−）指示着**修正数**的符号，要恢复准确的数值必須把修正数加上去。

于是，我們看出了在弃去余項时修正数小于 $\frac{3}{10^5}$。現在再計算取近似值时的修正数（連同它們的符号），就不难了解，对于所得的数 e 近似值的总修正数介在

$$-\frac{2}{10^5}\ \text{与}\ +\frac{3.5}{10^5}$$

---

① 因为很容易驗证 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$。

之間。 因此数 e 本身包含在两小数

$$2.71824 \text{ 与 } 2.718295$$

之間，因而可令

$$e = 2.7182 +_{0.0001}.$$

我們注意，这同一个公式(2)也可用来证明 e 是无理数。

从反面来討論，試假定 e 等于有理分数 $\frac{m}{n}$；于是，若对于这个 n 写出公式(2)，我們便有

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n} \qquad (0 < \theta < 1).$$

用 $n!$ 乘这等式的两端，約去除了末項以外的所有分母，我們得到左端是整数，而右端是整数带分数 $\frac{\theta}{n}$，但这是不可能的，所得的矛盾就证明了我們的断言。

50. 数 e 的基本公式·自然对数 在第 **48** 段中我們曾定义数 e 为依賴于自然附标数的变量的极限：

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

現在我們要建立更一般的結果

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

为此，只要证明[見第 **35** 段]一下二关系分別地成立：

$$\lim_{x \to +0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ 与 } \lim_{x \to -0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4a}$$

这次我們要利用"序列的語言"所下的极限定义[第 **32** 段]。

若把极限(3)看作是 n 的函数的极限，并用"序列的語言"来解釋它，則不論 $\{n_k\}$ 是怎样一个随着附标 k 增大至无穷的自然数的序列，我們得到等式

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

現在設 x 取任何趋向于零的一序列的正值 $\{x_k\}$；可以設所有

的 $x_k<1$。令 $n_k=E\left(\frac{1}{x_k}\right)$，于是

$$n_k\leqslant\frac{1}{x_k}<n_k+1 \text{ 且 } n_k\to+\infty.$$

因为这时

$$\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

两边的式子可以改写成：

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1-\frac{1}{n_k}\right),$$

并且，根据(5)，

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e, \text{同样}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e,$$

同时，显然有

$$1+\frac{1}{n_k}\to 1,\quad 1+\frac{1}{n_k+1}\to 1.$$

由此可见，上述两个表达式趋向于公共的极限 e，于是[由第 **38** 段中的定理 3)]夹在它们中间的表达式也趋向于 e：

$$\lim(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e.$$

因此关系式(4a)中的第一式已用"序列的语言"得到证明。

为了要证明其中第二式，我们现在假定序列$\{x_k\}$由负值组成，并且趋向于零；我们算作 $x_k>-1$。如果令 $x_k=-y_k$，则

$$1>y_k>0,\qquad y_k\to 0.$$

显然，

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}}=\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}=$$

$$=\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}}\cdot\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

因为根据所证，最后表达式的第一个因子趋向于 e，第二个因子显然有极限 1，所以左边的表达式也趋向于 e，公式(4)已完全证明。

数 e 的这个重要性质是它的一切应用的基础。这一性质使得选 e 作为对数系统的底有特别的便利。以 e 为底的对数叫做自然对数，并用记号 ln 来表示它；在许多理论的研究中专门用自然对数①。

还要提到的是，以 10 为底的常用对数与自然对数之间的联系是由著名的公式

$$\log x=\ln x\cdot M$$

来表示的，其中 M 是换底的模且等于

$$M=\log e=\frac{1}{\ln 10}=0.434294\cdots;$$

要得到这个公式并不难，只要在恒等式

$$x=e^{\ln x}$$

的两端取以 10 为底的对数即可。

§5. 收敛原理

§51. 部分序列 设已给一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots x_{n'}, \cdots \tag{1}$$

① 这种对数有时按照苏格兰数学家纳皮耳(1550—1617)——对数的发明者——的名字誤称为纳皮耳对数。纳皮耳自己未曾有过对数系統的底的概念，因为他是在另一原理上独自特殊地建立了它們，但他的对数相当于底数接近于 $\frac{1}{e}$ 的对数，与他同时代的瑞士数学家浦琪(1552—1632)創立了底数接近于 e 的对数。

除了它以外，我們考慮任何一个属于它的部分序列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots \tag{2}$$

其中$\{n_k\}$是某一个上升的自然数的序列：

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \tag{3}$$

在这里依次取全部自然数值的序号已不是 n，而是 k；n_k 也成为 k 的函数，取自然数的值，并且当 k 上升时显然趋向于无穷大。

若序列(1)有确定的极限 a（有限的或不是有限的），则部分序列(2)也有同样的极限。若序列(1)沒有确定的极限，则对于任何部分序列言，极限还可能存在。

例如，設 $x_n=(-1)^{n+1}$；这个变量沒有极限。如果限制 n 只取奇数或偶数值而变动，则部分序列

$$x_1=1,\quad x_3=1,\quad \cdots, x_{2k-1}=1, \cdots$$

与

$$x_2=-1, x_4=-1, \cdots, x_{2k}=-1, \cdots$$

就分别地以数 1 与 -1 为它們的极限。

在序列(1)为无界的情形，要部分序列(2)具有有界的极限有时是不可能的［当序列(1)本身趋向于$\pm\infty$时，就是如此］。反之，对于有界的序列，成立着下面的波尔察諾-維尔斯德拉斯[①]的断言：

波尔察諾-維尔斯德拉斯的預备定理 从任何有界的序列(1)中总可以选出收斂于有限的极限的部分序列(2)。

（这种說法不致排除在所給的序列內有相等的数的可能性，在应用上这是很方便的。）

証明 設全部的数 x_n 都在两界限 a 与 b 之間。把区間$[a, b]$分为两半，则至少有一半包含有所給序列中的无穷多个元素，因

① 維尔斯德拉斯(1815—1897)是卓越的德国的数学家。

为，如若不然，則在整个区間 $[a,b]$ 內所包含的这种元素就会是有限多个，但这是不可能的。于是設 $[a_1,b_1]$ 是包含有无穷多个数 x_n 的那一半(若两半都如此，則取其中任一半)。

同样，从区間 $[a_1,b_1]$ 內根据条件分出它的一半 $[a_2,b_2]$，使得在其內包含有无穷多个数 x_n，等等。継續这种步驟，在第 k 次分出的它的区間 $[a_k,b_k]$ 內同样包含有无穷多个数 x_n；如此无限地継續进行下去。

在所构成的这些区間中(从第二个起)，每一个都包含在其前一个之內且为它的一半。此外，第 k 个区間的長度等于

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},$$

它随着 k 的上升而趋向于零。应用[第 **46** 段]关于区間套的預备定理，我們肯定，a_k 与 b_k 趋向于一公共的极限 c。

現在我們可用下面的方法归納地把部分序列 $\{x_{n_k}\}$ 造出来。在我們的序列的元素 x_n 中取包含在 $[a_1,b_1]$ 內的任一个(例如，第一个)作为 x_{n_1}。在 x_{n_1} 后面的各元素 x_n 中取包含在 $[a_2,b_2]$ 內的任一个(例如，第一个)作为 x_{n_2}，等等。一般地說，在以前分出的 $x_{n_1},x_{n_2}\cdots,x_{n_{k-1}}$ 后面的各元素 x_n 中取包含在 $[a_k,b_k]$ 內的任一个(例如，第一个)作为 x_{n_k}。这种依次进行选取元素的可能性，是由每一区間 $[a_k,b_k]$ 包含有无穷多个数 x_n (即包含有序号可任意大的元素 x_n)这个条件所决定的。

其次，因为

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k \text{ 且 } \lim a_k=\lim b_k=c,$$

所以由第 **38** 段的定理 3)也有 $\lim x_{n_k}=c$，这就是所要証明的。

在这断言的証明中应用了逐次等分所考虑的区間的方法，它在其他情形中对我們也是常有用的。

波尔察諾-維尔斯德拉斯的預备定理大大地簡化了許多困难

的定理的证明，它已解决了这些论证的难点。在以下的几段内我们要利用它。

52. 以自然数为变元的函数其有限的极限的存在条件 设已给变量 x_n，它依次取一序列的数值(1)；我们要对于这个变量(或者对于序列也是一样)来解决关于有限极限的存在性的一般判别法的问题。要达到这个目的，极限定义的本身是不能用的，因为在定义中已提到这个极限，而它的存在性就是还要讨论的问题。我们所需要的判别法就只能应用我们已知的东西，也就是变量的数值的序列(1)。

下面的著名定理解决了所提出的问题，这个定理属于波尔察诺(1817)与哥西(1821)，通常称它为收敛原理。

定理 要变量 x_n 有有限的极限，其必要且充分的条件是：对于每一个数 $\varepsilon>0$，存在有这样的序号 N，使得当 $n>N$ 与 $n'>N$ 时不等式

$$|x_n-x_{n'}|<\varepsilon \tag{4}$$

恒成立。

读者可看出，这里问题在于要使变量的数值按照其序号的上升而彼此无限地接近。我们来讲这定理的证明。

必要性 设变量 x_n 有确定的有限的极限，譬如说是 a。由极限的定义[第 **28** 段]，不论 $\varepsilon>0$ 是怎样的数，对于数 $\frac{\varepsilon}{2}$ 可求得这样的序号 N，使得当 $n>N$ 时恒有不等式

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取任意两个序号 $n>N$ 与 $n'>N$；对于这两序号同时有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \quad 与 \quad |a-x_{n'}|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此得

$$|x_n-x_{n'}|=|(x_n-a)+(a-x_{n'})|\leqslant$$

$$\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样，条件的必要性就证明了。要证明它的充分性就难得多。

充分性 在这里我们正要应用前段的预备定理。

于是，假定条件已成立，且对于给定的 $\varepsilon > 0$ 找到了这样的序数 N，使得对于 $n > N$ 与 $n' > N$ 有不等式(4)。如果这时固定 n'，则把(4)式改写成

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

时，我们看出，变量 x_n 在各种情形下是有界的：它的数值当 $n > N$ 时都包含在数 $x_{n'} - \varepsilon$ 与 $x_{n'} + \varepsilon$ 之间，并且不难放宽这两个界限，使得这前面的 N 个数值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 也包含在它们的中间。

于是由波尔察诺-维尔斯德拉斯的预备定理，可以分出一个部分序列$\{x_{n_k}\}$，它收敛于有限的极限 c：

$$\lim x_{n_k} = c.$$

我们来证明变量 x_n 也趋向于这个极限。可以选取这样大的 k，使得

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon,$$

并且同时使得 $n_k > N$。因此，在(4)中可以取 $n' = n_k$ 而得

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

合并这两个不等式，最后得到

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (\text{当 } n > N),$$

这就证明了我们的断言[①]。

附注 虽然波尔察诺与哥西确立了由他们所发表的有限极限的存在条件的充分性，可是没有严格的实数理论自然不能够证明它。

---

① 数 2ε 象 ε 一样也可以"任意小"。如果願意的話，开始可以不取 ε 而取 $\frac{\varepsilon}{2}$，于是在这里就会得到 ε，以后讀者会遇到类似的情形。

53. 任何变元的函数具有有限极限的存在条件 现在我们转过来考虑在一个以 a 为聚点的区域 $\mathscr{X}=\{x\}$ 内给定了函数 $f(x)$ 时的一般情形。象在自然数变元的函数时一样，可以建立同样的判别法以判定这个函数当 x 趋向于 a 时其有限的极限的存在性。我们对 a 是有限的情形与对 $a=+\infty$ 的情形平行地来叙述这个判别法。

定理 要函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时有有限的极限，其必要且充分的条件是：对于任一个数 $\varepsilon>0$，存在有这样的数 $\delta>0(\Delta>0)$，使得只要

$$|x-a|<\delta \text{ 与 } |x'-a|<\delta \quad (x>\Delta \text{ 与 } x'>\Delta),$$

不等式

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

就成立。

我们在 a 是有限的数的假定下来进行证明。

必要性 设存在着有限的极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

于是对于给定的 $\varepsilon>0$，可求得这样的 $\delta>0$，使得只要 $|x-a|<\delta$ 就有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2};$$

又设 $|x'-a|<\delta$，因而又有

$$|A-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，在同时有

$$|x-a|<\delta \text{ 与 } |x'-a|<\delta$$

的假设下，我们得到

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

把问题化为已考虑过的情形，充分性就可以建立起来。在第 32 段中用“序列的语言”所表达的函数的极限概念的定义，为我们开辟了建立这充分性的途径。

于是假定定理中所述的条件成立，并且对于任意取的 $\varepsilon>0$，确定了对应的 $\delta>0$。

若 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的数值中的任一收敛于 a 的序列，则按序列极限的定义，可求得这样的序号 N，使得对于 $n>N$ 有：$|x_n-a|<\delta$。除了 n 以外，又取另一个序号 $n'>N$，因而同时有

$$|x_n-a|<\delta \text{ 与 } |x_{n'}-a|<\delta.$$

于是，由数 δ 的选法，有

$$|f(x_n)-f(x_{n'})|<\varepsilon.$$

这个不等式在两序号 n 与 n' 都大于 N 的唯一要求下是成立的。这就是说，第 **52** 段中的条件对于自然数变元 n 的函数 $f(x_n)$ 是成立的，由此可见，序列

$$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$$

有有限的极限，譬如说是 A。

剩下尚要确定的是，这个极限 A 不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选法。

设 $\{x'_n\}$ 是另一个序列，取自 $\mathscr{X}$ 中并且又收敛于 a。对应于它的函数值序列 $\{f(x'_n)\}$，根据所证，有某一有限的极限 A'。要证明 $A'=A$，我们假设不是这样，作 x 的数值的新序列

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots, x_n, x'_n, \cdots,$$

它显然收敛于 a。对应于它的函数值的序列

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \cdots, f(x_n), f(x'_n), \cdots$$

根本没有极限，因为由它的奇位项或偶位项所组成的部分序列各趋向于不同的极限[第 **51** 段]。但这与已证明的事实矛盾。可见当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 确实趋向于有限的极限 A。

§6. 无穷小量与无穷大量的分类

54. 无穷小量的比较 假定在某种研究下要同时考虑一系列的无穷小量

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots,$$

一般說来，它們是同一个变量，譬如說，x 的函数，x 趋向于有限的或无限的极限 a。

在許多情形中，把这些被称为无穷小的量按照它們接近于零的性質互相作一比較，是有趣的。作为两无穷小量 α 与 β 的比較的基础的，是它們的比的性态[①]。为此我們建立下面两个定义：

I. 若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(或者\frac{\alpha}{\beta}\right)$ 有着有限的且异于零的极限，则无穷小量 α 与 β 算作是同級的。

II. 若比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 本身是无穷小量（或者比 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是无量大量），则 β 算作是較无穷小量 α 更高級的无穷小量，而同时 α 是較无穷小量 β 更低級的无穷小量。

例如，若 $\alpha=x\to 0$，则与这个无穷小量相比較，下列諸无穷小量

$$\sin x, \operatorname{tg} x, \sqrt{1+x}-1$$

都是与它同級的无穷小量，因为我們已經知道[第 **34** 段，5)；第 **43** 段，6)]：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

反之，无穷小量

$$1-\cos x, \operatorname{tg} x-\sin x \tag{1}$$

显然，是比 x 更高級的[第 **43** 段，7)；(a)与(б)]。

当然，也可以遇到两无穷小量之比不趋向于任何的极限，也不是无穷大量；例如，若取[参閱第 **34** 段，6)与 7)]

$$\alpha=x, \ \beta=x\sin\frac{1}{x},$$

---

① 我們假定用作除数的变量至少对于足够接近于 a 的 x 的数值不成为零。

則它們的比等于$\sin\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时此比幷无极限。在这种情形下，我們說，这两个无穷小量不能比較。

我們注意，如果无穷小量β是比无穷小量α更高級的，則这一事实就写成:

$$\beta=o(\alpha).$$

例如，可以写

$$1-\cos x=o(x),\ \operatorname{tg}x-\sin x=o(x),\ 等等。$$

可見記号$o(\alpha)$是比α更高級的无穷小量的一般記号。今后我們将应用这种方便的記号。

55. 无穷小量的尺度 有时会遇到需要对无穷小量的性态作更精确的比較，要用数字来表达它們的級。在这情形下，首先从所研究的各个无穷小量之內选出一个(譬如說是α)作为“标准”，称它为基本无穷小量。当然，基本无穷小量的选取在某种程度內是任意的，但通常选取其中最簡单的。如果所要考慮的各量假定都是x的函数幷且它們当x趋向于a时都成为无穷小，則依a为零，为异于零的有限数或为无穷大，自然地分别选取

$$|x|,\quad |x-a|,\quad \frac{1}{|x|}$$

作为基本无穷小。

其次，为了要評比性质更复杂的无穷小，可由基本无穷小α(我們認为$\alpha>0$)的各种不同的正指数冪α^k組成一种尺度[①]。

Ⅲ. 若β与α^k($k>0$)是同級的无穷小量，也就是說，比$\frac{\beta}{\alpha^k}$有异于零的有限的极限，則β算作是(关于基本无穷小α的)k級的无穷小量。

例如，如果我們不滿意前面所說的“(1)中两个无穷小(当$x\to 0$)

① 不难看出，当$k>0$时α^k与α同为无穷小量。

是比 x $(\alpha=x)$ 更高級的无穷小"那一断言，那末現在可以确切地說，(1)中前一个是关于 $\alpha=x$ 的二級无穷小，而另一个是三級无穷小，因为［見第 43 段，7)，(a)与(б)］

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

56. 等价的无穷小量 我們現在来講同級无穷小中一种格外重要的特殊情形。

IV. 若 α 与 β 两无穷小的差 $\gamma=\beta-\alpha$ 是比 α 与 β 中任何一个更高級的无穷小：

$$\gamma=o(\alpha) \text{ 与 } \gamma=o(\beta),$$

我們便称无穷小 α 与 β 是等价的(記作 $\alpha\sim\beta$)。

可是，这只要 γ 是比这两无穷小中之一更高級的无穷小就够了，因为，例如，若 γ 比 α 的級更高，則它也比 β 的級更高。事实上，由 $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$ 就推得

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}=\lim\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}}=0.$$

考虑两个等价的无穷小 α 与 β，于是 $\beta=\alpha+\gamma$，其中 $\gamma=o(\alpha)$. 若近似地令 $\beta\doteq\alpha$[①]，則——当两个量都减小时——不但由这替换所生的絕对誤差 $|\gamma|$ 趋向于零，而且相对誤差 $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$ 也趋向于零。換句話說，当 α 与 β 的值充分小时，可以令 $\beta=\alpha$ 而有着任意大的相对的准确度。在近似計算中，复杂的无穷小可換为与它等价的簡單的无穷小，就是以此为根据的。

我們要建立一个有用的鉴定两无穷小的等价性的准則，实質

① 符号 $\doteq$ 表示近似的等式。

上它給出这个概念的第二个定义而与前面所給的定义是一样的：

要两个无穷小量 α 与 β 是等价的，其必要且充分条件是

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

令 $\beta-\alpha=\gamma$，我們有

$$\frac{\beta}{\alpha}-1=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

由此立即推得我們的断言。实际上，如果 $\frac{\beta}{\alpha}\to 1$，则 $\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$，就是説，$\gamma$ 是比 α 更高級的无穷小而 $\beta\sim\alpha$。反之，若給定 $\beta\sim\alpha$，则 $\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$，于是 $\frac{\beta}{\alpha}\to 1$。

利用这个准則，显然可見，当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 与 $\operatorname{tg}x$ 都是等价于 x 的无穷小，而 $\sqrt{1+x}-1$ 等价于 $\frac{1}{2}x$。由此得近似公式：

$$\sin x\doteq x,\quad \operatorname{tg}x\doteq x,\quad \sqrt{1+x}-1\doteq\frac{1}{2}x.$$

已經証明的等价无穷小量的性質可以应用于确定 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，即应用于确定两无穷小量之比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 的极限。这时其中每一个量可用与它等价的任一无穷小量来代替而对于所求的极限毫无影响。

实际上，若 $\bar{\alpha}\sim\alpha$ 且 $\bar{\beta}\sim\beta$，即

$$\lim\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}=1\ \text{且}\ \lim\frac{\beta}{\bar{\beta}}=1,$$

则比

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\bar{\beta}}\cdot\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

与比 $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ 仅相差两个各趋向于 1 的因子，因而两者有相同的极限。

若能把 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 选得充分地簡单，则立即可以使問題大大地簡化；例如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

从已证明的定理也能推出，两个各与第三者等价的无穷小是彼此等价的。

57. 无穷小量的主部的分离 若已选定 α 为基本无穷小，则形如 $c\cdot\alpha^k$ 的量自然要算作最简单的无穷小，这里的 c 是常系数且 $k>0$。设 β 是关于 α 的 k 级无穷小，即

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c,$$

其中 c 是异于零的有限的数。于是

$$\lim\frac{\beta}{c\alpha^k}=1,$$

而无穷小 β 与 $c\alpha^k$ 是等价的：$\beta\sim c\alpha^k$。这个与所给的无穷小 β 等价的最简单的无穷小 $c\alpha^k$，叫做 β 的主部（或主项）。

利用上面所建立的结果，除了已指出的简单例题以外，不难分出下列表达式的主部：

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \operatorname{tg} x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3.$$

这里 $x\to 0$，并且 $\alpha=x$ 就是基本无穷小。

设 $\beta\sim c\alpha^k$，即 $\beta=c\alpha^k+\gamma$，其中 $\gamma=o(\alpha^k)$。可以设想，从无穷小 γ 可再分出主项：$\gamma=c'\alpha^{k'}+\delta$，其中 $\delta=o(\alpha^{k'})\ (k'>k)$，等等。

这种从无穷小中逐次分出其级数不断增高的最简单的无穷小的步骤，可以继续进行。

在本节中我们只建立主部的一般概念，仅用少数几个例题来说明它们。以后对于刚才所说的关于已给无穷小量的主部的构造，以及如何从主部内再分出最简单的无穷小量，我们还要指出系统的方法。

58. 应用問題 为了说明上述的思想，我们举出两个应用问题。

1)设用 l 米长的尺来测量地上一直线距离。因为实际上没有把尺准确地沿着所测量的直线贴放，所以测量的结果比真正的长度要大一些。我们但

图 25.

就测量时尺是曲折地放下的最坏的情形设想，就是说，测量时尺的两端轮流地偏在直线的两侧，其与直线的距离为 λ 米(图 25)。试估计其误差。

每放下一次尺所生的绝对误差等于尺的长度 l 与它在所测量的直线上的投影之差；这投影是：

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

把近似公式

$$\sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x$$

应用于 $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ 的情形(这是可以的，因为量 λ 比 l 小得多)，我们可用

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}$$

来代替投影的表达式。在这情形下上述的误差是 $\frac{2\lambda^2}{l}$，而相对误差显然是 $\frac{2\lambda^2}{l^2}$、这个相对误差即使在尺放下多次时也保持不变。

图 26.

如果这误差的界限规定为 δ，就是说，应该有 $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$，则由此得 $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

例如，当用 2 米长的尺 ($l=2$) 测量时，要达到 0.001 的相对准确度，需要偏差 λ 不超过 $2\sqrt{0.0005}\doteq 0.045$ 米或 4.5 厘米。

2) 在划分地上的圆弧时下面的问题是有意义的：试求圆弧 ABC 上的矢 $f=$

$=DB$ 与这弧的半弧 AB_1B 上的矢 $f_1=D_1B_1$ 之比(图 26)。

若令圆周的半径等于 r,

$$\measuredangle AOB=\varphi,\ 则\ \measuredangle AOB_1=\frac{\varphi}{2}\ 且$$

$$f=DB=r(1-\cos\varphi),\quad f_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

可見所求的比等于

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

这个表达式太复杂以至实际上应用起来很不方便。 我們来求当 $\varphi\to0$ 时它的极限(因为对于充分小的 φ 这表达式可以近似地用它的极限来替代), 为了这个目的, 我們把分子与分母分别用它們的主部来替代, 于是立即得到:

$$\lim\frac{f}{f_1}=\lim\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}=4.$$

因此, 对于与不大的中心角相对应的弧, 我們可以近似地認为, 半弧的矢是弧的矢的四分之一。 这就使我們能够逐次地作出一个弧的一些中間的点, 只要已知原弧的两端及其中点就行了。

59. 无穷大量的分类 我們注意, 对于无穷大量可以有类似的分类法。象在第 **54** 段一样, 我們把所考慮的各量当作是同一个变量 x 的函数, 当 x 趋向于 a 时它們都趋向于无穷大。

I. 两个无穷大量 y 与 z 算作是同級的量, 只要它們之比 $\frac{z}{y}\left(或\frac{y}{z}\right)$ 具有异于零的有限的极限。

II. 若比式 $\frac{z}{y}$ 本身是无穷大(或倒轉来 $\frac{y}{z}$ 是无穷小), 則 z 算作是較 y 更高級的无穷大量, 而同时 y 是較 z 更低級的无穷大量。

在比式 $\frac{z}{y}$ 不趋向于任何有限的极限且同时又不是无穷大的情形下, 无穷大 y 与 z 是不能比較的。

当同时考慮一系列的无穷大量时, 选取其中一个(譬如說是 y)

作为基本无穷大，而将其余各个无穷大与基本无穷大的各个幂作一比較。例如，若(象我們在上面已假定一样）它們全是 x 的函数且当 $x\to a$ 时都成为无穷大，則当 $a=\pm\infty$ 时通常取 $|x|$ 作为基本无穷大，而当 a 为有限值时取 $\frac{1}{|x-a|}$ 作为基本无穷大。

Ⅲ. 若 z 与 y^k 是同級的无穷大，也就是說，比式 $\frac{z}{y^k}$ 有着异于零的有限的极限，則无穷大 z 叫做(关于基本无穷大 y)是 k 級的量。

第四章　单变量的連續函数

§1. 函数的連續性(与間断点)

60. 函数在一点处的連續性的定义　与函数的极限概念密切相联系的是数学分析上另一个重要的概念，即函数的連續性的概念。以确切的形式建立起这一概念的，是前面已提到的波尔察諾与哥西二人。

考慮在某一区間$\mathscr{X}$中所定义的函数 $f(x)$，并設 x_0 是这区間的一点，因而在这点处函数有确定的数值 $f(x_0)$。

当 x 趋向于 x_0 时函数的极限概念

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

早已为我們建立［第 32 段与第 33 段］，并且我們曾一再地着重指出了，变量 x 却不取数值 x_0；这一个数值甚至可以不属于函数的定义域，即使它属于函数的定义域，但当建立上述的极限时数值 $f(x_0)$ 也是不考虑的。

可是特别要注意的正是

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

的情形。如果这个关系式成立，我們便説，函数 $f(x)$ 对于数值 $x = x_0$(或在点 $x = x_0$ 处)是連續的；如果它不成立，我們就説，函数对于这个数值(或在这点处)有一間断[①]。

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处連續时(显然也只有在这时)，要計算函

① 这一术語是与曲綫的連續性和間断性的直观有联系的：如果函数的图形是連續的，则函数就是連續的；函数的間断点对应于其图形的間断点，可是事实上，曲綫的連續概念本身就需要論証，而取得論証的最簡单的方法恰又要通过函数的連續性！

数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，就与 x 本身趋向于 x_0 时是否也特别地取过这数值 x_0 毫无关系。

函数的連續性的定义可以用其他的术語来叙述。变量由数值 x_0 变到另一数值 x，可以設想为数值 x_0 有了一个增量 $\Delta x = x - x_0$[①]。函数的新值 $y=f(x)=f(x_0+\Delta x)$ 与原值 $y_0=f(x_0)$ 相差一个增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

要函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是連續的，必須且只須它在这点处的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 同趋向于零。換句話說，連續函数的特征是：当自变量的增量为无穷小时，函数的对应增量也为无穷小。

回轉来看基本定义(1)，我們来用"序列的語言"［第 **32** 段］揭露它所表达的内容。函数 $f(x)$ 在点 x_0 处連續的意义可归結如下：不論

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

是从 $\mathscr{X}$ 中取出的怎样一个收斂于 x_0 的数值 x 的序列，而对应的函数值序列

$$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$$

收斂于 $f(x_0)$。

最后，函数的連續性可"用 ε-δ 語言"［第 **33** 段］表述如下：不論对于怎样的数 $\varepsilon>0$，可求得这样的数 $\delta>0$，使得不等式

$$|x-x_0|<\delta \text{ 引起不等式 } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由此可見，最后这个不等式在点 x_0 的充分小的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内应該成立。

我們注意，要計算极限(1)，只要 x 不超出区間 $\mathscr{X}$ 的范圍，可以让 x 从右边与左边来逼近于 x_0。

---

① 在分析上 $x, y, t, \cdots$ 的增量用 $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \cdots$ 来表示。这些記号必須看作整个的記号，不可把 Δ 与 x 拆开，余类推。

現在我們来建立在一已知点处函数的单側連續性或单側間断性这个概念。

我們說，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是右(左)連續的，只要下面的极限关系成立:

$$\left.\begin{array}{r}f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\\ \text{[或者}\quad f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)].\end{array}\right\}\qquad(2)$$

如果这两个关系式中的一个或另一个不成立，則称 $f(x)$ 在点 x_0 处分别有一右間断或左間断。

对于在区間$\mathscr{X}$的左(右)端[1] 函数有定义的那个端点言，显然只能談到右(左)連續性或間断性。如果 x_0 是区間$\mathscr{X}$的內点，就是說它不与$\mathscr{X}$的任一端点重合，那末，要想这一个表达着函数在点 x_0 处(在通常意义下)的連續性的等式(1)成立，必須且只須 (2)中两个等式同时成立[第 35 段]。換句說話，函数在点 x_0 处具备連續性与它在这点处同时具有左右連續性是等价的。

若一函数在区間$\mathscr{X}$的每个点处是連續的，我們就簡称它在$\mathscr{X}$內是連續的。

61. 单調函数的連續性的条件 考慮在区間$\mathscr{X}$內单調上升(下降)[2] 的函数[第 47 段]。这个区間可以是有限的，也可以是无限的，可以是閉的，也可以是半开的或开的。我們現在要建立一种簡单的判定法，使我們能迅速地发現这一类型的函数在整个区間$\mathscr{X}$內的連續性。

定理 若当 x 在区間$\mathscr{X}$內变动时单調上升(下降)函数 $f(x)$ 所取的数値集合包含在某一区間$\mathscr{Y}$內并且把$\mathscr{Y}$全部填滿，則函数

---

[1] 假定这一端是有限的数。

[2] 为了明确起見我們假定函数是在狹义下单調上升的(虽然对于在广义下的单調函数定理也是正确的)。

$f(x)$在区間$\mathscr{X}$内是連續的①。

选取$\mathscr{X}$内的任一点 x_0 并設它不是这区間的右端，我們来証明函数 $f(x)$在点 x_0 处是右連續的；如果 x_0 不是所考慮的区間的左端，則函数在点 x_0 处的左連續性也同样地可以証明，于是綜合起来就得到定理中的結論。

点 $y_0=f(x_0)$ 属于区間 $\mathscr{Y}$，不是它的右端［因为在$\mathscr{X}$内数值 $x>x_0$ 时在$\mathscr{Y}$内的对应数值 $y=f(x)>y_0$］。設 ε 是任意小的正数；并且假定它小到这种程度，使得数值 $y_1=y_0+\varepsilon$ 也属于区間$\mathscr{Y}$。因为由假設$\mathscr{Y}=\{f(x)\}$，所以在$\mathscr{X}$内可求得一数值 x_1，使有

$$f(x_1)=y_1,$$

并且显然有 $x_1>x_0$（因为当 $x\leqslant x_0$ 时就有 $f(x)\leqslant y_0$）。令 $\delta=x_1-x_0$，于是 $x_1=x_0+\delta$。如果現在

$$0<x-x_0<\delta,\ \text{亦即}\ x_0<x<x_1,$$

則

$$y_0<f(x)<y_1=y_0+\varepsilon\ \text{或者}\ 0<f(x)-f(x_0)<\varepsilon.$$

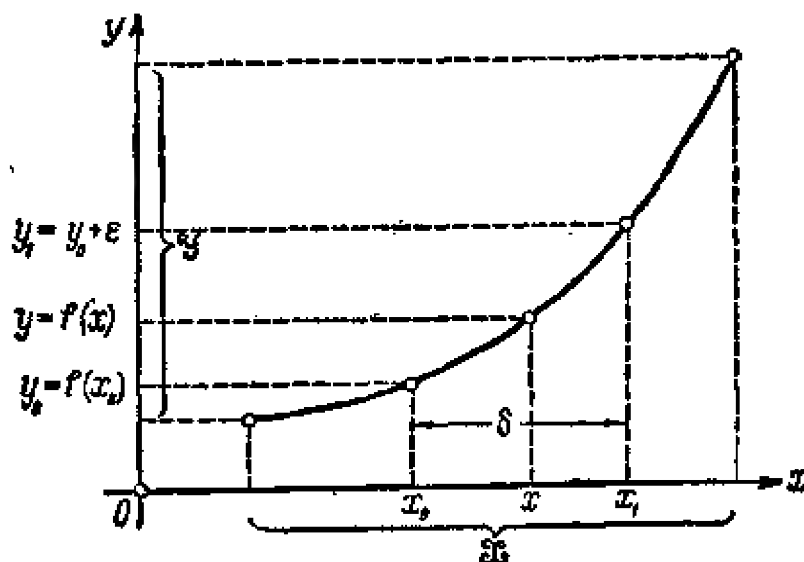


图 27.

① 以后［第 70 段中］我們要証明这里所叙述的单調函数的連續性的充分条件也是必要的条件。

这就是說

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),$$

也就是說，函数 $f(x)$ 确实在点 x_0 处是右連續的，这就是所要証明的。图 27 可作为所引进的論証的解释。

62. 連續函数的算术运算 在講述連續函数的例子以前，我們先建立下面的簡单命題，它能很容易地扩大連續函数的数目。

定理 若两函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义在同一区間$\mathscr{X}$內并且都在点 x_0 处是連續的，則在这点处下列各函数也是連續的：

$$f(x)\pm g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)},$$

（最后这个函数应具备 $g(x_0)\neq 0$ 的条件）。

这个定理可从各有极限的两函数的和、差、积与商的极限定理［第 42 段］直接推出来。

我們只講述两函数之商的情形作为例子。两函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处連續的假設与具备等式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

是等价的。于是根据关于商的极限定理（因为分母的极限不为零）有：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

而这一等式乃表示函数$\frac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处是連續的。

63. 初等函数的連續性 1°. 有理整函数与有理分式函数。当 x 的函数是常数或是 x 自身时，它的連續性是很明显的。于是根据前段的定理就推得作为連續函数之积的任何一个单項式

$$ax^m=a\cdot\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{m\text{次}}$$

的連續性，然后又推得作为連續函数之和的多項式（整有理函数）

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的連續性。在上述各情形下函数的連續性在整个区間$(-,\infty+\infty)$內都成立。

最后，两多項式之商(有理分式函数)

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

显然也对于 x 的每个数值是連續的，但要除掉使分母为零的那些数值。

根据第 61 段的定理我們可建立其余各初等函数的連續性。

2°. 指数函数 $y=a^x\ (a>1)$。当 x 在区間$\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ 內变动时是单調上升的。它的数值是正的并且填滿着整个区間 $\mathscr{Y}=(0+\infty)$；这可从对数 $x=\log_a y$ 对于任何的 $y>0$ 的存在性[第12段]看出来。因此，指数函数对于 x 的任何数值是連續的。

3°. 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq1)$。在 $a>1$ 的限制下，我們看出，当 x 在区間 $\mathscr{X}=(0,+\infty)$ 內变动时这个函数是上升的。并且，它显然取到区間 $\mathscr{Y}=(-\infty,+\infty)$內的任何数值 y，也就是滿足 $x=a^y$ 的 y 的全部数值。由此推得它的連續性。

4°. 冪函数 $y=x^\mu\ (\mu\gtrless0)$。当 x 由 0 上升到 $+\infty$时，若 $\mu>0$，則它上升，若 $\mu<0$，則它下降，这时它具有任何正的数值 y(当 $x=y^{\frac{1}{\mu}}$ 时)，因此它也是連續的①。

5°. 三角函数:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,\quad y=\operatorname{ctg} x,$$
$$y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

---

① 若 $\mu>0$，則要把零值加入到 x 的变动区間內与 y 的变动区間內；当 $\mu<0$ 时，則零值不能加入。其次，若 μ 是整数 $\pm n$ 或者是分母为奇数的分数 $\pm\frac{p}{q}$，則当 $x<0$ 时也可以討論冪函数 x^μ；它对于这些数值的連續性同样地可建立起来。

我們首先講述函数 $y=\sin x$。譬如說，当 x 在区間 $\mathscr{X}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上变动时它的連續性可从它在这区間上的单調性以及它可取到 -1 与 1 之間的每个数值的事实(几何上确立的事实)推出来。就任意的形如

$$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right]\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的区間言，也有同样的結果。最后我們看出，函数 $y=\sin x$ 对于 x 的一切数值是連續的。同样也可建立函数 $y=\cos x$ 对于 x 的任何数值的連續性。

于是根据前段的定理就推得函数

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

的連續性。对于前两个函数言，使 $\cos x$ 为零的那种数值 $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 需要除开，而对于后两个函数言，使 $\sin x$ 为零的那种数值 $k\pi$ 需要除开。

最后我們要提到

6°. 反三角函数:

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\operatorname{arctg}x,\ y=\operatorname{arcctg}x.$$

前两个函数在区間 $[-1,1]$ 上是連續的，而后两个函数在区間 $(-\infty,+\infty)$ 内是連續的。其証明让讀者去完成。

于是可以概括起来說，基本初等函数在它們具有意义的所有一切点处，即在它們的自然定义域内，都是連續的。

64. 連續函数的迭置 把已知的連續函数迭置起来可以构造出許多种类的連續函数。这是以下面的定理作其基础的。

定理 設函数 $\varphi(y)$ 是在区間 $\mathscr{Y}$ 内定义的，而函数 $f(x)$ 是在区間 $\mathscr{X}$ 内定义的，并且当 x 在 $\mathscr{X}$ 内变动时后一函数的数值不超出 $\mathscr{Y}$

的范围。如果 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内的点 x_0 处是連續的，而 $\varphi(y)$ 在 $\mathscr{Y}$ 内的对应点 $y_0=f(x_0)$ 处是連續的，則复合函数 $\varphi(f(x))$ 在点 x_0 处是連續的。

証明 給定任一数 $\varepsilon>0$。因为 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 处是連續的，所以对于 ε 可求得这样的 $\sigma>0$，使得

$$\text{由}\ |y-y_0|<\sigma\ \text{推得}\ |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

另一方面，根据 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的連續性，对于 σ 可求得这样的 $\delta>0$，使得

$$\text{由}\ |x-x_0|<\delta\ \text{推得}\ |f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\sigma.$$

依照所选取的数 σ，由此又推得

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|<\varepsilon.$$

于是函数 $\varphi(f(x))$ 在点 x_0 处的連續性已用"ε-δ 語言"証明。

例如，若把幂函数 x^μ $(x>0)$ 表成如下形的函数

$$x^\mu=e^{\mu\ln x},$$

它是由对数函数与指数函数的迭置得来的，則由后两函数的連續性就已推得幂函数的連續性。

65. 几个极限的計算 函数的連續性在計算极限时可以多方面来利用①。在这里我們根据初等函数的連續性来建立几个在下一章所需要的重要的极限：

$$1)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$2)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\ln a \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$3)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\mu \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

---

① 事实上，我們以前有时就这样做过；如在第 **43** 段例 6) 中我們順便建立了函数 $\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的連續性并已利用了它，而在例 7)(6) 中同样地利用了 $\cos x$ 在 $x=0$ 处的連續性。

我們有

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

因为右端在对数号下的式子当 $\alpha\to0$ 时趋向于 e [第 50 段,(4)],所以(由对数函数的連續性)它的对数趋向于 $\log_a e$, 这就是所要証明的。

我們要注意已証明的公式的特例, 即当所指的是自然对数时 $(a=e)$:

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

自然对数制所表現出来的优点实际上根源于这一結果的簡便。

回到公式 2), 我們令 $a^{\alpha}-1=\beta$; 于是当 $\alpha\to0$ 时 (由指数函数的連續性)也有 $\beta\to0$。其次, 我們有 $\alpha=\log_a(1+\beta)$, 因此, 如果利用已經証明的結果就得

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a,$$

这就是所要証明的。

特别, 若取 $\alpha=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$, 則得到有趣的公式:

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a \qquad (\infty\cdot0).$$

最后, 要証明公式 3), 我們令 $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$; 当 $\alpha\to0$ 时(由幂函数的連續性)也有 $\beta\to0$。在等式 $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$ 两端取对数, 得到

$$\mu\cdot\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta).$$

利用这一关系式, 我們可把所給的表达式变形为:

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

根据已证結果, 两个比值

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \text{ 与 } \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

都趋向于 1，因而整个乘积以 μ 为其极限，这就是所要証明的。

于是在第 **43** 段，6)中所已考慮过的极限可作为 $\mu=\frac{1}{2}$时的特例而得到。

66. 冪-指数表达式 我們現在来考察冪-指数表达式 u^v，其中 u 与 v 是同一个变量 x 的函数，x 的变域 $\mathscr{X}$ 具有聚点 x_0；特別，它們可以是两个以自然数为变元的函数 u_n 与 v_n。

設存在着有限的极限：

$$\lim_{x\to x_0} u=a \text{ 与 } \lim_{x\to x_0} v=b,$$

并且 $a>0$。試求表达式 u^v 的极限。

把这表达式写成下形：

$$u^v=e^{v\cdot\ln u};$$

函数 v 与 $\ln u$ 具有极限

$$\lim_{x\to x_0} v=b, \quad \lim_{x\to x_0} \ln u=\ln a$$

(在这里利用了对数函数的連續性)，因而

$$\lim_{x\to x_0} v\cdot\ln u=b\cdot\ln a.$$

由此——根据指数函数的連續性——最后得到

$$\lim_{x\to x_0} u^v=e^{b\cdot\ln a}=a^b.$$

表达式 u^v 的极限也可在已知乘积 $v\cdot\ln u$ 的极限 c（有限的或无穷的)的其他各情形下确立起来。当 c 为有限值时所求的极限显然是 e^c；如果 $c=-\infty$ 或 $+\infty$，則这极限分别为 0 或 $+\infty$ [第 **34** 段，2]。

只由給定的极限 a 与 b 来确定极限 $c=\lim\{v\cdot\ln u\}$ 的本身，这总是可能的，但要除开这个乘积当 $x\to x_0$ 时成为 $0\cdot\infty$ 型的未定式的那些情形。不难了解，例外的几种情形对应于数值 a 与 b 的

如下的几种結合:

$$a=1, \quad b=\pm\infty;$$
$$a=0, \quad b=0;$$
$$a=+\infty, \quad b=0.$$

在这些情形下(按照出現情形)称表达式 u^v 表示 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型的未定式[①]。这时要想解决表达式 u^v 的极限問題，只知道函数 u 与 v 的极限是不够的，而必須直接研究它們趋向于其自身的极限时的規律。

表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 于 $n\to\infty$ 时，或者更一般的表达式 $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 于 $\alpha\to 0$ 时，具有极限 e，它給出一个 1^∞ 型的未定式的例子。

我們曾經指出，确定各个类型未定式的数值的一般方法将于第七章 §3 中去講。

67. 間断点的分类·例子 我們要詳細講述函数在点 x_0 处的右連續性与右間断的問題。假定函数 $f(x)$ 在这点的右边某一区間 $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ 內是确定的，我們知道，要函数具备連續性必須且只須：第一，当 x 从右边趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的有限的极限 $f(x_0+0)$ 要存在；第二，这个极限要等于函数在点 x_0 处的值 $f(x_0)$。

因此，不难回答这样一个問題：在何种情况下在点 x_0 处出現有函数 $f(x)$ 的右間断点。可以遇到这种情形，虽然有限的极限 $f(x_0+0)$ 存在，但它并不等于数值 $f(x_0)$；这种間断点叫做寻常的或者第一类的間断点[②]。但也可能遇到极限 $f(x_0+0)$ 是无穷大或者根本不存在的情形；这时我們称这間断点是第二类的間断点。

若函数 $f(x)$ 只在区間 $(x_0, x_0+h]$ 內是有定义的，但存在着有限的极限

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

---

① 关于这些記号可以重述一遍 § 41 末了的底注。

② 在这情形下我們也說，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右边有一跃度，其数量等于 $f(x_0+0)-f(x_0)$。

则只要令 $f(x_0)$ 等于这个极限作为函数在点 x_0 处的补充定义，函数就在点 x_0 处是右連續的。今后遇到这种情形我們所指的常常是这种意义。可是，如果函数在 x_0 的左边——在区間$[x_0-h, x_0]$內也是有定义的，并且存在着有限的极限

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

則只在左右两极限相同的条件下才能恢复函数在点 x_0 处的連續性。

最后，若在区間$(x_0, x_0+h]$內所定义的函数 $f(x)$在点 x_0 处的右极限不存在，則在点 x_0 处函数虽然是完全未确定的，我們称它在这点处有第二类的右間断点；在这情形下，无論怎样补充函数在点 x_0 处的定义，它不可避免地在这点处有一間断！

例 1) 考察函数 $y=E(x)$（其图綫在图 5 中已表出）。若 x_0 不是整数并且 $E(x_0)=m$，即 $m<x_0<m+1$，則对于在区間$(m, m+1)$內的 x 的一切数值有 $E(x)=m$，因而函数在点 x_0 处的連續性是很显明的。

另一种情形是，若 x_0 等于整数 m，則函数在这点处是右連續的，因为在 $x_0=m$ 的右边［也就是对于 $(m, m+1)$內的 x 值］有 $E(x)=m$，于是也有 $E(m+0)=m=E(m)$。反之，在 $x_0=m$ 的左边［也就是对于$(m-1, m)$內的 x 值］显然有 $E(x)=m-1$；由是又有$E(m-0)=m-1$，它不等于数值$E(m)$，而在点 $x_0=m$ 的左边函数有寻常的間断或跃度！

2) 就函数

$$f(x)=\frac{1}{x^3}\ (\text{当 } x\neq 0)$$

言，点 $x=0$ 是第二类的左右两边的間断点；就是說，在这点处函数从左边与从右边都趋向于无穷大：

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty,\quad f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

3) 在第 34 段，6) 中已考察过的函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}(x\neq 0),$$

在点 $x=0$ 处有第二类的两边間断点，因为这函数在所說的点处左右极限根本都不存在。

4) 反之，若取函数［第 34 段，7)］

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0),$$

它的极限我們已知道存在：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0,$$

則令 $f(0)=0$ 时我們就又恢复了函数于 $x=0$时的連續性。

5）最后，我們用两等式

$$f_1(x)=a^{\frac{1}{x}}\ (a>1),\quad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

（其中 $x\neq 0$）来定义两个函数并附加条件

$$f_1(0)=f_2(0)=0.$$

象在第 35 段中一样，我們已看到

$$f_1(+0)=+\infty,\quad f_1(-0)=0,$$

$$f_2(+0)=\frac{\pi}{2},\quad f_2(-0)=-\frac{\pi}{2}.$$

由此可見，在点 $x=0$ 处第一个函数有第二类的右間断点，然而是左連續的；第二个函数在 $x=0$ 处左右两边都有跃度［参閱图 22 与23］。

我們最后談到时常要考慮的重要的一类函数—— 单調的或者分段单調的① ——并証明对于这类的函数只可能有寻常的間断点出现。这可从这种函数 $f(x)$ 在其定义区間$\mathscr{X}$內的每一点 x_0 处总有有限的极限 $f(x_0+0)$与 $f(x_0-0)$（如果 x_0 是区間$\mathscr{X}$的一个端点，則只有此两极限中的一个）这一事实推出来。 例如，設函数 $f(x)$单調上升，并且 x_0 不是区間$\mathscr{X}$的左端；于是当 $x<x_0$ 时函数 $f(x)$的数值以数 $f(x_0)$为上界，而由第 47 段的定理有限的极限

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

确实地存在。

§2. 連續函数的性质

68. 关于函数取零值的定理 我們現在要研究在某一区間內連續函数的基本性質。这些性質本身是有趣的，且在以后的叙述中时常要引用它們作为各种論断的根据。

---

① 如果函数的定义区間可以分成有限多个部分区間，使在每一部分区間內函数分别是单調的，則称函数是分段单調的。

波尔察諾(1817)最先开辟了这些性質的严格論証的道路，繼之者則是哥西(1821)。下面引用的重要定理就是他們的。

波尔察諾-哥西第一定理 設函数$f(x)$是在閉区間$[a, b]$上定义的并且是連續的，又在这区間的两端处取异号的数值，則在a与b之間必可求得一点c，使在这点处函数成为零：

$$f(c)=0 \quad (a<c<b).$$

这个定理有着很簡单的几何意义：若連續曲綫从x軸的一側轉移到另一側，則它与这軸必相交(图28)。

我們用細分区間的方法来进行証明[第51段]。为确定起見，我們假定$f(a)<0$而$f(b)>0$。用点$\frac{a+b}{2}$把区間$[a, b]$分成两半。可能遇到函数$f(x)$在这点处等于零，于是可以令$c=\frac{a+b}{2}$而定理就已証明。設$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$；于是函数必在区間$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$或$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$的两端处取异号的数值(并且負值在左端而正值在右端)。用$[a_1, b_1]$来表示这个区間，我們有：

$$f(a_1)<0, \quad f(b_1)>0.$$

再把区間$[a_1, b_1]$平分成两半并除开$f(x)$在这区間的分点

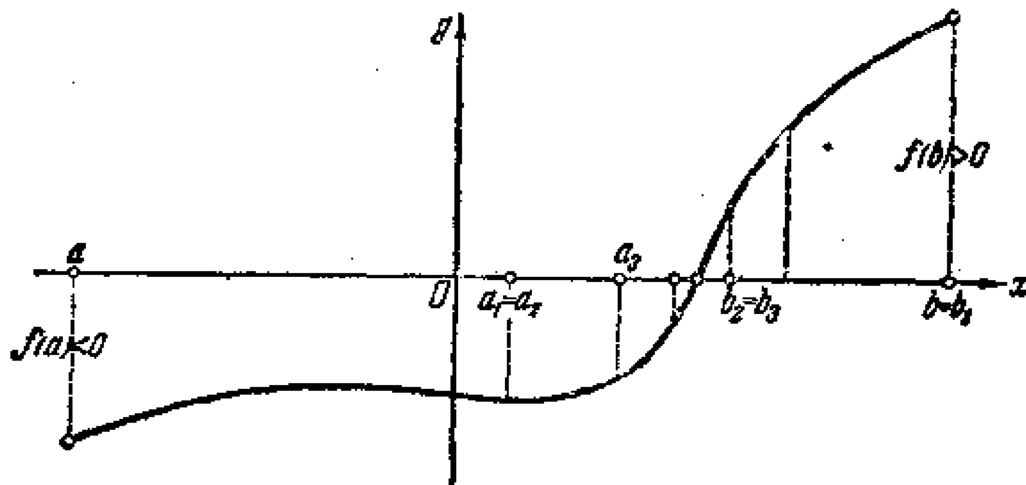


图28.

$\frac{a_1+b_1}{2}$处为零的情形，因为在这情形下定理已告証明。用$[a_2, b_2]$表示使

$$f(a_2)<0, \quad f(b_2)>0$$

的那半个区間。

繼續进行这种构造区間的步驟。这时，或者在有限多个步驟以后我們会遇到在作为分点的一点上函数等于零——而定理的証明就告完成，——或者我們得到一个套在另一个內的区間的无穷序列。我們来討論后一情形。这时对于第n个区間$[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$我們有

$$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0, \tag{1}$$

并且它們的长度显然等于

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

所作出的区間序列滿足区間套的預备定理[第46段]，因为根据(2)有$\lim(b_n-a_n)=0$；所以两变量a_n与b_n趋向于共同的极限

$$\lim a_n=\lim b_n=c,$$

而c显明地屬于$[a, b]$[第36段，3)]。我們来証明这个点c滿足定理的要求。

在不等式(1)中取极限并利用这时函数的連續性(特别是在点c处的連續性)，我們同时得到

$$f(c)=\lim f(a_n)\leqslant 0 \text{ 与 } f(c)=\lim f(b_n)\geqslant 0,$$

所以实际上是$f(c)=0$。定理已被証明。

我們要注意，函数在閉区間$[a, b]$上的連續性的要求是极重要的：即使是具有一个間断点的函数也能够由負值变到正值而不变为零。例如，$f(x)=E(x)-\frac{1}{2}$就是这样的一个函数，虽然$f(0)=$

$=-\frac{1}{2}$ 而 $f(1)=\frac{1}{2}$(在 $x=1$ 处有跃度)，可是它到处都不等于零。

69. 应用于解方程 前面已証明的定理在解方程上有其应用。

例如，考虑实系数的奇次代数方程

$$f(x)\equiv a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0.$$

对于絕对値充分大的那种 x 的数値，多項式的符号与其最高次項的符号相同，也就是說，当 x 为正时它与 a_0 同号，而当 x 为負时它与 a_0 异号。因为多項式是連續函数，所以它旣然变号就必定在区間內某一点处等于零。因此：任何实系数的奇次代数方程至少有一个实根。

波尔察諾-哥西定理不仅可以用来确定根的存在性，而且可以用来計算根的近似値（这也是哥西在証明他登載在"論方程的数値解"一文中的定理时的出发点）。我們用例子来說明这种应用。設 $f(x)=x^4-x-1$. 因为 $f(1)=-1$. $f(2)=13$. 所以多項式在1与2之間有根。用点 1.1;1.2;1.3;… 把这区間[1,2]分成10等分并逐次地来計算：

$f(1.1)=-0.63\cdots$; $f(1.2)=-0.12\cdots$; $f(1.3)=+0.55$;…

我們看出，在1.2与1.3之間包含有根。 再把这个区間分成10等分，我們求得：

$f(1.21)=-0.06\cdots$; $f(1.22)=-0.04\cdots$; $f(1.23)=+0.058$; …

現在很明显，这根落在1.22与1.23之間；于是已經知道根的数値的准确度达到0.01，余仿此①。

70. 关于中間值的定理 在第69段中已証明的定理可以直接推广如下：

波尔察諾-哥西第二定理 設在閉区間$[a,b]$上函数$f(x)$是有定义的并且是連續的，又在这区間的两端点处函数取不同的数值

$$f(a)=A \text{ 与 } f(b)=B.$$

于是，不論C是A与B之間的怎样一个数，总可求得a与b之間的一个点c，使得

① 可是，这种方法由于需要太多的計算实际上是不方便的；能更快地达到目的的方法是存在的（在微分学中再去講述）。

$$f(c)=C^{①}.$$

証明 为确定起見,我們算作

$$A<B, \text{因而 } A<C<B.$$

考慮在区間 $[a, b]$ 上的一个輔助函数 $\varphi(x)=f(x)-C$。这函数在这区間上是連續的并且在它的两端点处取不同的符号:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0, \quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

于是由第一定理,在 a 与 b 之間可求得一点,c,使得 $\varphi(c)=0$,即

$$f(c)-C=0 \text{ 或 } f(c)=C,$$

这就是所要証明的。

由是我們已建立了在区間內連續的函数 $f(x)$ 的重要性質:当函数从一个数值变到另一个数值时,它至少要經过每一个中間值一次。

这个性質,驟然看来,好象揭露了函数的連續性的实質。可是不难作出一些也具有这种性質但显然是不連續的函数。例如,函数[第 **67** 段,3)]

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}(x\neq 0), f(0)=0$$

在任何含有間断点 $x=0$ 的区間內总可取得由 -1 到 $+1$ 所有一切可能的值[②]。

从已証明的連續函数的性質得出(实际上与它等价的)这样的一个:

推論 若函数 $f(x)$ 在任何区間 $\mathscr{X}$(閉的或非閉的,有限的或无穷的)上是有定义的并且是連續的,則它所取得的数值也完全充

---

① 显然,波尔察諾-哥西第一定理是这定理的特例:若 A 与 B 异号,則可以取零值作为 C。

② 无怪乎波尔察諾还着重指出了,所說的这个性質是連續性的一个結果,但决不能把它当作連續性定义的基础。

满着某一区間。

用$\mathscr{Y}$表示函数值的集$\{f(x)\}$。設

$$m=\inf\mathscr{Y},\quad M=\sup\mathscr{Y}①$$

并且 l 是m与M之間的任一数:

$$m<l<M.$$

于是一定可求得函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ (x_1 与 x_2 取自区間$\mathscr{X}$內) 使得

$$m\leqslant f(x_1)<l<f(x_2)\leqslant M;$$

这可由数集的确界定义推出来。但由已証明的定理在 x_1 与 x_2 之間存在有这样的数值 $x=x_0$(它显然也属于$\mathscr{X}$), 使得 $f(x_0)$恰好等于 l; 因此, 这个数值在集$\mathscr{X}$內。

由此可見, $\mathscr{X}$本身是一个以m与M为端点的区間(两端点本身可否属于区間要看情形来决定; 參考第 73 段)。

在第 61 段內我們已看出, 在单调函数的情形下剛才所述的函数的性质引出了它的連續性質。但不是一般情形下都如此, 上面所举的例子就說明了这一点。

附注 就所考虑的函数是整多項式的特殊情形来說, 上面两个定理早在未得其一般形式的严格証明以前就发表了。例如, 在欧拉的"分析引論"中我們可找到 (就整多項式說) 本段中所述定理的完全陈述, 但沒有可靠的論証; 这一定理后来被应用到解决代数方程的实根存在問題[參閱第 69 段]②。欧拉和其他作者一样有时也利用了几何的見解。最后, 我們还要提到, 拉格朗日③曾直接从第 68 段中以因式分解为基础的定理 (就多項式而言) 的解析証明出发, 創立了"关于各种次数的数字方程的解法的理論"。

71. 反函数的存在性 应用前段中已研究过的連續函数性质

① 提醒讀者, 如果集$\mathscr{Y}$不是有上 (下) 界的, 則我們已在第 6 段中規定令 $\sup\mathscr{Y}=+\infty$ ($\inf\mathscr{Y}=-\infty$)。

② 俄文版第 44—46 頁 (參閱第 21 段中的底注)。

③ 拉格朗日 (1736—1813) 是法国的大数学家兼力学家。

我們来确定在某些假設下单值反函数的存在性与連續性[参閱第 23 段]。

定理 設在某一区間$\mathscr{X}$内函数 $y=f(x)$ 是确定的，单調上升(下降)[①] 并且是連續的。于是在这函数的数值的对应区間$\mathscr{Y}$内存在有单值反函数 $x=g(y)$，它也是单調上升(下降)的并且是連續的。

証明　我們只就上升函数的情形来討論。在前面我們已看出[参閱前面的推論]，連續函数的数值 $f(x)$ 充滿着某一个区間$\mathscr{Y}$，因而对于这个区間的每个数值 y_0 至少可求到($\mathscr{X}$中)一个这样的数值 x_0，使得

$$f(x_0)=y_0.$$

但由这函数的单調性这样的数值只能有一个：如果 x 大于或小于 x_0，則 $f(x)$ 也对应地大于或小于 $f(x_0)$。

把这个数值 x_0 与在$\mathscr{Y}$中任意取的 y_0 相对应，我們得到单值函数

$$x=g(y),$$

它是函数 $y=f(x)$ 的反函数。

不难指出，这个函数 $g(y)$ 也象 $f(x)$ 一样单調上升。設

$$y'<y'' \text{ 与 } x'=g(y'),\ x''=g(y'');$$

于是由函数 $g(y)$ 的定义同时有

$$y'=f(x') \text{ 与 } y''=f(x'').$$

假若 $x'>x''$，則根据函数 $f(x)$ 的上升性也会有 $y'>y''$，但这与条件相矛盾。也不能有 $x'=x''$，因为如果这样，那就也会有 $y'=y''$，这也与条件相矛盾。由此可見，只能有不等式 $x'<x''$，所以 $g(y)$ 确实是上升的函数。

---

① 这里是指狭义的单調上升(下降)(在这里这是很重要的)。

最后，要証明函数 $x=g(y)$ 的連續性，只要引証第 61 段中的定理，这定理中的条件現在是滿足的：所說的函数是单調的并且它的数值显然充滿着区間$\mathscr{X}$[①]。

利用已証明的定理可以重新建立許多我們已知道的結果。

例如，如果把这定理应用于定义在区間$\mathscr{X}=[0, +\infty)$ 的函数 x^n（n 是自然数），則得到

$$x=\sqrt[n]{y} \quad (y \text{ 在 } \mathscr{Y}=[0, +\infty))$$

的算术根的存在性与連續性。

72. 关于函数的有界性的定理 若函数 $f(x)$ 对于某一有限的区間內所有 x 的数值是确定的（因此，它取有限的数值），我們还不能推出函数必須是有界的，即不能推出函数所取的数值的集合 $\{f(x)\}$ 是有界的。例如，設 $f(x)$ 是这样定义的：

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ 当 } 0<x\leqslant 1, \text{ 并且 } f(0)=0;$$

这函数只取有限的数值，但它是无界的，因为当 x 逼近于零时它可取得任意大的数值。順便指出，在半开区間 $(0, 1]$ 內它是連續的，但在 $x=0$ 处有一間断。

对于在閉区間上連續的函数情形却有所不同。

維尔斯德拉斯第一定理 若函数 $f(x)$ 在閉区間$[a, b]$上是确定的并且是連續的，則它是有上下界的，就是說，存在有这样两个有限的常数 m 与 M，使得 $a\leqslant x\leqslant b$ 时有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

証明从反面来进行：假定当 x 在区間$[a, b]$上变化时函数 $f(x)$ 是无界的，譬如說，无上界。

在这情形下对于每一个自然数 n 可在区間 $[a, b]$ 上求得这样

① 不論从$\mathscr{X}$內取怎样的 x，只要令 $y=f(x)$ 便可使得函数 $g(y)$ 对于这个 y 的数值恰好是所取的 x。

一个数值 $x=x_n$，使得

$$f(x_n)\geqslant n. \tag{3}$$

根据波尔察諾-維尔斯德拉斯預备定理[第51段]，从序列$\{x_n\}$中可分出部分序列$\{x_{n_k}\}$，收斂于有限的极限：

$$x_{n_k}\to x_0 \ (\text{当 } k\to+\infty),$$

并且显然 $a\leqslant x_0\leqslant b$。由于函数在点 x_0 处的連續性，于是也应有

$$f(x_{n_k})\to f(x_0),$$

但这是不可能的，因为从(3)式推得

$$f(x_{n_k})\to+\infty.$$

所得的矛盾就証明了本定理。

73. 函数的最大值与最小值 我們知道，一个无穷的数集，即使是有界的，也可以沒有最大的(最小的)元素。如果函数 $f(x)$ 在 x 的某一变化区間內是确定的并且甚至是有界的，那末在它的数值所組成的集$\{f(x)\}$中也可以沒有最大的(最小的)数值出現。在这情况下函数$f(x)$的数值在这区間內不能达到上(下)确界。例如，函数

$$f(x)=x-E(x)$$

就是这个样子(在图29中画出了它的图形)。当x在任何区間$[0,b]$($b\geqslant1$)上变化时函数值的上确界是1，但1是不能达到的数值，所以函数沒有最大的值。

讀者想必已明白，这情况是因所考察的函数当x取自然数值时具有間断点而引起的。实际上，对于在閉区間上連續的函数有：

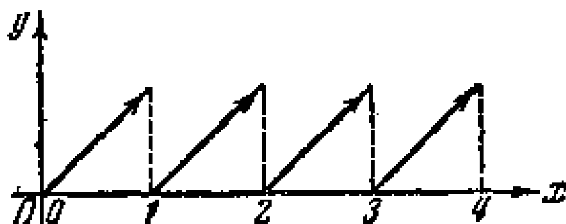


图29.

維尔斯德拉斯第二定理 若在閉区間$[a,b]$上函数$f(x)$

是确定的并且是連續的，则在这区間上它必达到其上确界与下确界。

換句話說，在区間$[a, b]$上可求得这样的两点x_0与x_1，使得$f(x_0)$与$f(x_1)$两数值分別为函数$f(x)$的全部数值中的最大者与最小者。

証明　令

$$M=\sup\{f(x)\};$$

依前面的定理，这是有限的数值。假定（与需要証明的事实相反）总有$f(x)<M$，就是說，$f(x)$不能达到上界M。在这情形下可以考察輔助函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}.$$

因为由假設这里的分母不为零，所以这函数是連續的，因而（由前一定理）是有界的：$f(x)\leqslant\mu(\mu>0)$。但由此不难得到

$$f(x)\leqslant M-\frac{1}{\mu},$$

就是說，小于M的数$M-\frac{1}{\mu}$是函数$f(x)$的数值的上界，然而这是不可能的，因为M是这些数值的上确界。所得的矛盾証明了定理：在区間$[a, b]$上可求得这样的数值x_0，使得$f(x_0)=M$是$f(x)$的全部数值中的最大者。

同样可以証明关于最小值的断言。

我們要注意，上面所引进的証明是純粹的"存在性的証明"，但沒有給出任何計算数值$x=x_0$的方法。以后［在第七章 §1 內］在对函数作更多的假設下，我們会学到实际求函数达到最大或最小值的自变量的数值。

若函数$f(x)$当x在任何一区間$\mathscr{X}$內变化时是有界的，則它在这区間內的上确界与下确界之差

$$\omega = M - m$$

叫做它在这区間内的振幅。也可以这样来定义，振幅 ω 为差 $f(x'')-f(x')$ 的絕对値的上确界，其中 x' 和 x'' 取区間 $\mathscr{X}$ 中彼此独立的任意値：

$$\omega = \sup_{x', x''} \{ |f(x'') - f(x')| \}.$$

当我們所談的是在有限的閉区間 $\mathscr{X} = [a, b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 时，則由已証明的定理推知，函数的振幅就是它在这区間上的最大値与最小値之差。

在这情形下函数値的区間 $\mathscr{Y}$ 是閉区間 $[m, M]$，而振幅就是它的长度。

74. 一致連續性的概念 若函数 $f(x)$ 在某一区間 $\mathscr{X}$（閉的或非閉的，有限的或无穷的）內是确定的幷且在这区間的点 x_0 处是連續的，則

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

或者（"用 ε-δ 語言，第 60 段）：对于任一数 $\varepsilon > 0$，可求得这样的数 $\delta > 0$，使得

$$\text{由 } |x - x_0| < \delta \text{ 推出 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

現在假定函数 $f(x)$ 在全区間 $\mathscr{X}$ 內是連續的，就是說，在这区間的每一点 x_0 处是連續的。于是对于 $\mathscr{X}$ 內的每一点 x_0，依照給定的 ε 可个别地求得在上述意义下与它相对应的 δ。当 x_0 在 $\mathscr{X}$ 的范圍內改变时，即使 ε 不变，一般說来数 δ 是要改变的。只要一看图 30 就会相信：在函数变化得慢的地方（图綫表現为平坦的曲綫时）所适用的数 δ 比在函数变化得快的地方（在那里图綫陡升或陡降）所适用的 δ 要大得多。換句話說，数 δ 一般說来不仅依賴于 ε，而且也依賴于 x_0。

如果只論及 x_0 的有限多个数値（当 ε 不变时），則由有限多个对应的 δ 的数値中自然可以选得最小的一个，而这一个数値 δ 显

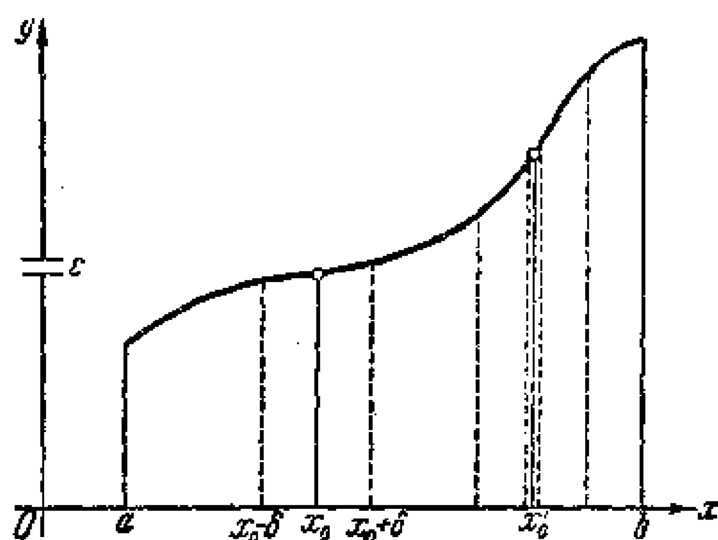


图30.

然同时适用于所考虑的全部点 x_0。

可是，对于包含在区間$\mathscr{X}$内的无穷多个数值 x_0 来說，却不能这样去推断：（当 ε 不变时）与这无穷多个 x_0 的数值相对应的，是无穷多个 δ 的数值．在这些数值中可能有要多小就多小的数值。因此，对于在区間$\mathscr{X}$内連續的函数 $f(x)$ 来說，就发生了一个問題：当給定 ε 时，是否存在有这样一个 δ，它适用于这区間内所有一切的点 x_0？

如果对于任一个数 $\varepsilon>0$，可求得这样一个数 $\delta>0$，使得

由 $|x-x_0|<\delta$ 可推出 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，

而不論点 x 与 x_0 落在所考慮的区間$\mathscr{X}$什么地方，我們就說，函数 $f(x)$ 在区間$\mathscr{X}$内是一致連續的。

在这情况下数 δ 只依賴于 ε，并且在选定点 x_0 以前就可把它指出：δ 同时适用于所有的 x_0。

一致連續性的意思是：在区間的各个部分只要变元的两个数值接近到同样一种程度，就可以使对应的函数值达到所需的接近程度。

可以举例說明，函数在一区間的所有点处的連續性不一定能保証它在这区間的一致連續性。例如，設当 $0<x\leqslant\frac{2}{\pi}$ 时 $f(x)=$ $=\sin\frac{1}{x}$，$x=0$ 这个值是除外的。在这情形下 x 的变域是非閉的区間$\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$，而在它的每一点处函数是連續的。現在令 $x_0=$

$=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x=\frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是任一自然数; 于是

$$f(x_0)=\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=\pm 1,\ f(x)=\sin n\pi=0,$$

由此可見, 虽然 $|x-x_0|=\frac{1}{n(2n+1)\pi}$ 可以随着 n 的增大而变得任意小, 但总有

$$|f(x)-f(x_0)|=1.$$

在这里虽然由于函数的連續性对于 $\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$ 中每一个个别的数值 x 都存在着相应的 δ, 可是当 $\varepsilon=1$ 时决不能求得一个 δ 使对于 $\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$ 中所有的点 x_0 同时都能适用!

75. 关于一致連續性的定理 极可注意的是, 在閉区間 $[a,b]$ 上却不再有类似于上面的情况, 下面的定理說明了这件事。

康脫定理[①] 若在閉区間 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 是确定的并且是連續的, 則在这区間上它也是一致連續的。

証明从反面来进行。假定对于某一确定的数 $\varepsilon>0$ 不存在有一致連續的定义中所說的数 $\delta>0$。在这情形下, 不論取怎样的数 $\delta>0$, 总可在区間 $[a,b]$ 上求得这样的两个数值 x 与 x',

$$\text{虽然 } |x-x'|<\delta \text{ 但是 } |f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon.$$

現在取正数序列 $\{\delta_n\}$ 使 $\delta_n\to 0$。根据所述, 对于每一个 δ_n 可在 $[a,b]$ 中求得数值 x_n 与 x'_n (它們起着 x 与 x' 的作用) $(n=1,2,\cdots)$,

$$\text{虽然 } |x_n-x'_n|<\delta \text{ 但是 } |f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon.$$

由波尔察諾-維尔斯德拉斯預备定理 [第 **51** 段], 从有界序列 $\{x_n\}$ 内可以取出收斂于区間 $[a,b]$ 中某一点 x_0 的部分序列。为了不使記号繁瑣, 我們就認为序列 $\{x_n\}$ 本身已收斂于 x_0。

因为 $x_n-x'_n\to 0$ (这可由 $|x_n-x'_n|<\delta_n$ 与 $\delta_n\to 0$ 推来), 所

① 康脫(G. Cantor)(1845—1918)是德国的著名数学家, 是現代点集論的創始人。

以序列$\{x'_n\}$同时也收斂于x_0。于是由函数在点x_0处的連續性,应該有

$$f(x_n)\to f(x_0) \text{ 与 } f(x'_n)\to f(x_0),$$

因此

$$f(x_n)-f(x'_n)\to 0,$$

但这与对于一切的数值n有

$$|f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon$$

的事实相矛盾。定理已被証明。

从已証明的这个定理直接得出对我們以后有用的一个推論。

推論 設函数$f(x)$在閉区間$[a,b]$上是确定的并且是連續的。于是对于給定的$\varepsilon>0$可求得这样的$\delta>0$,只要把区間任意地分成其长度都小于δ的部分区間,則在每一个部分区間中函数的振幅都会小于ε

事实上,如果依給定的$\varepsilon>0$选取在一致連續的定义中所說的那个数作为δ,則在长度小于δ的部分区間中函数的任意两个数值之差按絕对值都小于ε。特别,在所說的部分区間中如取函数的最大值与最小值,則它們的差(即函数在这部分区間中的振幅,見第 **73** 段)也要小于ε。

在五十年的期間內,連續函数的一些基本性质,从比較"明显的"性质起到上定理所建立的一致連續的精細性质止,一个个地被証明了。我們再一次着重指出,这些証明只在十九世紀后半期发展了的实数的算术理論基础上才得到了应有的严格性。

第五章　单变量函数的微分法

§1. 导数及其計算

76. 动点速度的計算問題　在叙述微积分学的基础时，我們要請讀者注意：微积分学的思想早在十七世紀（也就是說，远在我們前几章学过的精确的理論出現以前）就已萌芽了。一直要到这一卷最后一章我們才有可能再来叙述数学分析前史中的重要关鍵，并且介紹牛頓和萊布尼茲两个偉大数学家的功績，他們創造了确乎新穎的計算方法，而完成了先輩的工作。以下我們將按照現代所要求的严格性来叙述，而不是按照問題的历史程序。

然而为了介紹微分学，我們先在本段中考虑速度問題，而在下段中考虑切綫問題；这两个問題在历史上都是与微分学的基本概念——后来叫做导数的——的形成有关的。

我們先从一个特例入手，就是考虑具有重量的質点的自由降落（为了可以不計算空气的阻力，假定它在眞空中降落）。

若时間 t（秒）是从开始降落的时刻算起的，則在这一段时間内質点所經过的路程 s（米），依照已知的公式，可以表示为

$$s=\frac{gt^2}{2},\tag{1}$$

式中 $g=9.81$。由此出发，要来确定該点在某一时刻 t，即当动点在位置 M 时（图 31）的运动速度 v。



图31.

給变量 t 加一增量 Δt，并且考虑时刻 $t+\Delta t$，这时动点在位置 M_1 处。我們用 Δs 来表示在这段时間 Δt 内路程的增量 MM_1。

在(1)中用 $t+\Delta t$ 代换 t，则得到路程的新值的表达式

$$s+\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2,$$

由此

$$\Delta s=\frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t+\Delta t^2).$$

用 Δt 除 Δs，我們就得出动点在区間 MM_1 内降落的平均速度：

$$v_{cp}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

我們可以看到，这个速度是随着 Δt 的变化而变化的，并且所經过的 Δt 这段时間越短，它就越能更好地表示出降落的点在这一时刻 t 的状态。

当 Δt 趋向于零时，質点在时間 Δt 内的平均速度 v_{cp} 的极限 v 称为質点在时刻 t 的速度。

在我們的情况下，显然

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

在一般的情形，比如說，在質点的直綫运动中，速度 v 也可以类似地算出。質点的位置是由它与某一始点 O 的距离 s 来确定的；这个距离就叫做該点所經过的路程。时間 t 是从某一开始的时刻算起，而且在开始的时刻，質点并不一定要在 O 处。当已經知道了运动方程 $s=f(t)$ 的时候，运动就作为是完全給定了。从这个方程可以确定質点在任一时刻的位置；在剛才考虑过的例子中，方程(1)就起了这种作用。

要确定質点在所給的时刻 t 的速度 v，象前面那样必須給 t 以一增量 Δt；于是对应地路程 s 就增大了 Δs，比值

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

表示出在时間 Δt 内的平均速度 v_{cp}，由此取极限，就得到在时刻 t

的瞬时速度 v:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{cp}=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

以下我們考慮另外一个重要的問題，我們会看到，它也将引入同样的极限运算。

77. 作曲綫的切綫的問題 設已給曲綫 (K)（图 32）及其上一点 M；我們来建立在曲綫上点 M 处的切綫的概念。

在中学課程里，圓的切綫定义为：“与曲綫只有一个公共点的直綫”。但是这一定义具有特例的性質，沒有說出問題的本質。例如，若想将这一定义应用于抛物綫 $y=ax^2$（图 33 a）上，那末在原点 O 处两个坐标軸就都会符合于这个定义；但是——大概讀者也能立刻明白——事实上只有 x 軸是抛物綫在点 O 处的切綫！

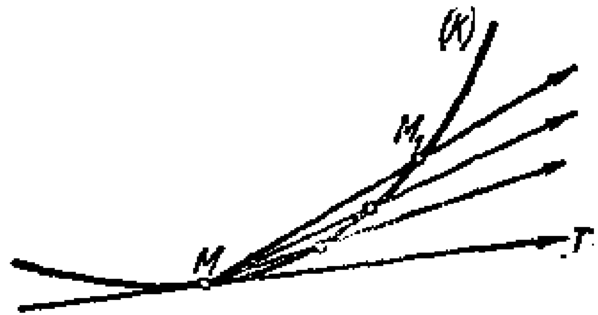


图 32.

現在我們来給出切綫的一般定义。在曲綫 (K) 上（图 32）除去点 M 以外再取一点 M_1，并且作割綫 MM_1。当点 M_1 沿着曲綫移

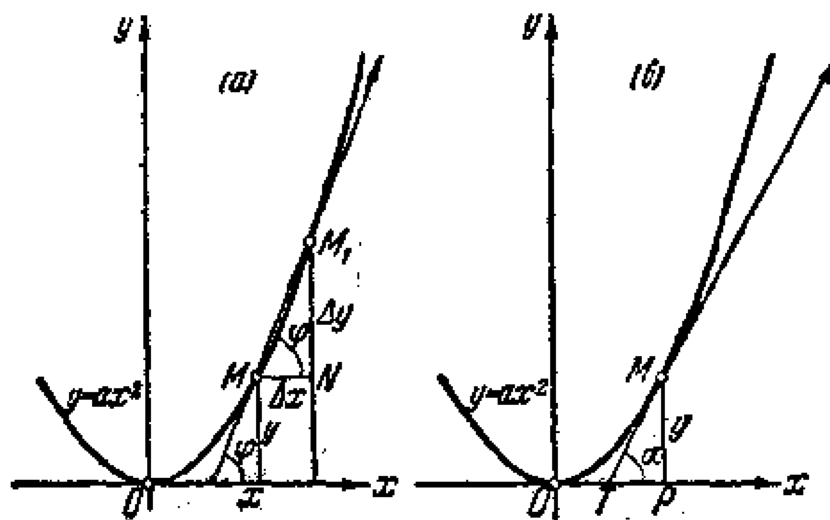


圖 33.

动时，这割綫将繞着点M而旋轉。

当点M_1沿着曲綫(K)而趋向于M时，割綫MM_1的极限位置MT就叫做曲綫(K)在点M处的切綫。这个定义的意思就是：只要弦MM_1趋向于零，$\angle M_1MT$就趋向于零。

現在，我們应用这个定义去求在抛物綫$y=ax^2$上任意点$M(x, y)$处的切綫来作为一个例子。因为切綫通过这点，所以要想确定它的位置，只要知道它的斜率就行了。我們于是就提出求M点处切綫斜率$\operatorname{tg}\alpha$这一問題。

給横坐标x以增量Δx，就由曲綫上的M点轉到M_1点，它的横坐标是$x+\Delta x$，縱坐标是

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2$$

（图33a）。割綫MM_1的斜率$\operatorname{tg}\varphi$可由直角三角形MNM_1来确定。三角形的直角边MN等于横坐标的增量Δx，而直角边NM_1显然是縱坐标的对应的增量

$$\Delta y=a(2x\cdot\Delta x+\Delta x^2),$$

因此

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+a\Delta x.$$

要得到切綫的斜率，容易理解，需要去求当$\Delta x\to 0$时上式的极限，因为$\Delta x\to 0$等价于弦$MM_1\to 0$。这时$\varphi\to\alpha$，而（由于函数$\operatorname{tg}\varphi$的連續性），$\operatorname{tg}\varphi\to\operatorname{tg}\alpha$。

这样，我們求得結果：

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\Delta x)=2ax^{①}.$$

① 我們順便指出，从这里可以推得实际去作抛物綫的切綫的簡法。就是，在$\triangle MPT$（图33$б$）中綫段

$$TP=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{ax^2}{2ax}=\frac{x}{2},$$

因此T是綫段OP的中点。于是，要想作出抛物綫上在点M处的切綫，就只要平分綫段OP，再将它的中点和M連接起来就是了。

在任意曲綫的情形，設曲綫的方程是

$$y=f(x),$$

我們也可以用相似的方法来确定切綫的斜率。設与横坐标的增量 Δx 相对应的縱坐标的增量是 Δy，則比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示割綫的斜率 $\operatorname{tg}\varphi$。求这比值当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，我們就得到切綫的斜率：

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

78. 导数的定义 比較一下我們在解决上面所考虑的两个基本問題时所做的运算，就容易看出，在这两种情形下——若撇开变量的具体意义上的差别——本質上是做了同样一件事：即将函数的增量除以自变量的增量，再計算比值的极限。用这种方法我們就得到微分学的基本概念——导数的概念。

設函数 $y=f(x)$ 定义在区間 $\mathscr{X}$ 內。从自变量的某一数值 $x=x_0$ 出发，加一增量 $\Delta x\gtreqless 0$，而使自变量不超出区間 $\mathscr{X}$，因而新值 $x+\Delta x$ 也屬于这个区間。于是函数值 $y=f(x_0)$ 就变成新値 $y+\Delta y=$ $=f(x_0+\Delta x)$，即得到了增量

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

若函数的增量 Δy 与引起这个增量的自变量的增量 Δx 的比值的极限当 Δx 趋向于零时存在，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，那末这个极限就叫做函数 $y=f(x)$ 当給定值 $x=x_0$ 时(或在給定的点 $x=x_0$ 处)对于自变量的导数[①]。

① "导数"这个名詞在十八和十九两个世紀之交的时候就已被拉格朗日采用了。

这样，当給定了值 $x=x_0$ 时，导数——如果存在——是一个确定的数①，又若导数在整个区間$\mathscr{X}$内存在，就是說，若导数对于这个区間內的每一个 x 的数值都存在，則它仍是 x 的函数。

应用剛才引入的概念，則在 76 段中关于动点的速度所講的話就可以概括地說成：

速度 v 是动点所經过的路程 s 对于时間 t 的导数。

若在較广泛的意义上去理解"速度"这个名詞，就可以把导数永远地解釋为某一种"速度"。就是說，有了自变量 x 的函数 y 后，就可以提出变量 y 对于变量 x（当 x 的值已給定时）的变化速度的问题。

若加于 x 的增量Δx引起了 y 的增量Δy，則与 76 段类似，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就可以作为，当 x 变动一个数量 Δx 时，y 对于 x 的变化的平均速度

$$V_{cp}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当 Δx 趋向于零时，这个比值的极限自然就叫做 y 在給定的 x 值时的变化的速度：

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}V_{cp}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

就是，剛好是 y 对于 x 的导数。

在 77 段中我們曾經考虑过由方程 $y=f(x)$ 所給定的曲綫，而且解决了在曲綫上一定点引一切綫的問題。现在我們可以把所得的結果叙述如下：

切綫的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$ 是縱坐标 y 对于横坐标 x 的导数。

导数的这一几何解釋时常很有用处。

① 上面所講的极限暫时限于有限的情形〔参看 87 段〕。

除了前面考虑过的例子以外，我們还再举几个能說明导数概念的作用的例子。

假定运动的速度 v 不是常量，而它本身也是随着时間 t 而变化的：$v=f(t)$，現在来研究“速度变化的速度”，并称之为加速度。

就是，假定对应于时間的增量 Δt、速度的增量是 Δv，則比值

$$a_{cp}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

表示在时間 Δt 內的平均加速度，而它的极限就給出在給定时刻运动的加速度：

$$a=\lim_{\Delta t\to 0} a_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

因此，加速度是速度对于时間的导数。

現在我們来考虑連續地沿着某一条直綫段質量（其实是沿着一条極軸，不过我們忽略掉了軸的寬度和厚度！）的“綫性”分布。設在这一綫段上点的位置是由横坐标 x 来决定的，x 是从綫段的端点算起（例如，按厘米計算）。則沿着区間 $[0, x]$ 所分布的質量 m 将依賴于 x：$m=f(x)$。区間終点的横坐标 x 的增量 Δx 将会引起質量的增量 Δm：換句話說，Δm 是緊靠着 x 的区間 $[x, x+\Delta x]$ 上的質量。于是在所指定的这个区間上質量分布的平均密度可以用比值

$$\rho_{cp}=\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

表示出来。当区間縮成一点时，即是当 $\Delta x\to 0$ 时，这个平均密度的极限

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\rho_{cp}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

就叫做在点 x 的（綫性）密度：这一密度是質量对于横坐标的导数。

現在来看热学方面，并用导数来建立物体在所給温度时的热容量的概念。

我們用下面的記号来表示在問題中所引入的物理量：θ 是温度

(摄氏温度計)，W 是使物体从 $0°$ 加热到 $\theta°$ 时所需要的热量(卡)。显然，W 是 θ 的函数：$W=f(\theta)$。給 θ 以某一增量 $\Delta\theta$，于是 W 也得到一个增量 ΔW。物体从 $\theta°$ 加热到 $(\theta+\Delta\theta)°$ 时的平均热容量就是

$$c_{cp}=\frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

但是一般地說，当 $\Delta\theta$ 变化时，平均热容量也是变化的，所以我們就不能把平均热容量当作在一給定的温度 θ 时的热容量。要想得着后者，必需要把上式取极限：

$$c=\lim_{\Delta\theta\to 0}c_{cp}=\lim\frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

因此，可以說，物体的热容量是热量对于温度的导数。

导数的一切应用(很容易再多举一些)十分鮮明地显示出这一事实，就是导数与各个知識領域中的基本概念有本質的联系，并且帮助了这些概念的建立。

导数的計算、它的性質的研究和应用就是微分学的主要研究对象。

导数常用以下各种符号来表示：

$$\frac{dy}{dx}\quad 或\quad \frac{df(x_0)}{dx}[1]\quad (萊布尼茲);$$

$$y'\quad 或\quad f'(x_0)\quad (拉格朗日);$$

$$Dy\quad 或\quad Df(x_0)\quad (哥西)。$$

此后我們主要地要使用拉格朗日的簡单的記号。如果用的是函数記号[参看，第二縱行]，那末在括弧内的字母 x_0 正好就是指的在計算导数时的那个自变量的数值。最后，我們要指出，在某种情

① 我們暂时把萊布尼茲的記号看作是整个符号；以下我們就会看到，它也可以看作是一个分数。我們不采用牛頓的記号：$\dot{y}$，在这个記号里，假定了作为自变量的就是时間(关于这点，請参看 224 段)。

况中，可能会发生，对于那个变量而取导数(即对应于那个变量去求"函数变化的速度")这一問題，这时我們就用下标的形式指出这个变量：

$$y'_x,\quad f'_x(x_0),\quad D_x y,\quad D_x f(x_0),$$

此处下标 x 与自变量的那个特殊值 x_0 (在 x_0 处計算导数) 是无关的。

(在某种意义上，可以說，整个符号

$$\frac{df}{dx},\ f'\quad 或\quad f'_x,\ Df\quad 或\quad D_x f$$

就是导函数的**函数記号**。)

現在，利用剛才引入的表示导数的符号，就可以把前面得到的某些結果写下。对于运动的**速度**就有

$$v=\frac{ds}{dt}\qquad 或\qquad v=s'_t,$$

对于**加速度**

$$a=\frac{dv}{dt}\qquad 或\qquad a=v'_t.$$

类似地，曲綫 $y=f(x)$ 的切綫的**斜率**就可写为：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}\qquad 或\qquad \operatorname{tg}\alpha=y'_x$$

以及其他等等。

79. 計算导数的例 我們来計算一些初等函数的导数作为例子。

1° 首先我們可以看到一个明显的結果：若 $y=c=$ 常数，則不論 Δx 如何，恒有 $\Delta y=0$，所以 $y'=0$；又若 $y=x$，則 $\Delta y=\Delta x$ 而 $y'=1$。

2° **幂函数**：$y=x^\mu$ (其中 μ 是任意实数)。x 的变域依賴于 μ；这个变域在 22 段，2° 中已經指出过了。我們有(当 $x\neq 0$ 时)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

如果利用在65段，3）中已算出的极限，就得到

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}\text{ .}^{①}$$

特殊情形：

若 $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$， 则 $y'=(-1)\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$，

若 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$， 则 $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3° 指数函数：$y=a^x\,(a>0,\ -\infty<x<+\infty)$。这里

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

利用在65段，2）中已算出的极限，便得：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a.$$

特别：

若 $y=e^x$， 则 $y'=e^x$.

因此，指数函数（当 $a>1$ 时）的增大速度是与函数值成正比的：当函数值增到越大时，它在这一时刻也就上升得越快。这就给指数函数的上升性以精确的描述。

4° 对数函数：$y=\log_a x\ \ (0<a\neq 1,\ 0<x<+\infty)$。在这时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

利用在65段，1中已算出的极限：

① 若是 $\mu>1$，则容易直接求得在 $x=0$ 时，导数的值：$y'=0$。

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}.$$

特别，对于自然对数就得出非常简单的结果：

$$\text{当}\quad y=\ln x\quad\text{时有}\quad y'=\frac{1}{x}.$$

这也就是在理论研究中宁愿采用自然对数的一种根据（虽然这在实质上并不是什么新的根据）。

对数函数（当 $a>1$ 时）的增大速度是与变元的值成反比的，并且当变元无限增大时，增大速度就保持着正值而趋向于零，这些情况很好地说明了对数函数上升的特性。

5° 三角函数：假定 $y=\sin x$，于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

利用 $\cos x$ 的连续性与已知的[34 段，5)]极限 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，我们得到

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x^{①}.$$

类似地我们得到：

$$\text{若}\quad y=\cos x,\quad\text{则}\quad y'=-\sin x.$$

在 $y=\operatorname{tg} x$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$$

---

① 注意，这一公式的简洁性应当归功于用弧度来做角度的单位。如果我們用度数来做单位，則正弦对于角度的比值的极限就不会是 1，而很容易看出是 $\frac{\pi}{180}$，于是我們就会有

$$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cos x.$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}.$$

由此，和上面一样，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

类似地，

$$\text{若}\quad y=\operatorname{ctg} x,\quad\text{则}\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

80. 反函数的导数 在求反三角函数的导数之前，我们先来证明下面的普遍的定理。

定理 假定：1)函数 $f(x)$ 满足 **71** 段中反函数的存在定理中的条件，2)函数在点 $x=x_0$ 有有限的且异于零的导数 $f'(x_0)$。那末对于反函数 $x=g(y)$ 在对应点 $y_0=f(x_0)$，导数也是存在的，且等于 $\frac{1}{f'(x_0)}$.

证明 给数值 $y=y_0$ 以任意的增量 Δy，则函数 $x=g(y)$ 也得到对应的增量 Δx。注意，当 $\Delta y\neq 0$ 时，由于函数 $y=f(x)$ 的单值性，也有 $\Delta x\neq 0$。我们有

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

现在若是 Δy 依任意的规律趋向于零，则——由于函数 $x=g(y)$ 的连续性——增量 Δx 也要趋向于零。但那时上面等式右边的分母就趋向于极限 $f'(x_0)\neq 0$，因此，左边的极限存在，且等于其倒数 $\frac{1}{f'(x_0)}$；它就是导数 $g'(y_0)$.

这样，就有简单的公式：

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

我们容易去说明它的几何意义。我们知道，导数 y'_x 是角 α 的正切，而 α 是函数 $y=f(x)$ 的图形上的切线与 x 轴间所夹的角。但是反函数 $x=g(y)$ 也有同一个图形，不过它的自变量却放置在 y 轴上了，因此导数 x'_y 等于同一切线与 y 轴间的角 β 的正切（图 34）。这样，上面导出的公式就转化成为大家知道的和为 $\frac{\pi}{2}$ 的两角 α 与 β 的正切之关系式

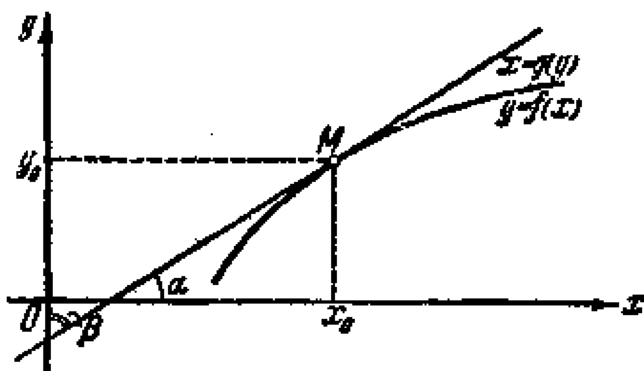


图 34.

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

取 $y=a^x$ 为例。它的反函数就是 $x=\log_a y$. 因为（参看 3°）$y'_x=a^x\cdot\ln a$，所以按照我们的公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{a^x\cdot\ln a}=\frac{\log_a e}{y},$$

与 4° 相符合。

现在我们来计算反三角函数的导数，为了方便起见，我们把变量 x 及 y 对调一下，而把已经证明了的公式改写成为

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

6°. 反三角函数：考虑函数 $y=\arcsin x\,(-1<x<1)$，其中 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$。它是函数 $x=\sin y$ 的反函数，函数 $x=\sin y$ 在指定的 y 值处有正值的导数 $x'_y=\cos y$。在这种情况下导数 y'_x 也存在，而且依照我们的公式，有

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

根号前我们取正号，这是因为 $\cos y>0$。

我们除去了数值 $x=\pm 1$，因为在它的对应值 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 处导数 $x'_y=\cos y=0$。

函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x(-\infty<x<+\infty)$ 是函数 $x=\operatorname{tg} y$ 的反函数。依我们的公式，有

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

类似地可以得到：

对于 $y=\arccos x$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1),$$

对于 $y=\operatorname{arc\,ctg} x$

$$y'=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

81. 导数公式汇集 现在把我们求出的一切公式汇集如下：

1. $y=c$ $\qquad y'=0$
2. $y=x$ $\qquad y'=1$
3. $y=x^{\mu}$ $\qquad y'=\mu x^{\mu-1}$

   $y=\frac{1}{x}$ $\qquad y'=-\frac{1}{x^2}$

   $y=\sqrt{x}$ $\qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y=a^x$ $\qquad y'=a^x\cdot\ln a$

   $y=e^x$ $\qquad y'=e^x$
5. $y=\log_a x$ $\qquad y'=\frac{\log_a e}{x}$

   $y=\ln x$ $\qquad y'=\frac{1}{x}$
6. $y=\sin x$ $\qquad y'=\cos x$

7. $y=\cos x$ $\qquad y'=-\sin x$

8. $y=\operatorname{tg} x$ $\qquad y'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $y=\operatorname{ctg} x$ $\qquad y'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $y=\arcsin x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\arccos x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y=\operatorname{arctg} x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y=\operatorname{arcctg} x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

82. 函数增量的公式 現在我們要証明以后要用到的两个簡单的断言。

設函数 $y=f(x)$ 是确定在区間 $\mathscr{X}$ 內。从这个区間内的定値 $x=x_0$ 出发，用 $\Delta x \gtreqless 0$ 来記 x 的任意增量，不过要加以限制使点 $x_0+\Delta x$ 不超出 $\mathscr{X}$ 范圍以外。于是函数的对应增量就是

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

1° 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有(有限的)导数 $y'_x=f'(x_0)$，則函数的增量可以表示成这一形式

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{2}$$

或簡写为

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{2a}$$

其中 α 是依賴于 Δx 的量，并且隨着 Δx 一同趋向于零。

因为，按导数的定义，当 $\Delta x\to 0$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'_x,$$

故令

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'_x,$$

可见 $\alpha\to 0$. 由此解出 Δy, 即得公式(2a).

因为量 $\alpha\cdot\Delta x$(当 $\Delta x\to 0$ 时)是一个比 Δx 高级的无穷小量，于是利用在 **54** 段中引进的符号，我们的公式就可以改写成为

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x) \tag{3}$$

或

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{3a}$$

附注　迄今为止，我们认为 $\Delta x \gtrless 0$; 而量 α 在 $\Delta x=0$ 时是不确定的。当我们说，在 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to 0$, 我们预先就(象通常那样)假定了 Δx 是依着任意的规律趋向于零的，但却不取零值。现在就令在 $\Delta x=0$ 时 $\alpha=0$; 于是公式(2)当然在 $\Delta x=0$ 时仍是成立。除此以外，关系式

$$\text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时 } \alpha\to 0$$

还可以比以前更广泛地理解，就是说，在 $\Delta x\to 0$ 的过程中，Δx 也可以取零值了。

由已经证明的公式直接推得：

2° 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有(有限的)导数，则函数在这点必定是连续的。

事实上，由(2a)显然地，从 $\Delta x\to 0$ 这关系就引出了 $\Delta y\to 0$。

83. 計算导数的几个最簡单法則　在前几段中我们已经算出了初等函数的导数。在这一段和下一段中我们将要建立一系列的简单法则，有了它们就能去计算任意的(由初等函数经过有限多回的算术运算和迭置而成的)函数[25 段]的导数。

I. 设函数 $u=\varphi(x)$ (在定点 x 处)有导数 u'。我们要证明函数 $y=cu$($c=$常数)(在同一点处)也有导数，而且要计算这一导数。

若自变量 x 得一增量 Δx, 则函数 u 由开始的数值 u 变到数值

$u+\Delta u$ 也得一增量 Δu。而函数 y 的新値就是 $y+\Delta y=c(u+\Delta u)$。由此 $\Delta y=c\cdot\Delta u$，而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\cdot u'.$$

因此，导数存在而且等于

$$y'=(c\cdot u)'=c\cdot u'.$$

这个公式表示出这样的一条法则：常数因子可以挪到导数符号的外面来。

Ⅱ. 設函数 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$（在定点 x 处）有导数 u'，v'。我們要証明函数 $y=u\pm v$（在同一点）也有导数，而且要計算这一导数。

給 x 以增量 Δx；于是 u，v 及 y 也对应地得到增量 Δu，Δv 及 Δy。它們的新値是 $u+\Delta u$，$v+\Delta v$，$y+\Delta y$ 而有关系式：

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v).$$

由此

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

并且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

于是导数 y' 存在并且等于

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

这个結果可以很容易地推广到任意有限項的情形（而且是用同样的方法）。

Ⅲ. 在关于函数 u，v 同样的假定下，要証明函数 $y=u\cdot v$ 也有导数，而且求出它。

同上面一样，对应于增量 Δx 有增量 Δu，Δv 及 Δy；这时 $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$。因此

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

因为由 **82** 段 2°，当 $\Delta x\to 0$ 时也有 $\Delta v\to 0$，于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v',$$

即是，导数 y' 存在且等于

$$y'=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

若 $y=uvw$，并且 u', v', w' 存在，则

$$y'=[(uv)\cdot w]'=(uv)'\cdot w+(uv)\cdot w'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

容易想到，对于 n 个因子的情况我們也类似地有：

$$[\overbrace{uvw\cdots s}^{n}]'=u'vw\cdots s+uv'w\cdots s+uvw'\cdots s+\cdots+uvw\cdots s'.$$

这可以用数学归納法去証明。

IV. 最后，若 u, v 满足前面的假定，此外，v 又异于零，则我們要証明函数 $y=\frac{u}{v}$ 也有导数，而且求出它。

在与前面一样的記号下，便有

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

于是

$$\Delta y=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}\quad 及\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

此处当 Δx 趋向于零时(则同时也有 $\Delta v\to 0$)，我們就可确知导数的存在了：

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

84. 复合函数的导数 現在我們可以建立一条在实际求导数时非常重要的法則，这个法則使得我們在知道了各个組成函数的

导数的时候，就可以計算出复合函数的导数。

V. 設：1)函数 $u=\varphi(x)$ 在某一点 x_0 有导数 $u'_x=\varphi'(x_0)$，2) 函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处有导数 $y'_u=f'(u)$。那末复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在上述的点 x_0 处也有导数，它等于函数 $f(u)$ 的导数与函数 $\varphi(x)$ 的导数的乘积：

$$[f(\varphi(x))]'=f'_u(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$①

或，簡写为

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

为了証明，給 x 以任意的增量 Δx；設 Δu 是函数 $u=\varphi(x)$ 的对应增量，最后設 Δy 是由增量 Δu 引起的函数 $y=f(u)$ 的增量。利用式(2a)，把 x 换成 u，而(2a)改写为：

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u$$

(α 依賴于 Δu 且与它一同趨向于零)。用 Δx 除各項，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

若 Δx 趨向于零，則 Δu 也要趨向于零[82, 2°]，于是我們知道，依賴于 Δu 的量 α 也同样要趨向于零。因此，极限存在：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x,$$

它就是所要求的导数 y'_x。

附注　82 段中有关于在 $\Delta x=0$ 时量 α 的附注，它的效用在这里就表現出来了：当 Δx 是自变量的增量时，我們总可假定它是异于零的，但是当 Δx 换成函数 $u=\varphi(x)$ 的增量时，那末卽使在 $\Delta x\neq 0$ 时，我們也沒有权利設想 $\Delta u\neq 0$。

---

① 要着重指出，符号 $f'_u(\varphi(x_0))$ 是表示函数 $f(u)$ 对于它的变元 u（不是对于 x）在值 $u_0=\varphi(x_0)$ 处算出的导函数之值。

85. 例[①] 先举几个应用法則 I—IV 的例。

1) 考慮多項式:

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

先用法則 II, 再用法則 I, 我們有

$$y'=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-2}x^2)'+(a_{n-1}x)'+(a_n)'=$$
$$=a_0(x^n)'+a_1(x^{n-1})'+\cdots+a_{n-2}(x^2)'+a_{n-1}(x)'+(a_n)'.$$

利用[81 段]公式 1、2、3, 最后得到

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

2) $y=(2x^2-5x+1)\cdot e^x$.

依法則 III

$$y'=(2x^2-5x+1)'\cdot e^x+(2x^2-5x+1)\cdot(e^x)'.$$

根据前例与[81 段]公式 4, 求得

$$y'=(4x-5)\cdot e^x+(2x^2-5x+1)\cdot e^x=(2x^2-x-4)\cdot e^x.$$

3) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$.

这里必須先利用法則 IV, 其次再用法則 I 和 II(以及 81 段公式 6、7):

$$y'=\frac{(x\sin x+\cos x)'(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(x\cos x-\sin x)'}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$
$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$
$$=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}.$$

这里我們是把分子与分母的导数一次就算出来了,而沒有把計算分子或分母导数的步驟一一写出。通过习題必須要做到一般地能立刻写出导数。

計算复合函数的导数的例:

4) 設 $y=\ln\sin x$, 換句話說, $y=\ln u$, 其中 $u=\sin x$. 依法則 V, $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. 导数 $y'_u=(\ln u)'_u=\dfrac{1}{u}$(公式 5)中 $u=\sin x$. 这样,

$$y'_x=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x \quad(\text{公式 }6).$$

5) $y=e^{x^2}$, 即是 $y=e^u$, 其中 $u=x^2$;

$$y'_x=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2x\cdot e^{x^2} \qquad (\text{V; 4 和 3}).$$

---

① 以下用字母 x, y, u, v 来記**变量**,用其他字母記**常量**。

当然，去把被叠置的函数各别地写出来，事实上是不必要的。

6) $y=\sin ax$; $y'_x=\cos ax\cdot(ax)'=a\cdot\cos ax$ (V; 7、1、2).

7) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; $y'_x=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$

$$=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{V};\ 12、3).$$

若遇叠置数重而成的复合函数，则可逐次地应用法则 V 去計算。

8) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}$;

则

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)'_x= \qquad (\text{V};3)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\sec^2\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'_x= \qquad (\text{V};8)$$

$$=\frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}.$$

我們再举几个应用这些法則的例子：

9) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+c})$; $y'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot(x+\sqrt{x^2+c})'_x=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}.$$

10) $y=\frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$; $y'=\frac{1}{c}\frac{1\cdot\sqrt{x^2+c}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}}{(\sqrt{x^2+c})^2}=$

$$=\frac{1}{(x^2+c)^{\frac{3}{2}}}.$$

11) 作为一个习題我們再来研究关于幂-指式 $y=u^v(u>0)$ 的导数的問題，式中 u 与 v 是 x 的函数，在給定的点有导数 u', v'。

把等式 $y=u^v$ 取对数，得到

$$\ln y=v\cdot\ln u \qquad (4)$$

这样，y的表达式又可写成$y=e^{v\cdot\ln u}$，从这个式子就可以明白导数y'是存在的。至于去計算它，最簡单是令等式(4)双方对x的导数相等。这时我們要利用法則V与Ⅲ(記住u,v与y是x的函数)。我們就会得到

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

由此

$$y'=y\left(\frac{vu'}{u}+v'\ln u\right)$$

或代入y的表达式，

$$y'=u^v\left(\frac{vu'}{u}+v'\ln u\right).\qquad(5)$$

这公式首先是由萊布尼茲与約翰·伯努利建立的。

例如，

$$\text{若}\quad y=x^{\sin x},\quad\text{則}\quad y'_x=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right).$$

86. 单側导数 在結束本节时，我們来概述一些关于导数可能出現的特殊情况。先从建立单側导数的概念开始。若所考虑的数值x就是函数$y=f(x)$的定义区間$\mathscr{X}$的端点之一，則在計算$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限时，$\Delta x$必須限于从右方(当所談的$x$是区間的左端点时)或从左方($x$是右端点)趋于0。在这种情形，若极限存在就叫做右单側导数或左单側导数，这时函数的图形在对应点处就有单側切綫。

可能发生这种情形，在內点x处比値$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的两个单側极限虽都存在(当$\Delta x\to+0$或$\Delta x\to-0$时)，但却又彼此不等；这时它們也是叫做单側导数。而函数的图形在对应点处就会有两条形成了一个角的单側切綫；这个点就是一个角点(图35)。

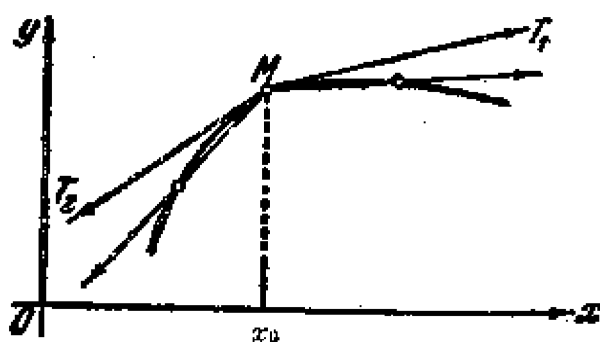


图35.

作为例子我們考慮函数 $y=f(x)=|x|$. 从数值 $x=0$ 开始，將有

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=|\Delta x|.$$

若 $\Delta x>0$, 則

$$\Delta y=\Delta x,\quad \lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

又若 $\Delta x<0$, 則

$$\Delta y=-\Delta x,\quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

这个函数的图形是由第一及第二象限的分角綫所組成的，原点就成为角点。

87. 无穷导数 若增量的比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$，則这一广义的数也叫做导数，而且也用通常的符号来表示它。

导数作为切綫的斜率这一几何解释也可推广到这个情形；但是在这里切綫就与 y 軸平行了(图 36a, $б$)。

类似地可以建立单側无穷导数的概念。不过，在这次即使有了符号不同的单側无穷导数(图 36$в$, $г$)，也只能有唯一的一条垂直切綫。这种情况的特征就是在图形上会有向上或向下的尖点出現。

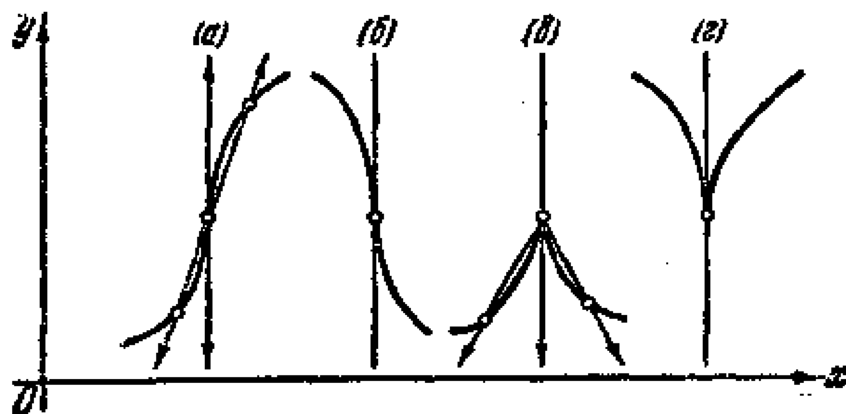


图 36.

例如，設 $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$；在 $x\neq 0$ 时由 81 段公式 3 給出

$$f_1'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

但这个公式在 $x=0$ 时是不能应用的。这时我們可以直接用导数的定义来計算在这点的导数；作出比式

$$\frac{f_1(0+\Delta x)-f_1(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}.$$

可見，当 $\Delta x \to 0$ 时，比式的极限是 $+\infty$。类似地可証函数 $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处的左导数等于 $-\infty$，而右导数等于 $+\infty$。

利用导数概念的推广，可以将 80 段中关于反函数的导数的定理加以补充，即指出即使在 $f'(x_0)$ 等于零或 $\pm\infty$ 时，反函数的导数 $g'(y_0)$ 仍存在而且分别等于 $\pm\infty$ 或零。例如，因为函数 $\sin x$ 在 $x= =\pm\frac{\pi}{2}$ 有导数 $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以反函数 $\arcsin y$ 在 $y=\pm 1$ 有无穷导数（就是 $+\infty$）。

88. 特殊情况的例子 1° 导数不存在的例。函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处[参看 86 段]已經是沒有通常的、双側导数。但是函数

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\ (\text{当 } x\neq 0),\quad f(0)=0,$$

是个更有趣的例，它在 $x=0$ 处虽然也是連續的[67 段，4)]，可是在这一点却連单側导数都沒有。事实上，比值

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to\pm 0$ 时，不趋向于任何极限。

从这个函数的图形（图 21）上很容易看出：自原点 O 引出的割綫 OM_1，当 M_1 趋向于 O 时，并无极限位置，因此曲綫在原点处沒有切綫（連单側的也沒有）。

在以后我們会看到一个很奇妙的例子：函数在变元的一切值处都是連續的，但在其中任何值处却都沒有导数。

2° 导数間断的例。如果給定的函数 $y=f(x)$ 在某一区間 $\mathscr{X}$ 內的每一点都有有限的导数 $y'=f'(x)$，那末这个导数本身就也是在 $\mathscr{X}$ 內 x 的函数。在迄今为止我們所遇到的大量的例子中，函数的导数都仍是連續的。但是有时可能并不是这样。例如，考虑函数

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\ (\text{当 } x\neq 0),\quad f(0)=0.$$

若 $x\neq 0$，则可用通常的方法去算出它的导数：

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

但是在 $x=0$ 时以上的結果并不适用。这时若直接用导数概念的定义，就有

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

同时，很清楚，$f'(x)$ 当 $x\to 0$ 时并不趋向于任何极限，所以函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是間断的。

在这个例子中导数的間断是属于第二类的。这并非偶然的事：下面[103段]我們将会看到，导数是不能有第一类的間断的，即不能有跃度。

§2. 微分

89. 微分的定义 設函数 $y=f(x)$ 定义在某一区間 $\mathscr{X}$ 内，而且在所考慮的点 x_0 处是連續的。于是相应于变元的增量 Δx 有

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

它随着 Δx 同为无穷小量。下面的問題是很重要的：对于 Δy 是否存在着这样的一个关于 Δx 为綫性的无穷小量 $A\cdot\Delta x$($A=$常数)，使得它与 Δy 的差是一个較 Δx 高級的无穷小量：

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x).\tag{1}$$

在 $A\neq 0$ 时，等式(1)的成立指出了无穷小量 $A\cdot\Delta x$ 是等价于无穷小量 Δy 的，也就是說，若取 Δx 作为基本无穷小量，則 $A\cdot\Delta x$ 就成为 Δy 的主部[**56**、**57** 段]。

如果等式(1)成立，則函数 $y=f(x)$ 就叫做(在給定值 $x=x_0$ 处)是可微的，而表达式 $A\cdot\Delta x$ 就叫做函数的微分，用符号 dy 或 $df(x_0)$ 來記它。

[在后一种符号里，括弧内的 x_0 正是指的 x 的开始数值[①]。]

我們再重复一遍，函数的微分具有两个特性：(a) 它乃是变元的增量 Δx 的綫性齐次函数，并且(б) 它与函数的增量相差一个数

① 这里，df 是一个完整的函数記号。

量，而这一数量在 $\Delta x\to 0$ 时是較 Δx 高級的无穷小量。

我們考慮几个例子。

1) 半徑为 r 的圓面积 Q 由公式 $Q=\pi r^2$ 所給出。若半徑 r 增大 Δr，則量 Q 的对应增量 ΔQ 就是包含在半徑为 r 及 $r+\Delta r$ 的二个同心圓周的圓环面积。从表达式

$$\Delta Q=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\cdot\Delta r+\pi(\Delta r)^2,$$

我們可以立刻看出：$2\pi r\cdot\Delta r$ 在 $\Delta r\to 0$ 时是 ΔQ 的主部；它也是 Q 的微分 dQ，在几何意义上，dQ 表示一个底等于圓周的长 $2\pi r$ 而高为 Δr 的矩形面积（好象是把圓环"伸直"而得出的矩形）。

2) 考慮質点依規律 $s=\frac{gt^2}{2}$ 的自由降落。从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时間 Δt 內，动点經过了路程

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，Δs 的主部是 $gt\cdot\Delta t$。我們回想起，在时刻 t 的速度是 $v=gt$ [76 段]，就看出了，路程的微分（近似地替代着路程的增量）是可以这样来計算的，即这一質点在整段时間 Δt 的过程中都以同一速度 v 来运动所經过的路程。

90. 可微性与导数存在之間的关系 現在很容易确定下一命題的正确性。

要使函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，其必要与充分条件是，它在这点有有限的导数 $y'=f'(x_0)$ 存在。当这一条件获得滿足时，等式(1)中的常数 A 就剛好等于这个导数，于是

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{1a}$$

必要性 若(1)式成立，則由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

于是当 Δx 趋向于零时，实际上就得到

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x.$$

充分性 立刻可从 82 段，1°[参看彼处的(3a)]中推得。

因此，函数 $y=f(x)$ 的微分永远是等于

$$dy=y'_x\cdot\Delta x^{①},\tag{2}$$

这里我們还要着重地指出，在这个表达式内的 Δx 是被我們理解为自变量的一个任意增量，就是一个任意的数(它时常为方便起見被当作并不依賴于 x 的)。在这时完全不必去假定 Δx 是个无穷小量；但若 $\Delta x\to 0$，則微分 dy 也就是个无穷小量，就是(当 $y'_x\neq 0$ 时)函数的无穷小增量 Δy 的主部。这也就使得我們有根据去近似地假定

$$\Delta y\doteq dy,\tag{3}$$

而当 Δx 越小时，則准确度就越大。我們将在 **93** 段中再回头来考慮近似式(3)。

为了要从几何方面来解釋微分 dy 以及它与函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 的关系，我們来考慮这个函数的图形(图 37)。变元値 x 与函数值 y 确定了曲綫上的一点 M。在曲綫上的这一点引切綫 MT；正象我們在 **78** 段中所看到的，它的斜率 $\text{tg}\alpha$ 等于导数 y'_x。若給横坐标 x 以增量 Δx，則曲綫的縱坐标 y 就得着增量 $\Delta y=NM_1$。同时切綫的縱坐标也得着增量 NK。把 NK 看作是直角三角形 MNK 的一个直角边而来計算，就得出：

$$NK=MN\cdot\text{tg}\alpha=$$
$$=y'_x\cdot\Delta x=dy.$$

因此，当 Δy 是曲綫的縱坐标的增量时，dy 就是切綫的縱坐标的对应增量。

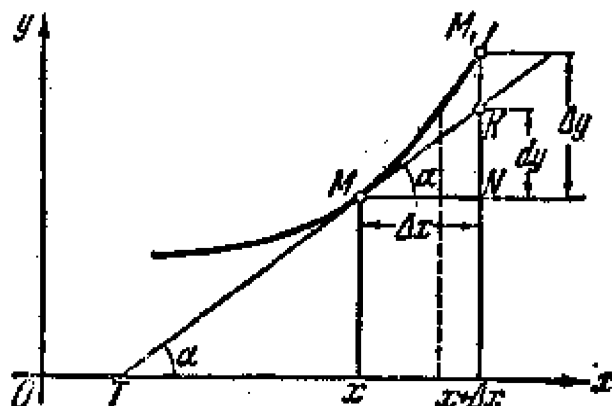


图 37.

---

① 容易驗証，前段所考慮过的例子的微分正好是这样組成的。例如，在情形1)，就有：

$$Q=\pi r^2,\ Q'_r=2\pi r,\ dQ=2\pi r\cdot\Delta r.$$

最后我們來看看自变量 x 的本身：它的增量 Δx，就叫做它的微分，即規定

$$dx = \Delta x, \tag{4}$$

假若把自变量 x 的微分与函数 $y=x$ 的微分看作是同样的(这同样也是一种規定！)，那末引用(2)式就可以証明公式(4)：

$$dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

参照規定式(4)，現在可以把給出微分定义的公式(2)重写成这一形式

$$dy = y'_x \cdot dx; \tag{5}$$

我們通常就是这样写的。

由此得到

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

于是这一表达式，我們以前把它看作是一个整个符号，現在却可以解釋成为一个分数了。讀者不应当为这种情况而困惑，就是在等式左边是完全确定了的数，而同时在右边我們有的却是二个不定的数 dy 及 dx(因 $dx=\Delta x$ 是任意的)的比值，要知道 dx 及 dy 本来是成比例地变动着的，而导数 y'_x 剛好就是比例系数。

微分的概念与"微分"① 这一名詞是属于萊布尼兹的，虽然他自己并沒有給出这个概念的确切的定义。萊布尼兹在考慮微分的同时也曾考慮过微商，即是二个微分的商，它就相当于我們的导数；但是对于萊布尼兹来說，微分却是一个原始的概念。自从哥西用自己的极限理論为整个分析創立了基础，并且第一次明确地定义导数为某种极限以后，通常就从导数出发，而微分的概念也就建立在导数的基础上了。

91. 微分的基本公式及法則 函数微分的計算法就叫做微分法②。因为微分 dy 与导数 y'_x 只相差一个因子 dx，所以很容易由初

---

① 从拉丁文 differentia 而来，意思就是"差"。

② 但是这一个名詞通常也用来称呼导数的計算，在俄語上并无这些专門名詞。

等函数的导数表[81]去做出它們的微分表:

1.	$y=c$	$dy=0$
2.	$y=x^{\mu}$	$dy=\mu x^{\mu-1}dx$
	$y=\frac{1}{x}$	$dy=-\frac{dx}{x^2}$
	$y=\sqrt{x}$	$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$y=a^x$	$dy=a^x\ln a dx$
	$y=e^x$	$dy=e^x dx$
4.	$y=\log_a x$	$dy=\frac{\log_a e}{x}dx$
	$y=\ln x$	$dy=\frac{dx}{x}$
5.	$y=\sin x$	$dy=\cos x dx$
6.	$y=\cos x$	$dy=-\sin x dx$
7.	$y=\operatorname{tg} x$	$dy=\sec^2 x dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$
8.	$y=\operatorname{ctg} x$	$dy=-\csc^2 x dx=-\frac{dx}{\sin^2 x}$
9.	$y=\arcsin x$	$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$y=\arccos x$	$dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y=\operatorname{arc\,tg} x$	$dy=\frac{dx}{1+x^2}$
12.	$y=\operatorname{arc\,ctg} x$	$dy=-\frac{dx}{1+x^2}$

微分法则[①]有这些:

Ⅰ. $d(cu)=c\cdot du$,

① 这里指的是微分的計算。

Ⅱ. $d(u\pm v)=du\pm dv$,

Ⅲ. $d(uv)=vdu+udv$,

Ⅳ. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

它們都可以很容易地从导数的对应法則中得出。例如，我們来証明后两个法則：

$$d(uv)=(uv)'\cdot dx=(u'v+uv')\cdot dx=$$
$$=v(u'\cdot dx)+u(v'\cdot dx)=vdu+udv;$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'\cdot dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}\cdot dx=$$
$$=\frac{v(u'\cdot dx)-u(v'\cdot dx)}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

92. 微分形式的不变性 复合函数的微分法則使得我們能够获得微分的一个值得注意而又重要的性質。

假設 $y=f(x)$ 及 $x=\varphi(t)$ 是这样的两个函数，由它們可以組成复合函数：$y=f(\varphi(t))$。又若导数 y'_x 及 x'_t 都存在，那末——依照[**84** 段]法則 Ⅴ——也存在着导数

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t. \tag{7}$$

若把 x 当作自变量，則微分 dy 可由公式(5)来表出。現在若自变量不是 x 而是 t；在这一假定之下，我們对于微分 dy 就有另一个表达式：

$$dy=y'_t\cdot dt.$$

不过，若将导数 y'_t 用它的表达式(7)来替换，又若注意到 x 是 t 的函数，$x'_t\cdot dt$ 就是 x 的微分，最后就可得到

$$dy=y'_x\cdot x'_t\,dt=y'_x\,dx,$$

即是，又回到了微分的原来形式(5)！

这样，我們看到，微分的形式，在将原来的自变量换成新的自变量以后仍然可以保持不变。所以不論 x 是不是自变量，我們永

远有根据把 y 的微分写成(5)的形式，仅有的差别只是在于：若取 t 作自变量，則 dx 表示的不是任意增量 Δx，而是 x(作为 t 的函数)的微分。这个性质就叫做微分形式的不变性。

因为从公式(5)可以直接得到以微分 dx 及 dy 来表示导数 y'_x 的公式(6)，所以不論 dx, dy 是对于那一个自变量而求出的(当然，在每一个情况下，都是对于同一个自变量而求的)，公式(6)始終是有效的。

例如，設 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$，則

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

現在假定 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，于是 $y=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$，就有 $dx=\cos t\cdot dt, dy=-\sin t\cdot dt$. 很易驗証，公式(6)給出的不过是上面求出的导数的另一个表达式罢了。

附注 可以用对于任意变量而取的微分来表示导数这一可能性，在特殊情形下，就会引出下面的結果；就是这些公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

这些公式在萊布尼茲記号下是表示求反函数以及复合函数的导数的法則的。現在它們就都成为簡单的代数恒等式了（因为在这里一切微分都可以对于同一个变量而取）。但是，却不要以为这就是这些公式新的推导法：首先，这里并沒有証明过等式左边的导数的存在，而且主要的还在于我們实质上应用了微分形式的不变性，而它本身却是法則 V 的推論。

93. 微分作为近似公式的来源 我們已經看到，在 $\Delta x\to 0$ 时，函数 y 的微分 dy(只要 $y'_x\neq 0$)是函数的无穷小增量 Δy 的主部。这样，$\Delta y\sim dy$，于是

$$\Delta y\doteq dy, \tag{3}$$

或，較詳細些

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{3a}$$

而只差一个較 Δx 为高級的无穷小量。就是說[56 段]，在 Δx 足够小的时候，这个等式的相对誤差可以任意的小。

这种情形也可以从图 37 微分的几何解釋中直接看出。从图形上可以看出：我們若将曲綫的縱坐标的增量換成切綫的縱坐标的增量，則当 Δx 越小的时候，这一替换的相对准确度也就越大。

用 dy 来替换 Δy 的好处是在于（大約讀者也清楚）dy 是綫性地依賴于 Δx，而 Δy 却常常是 Δx 的較复杂的函数。

若假定 $\Delta x=x-x_0$，而 $x_0+\Delta x=x$，則等式(3a)就成为

$$f(x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)(x-x_0)$$

或

$$f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

依照这个公式，对于接近于 x_0 的值 x，函数 $f(x)$ 就可以用一綫性函数来近似地替换。在几何上，这就相当于把曲綫 $y=f(x)$ 上接近于点 $(x_0, f(x_0))$ 的一小段换成曲綫在这点的切綫：

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)①$$

上的一段(参看图 37)，为了簡单起見，取 $x_0=0$，而且把 x 限于微小的值，于是就有近似公式：

$$f(x)\doteq f(0)+f'(0)\cdot x.$$

由此，用各种初等函数来代替这里的 $f(x)$，就容易得着一系列的公式：

$$(1+x)^{\mu}\doteq 1+\mu x,\ 特例\ \sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x,$$

$$e^x\doteq 1+x,\quad \ln(1+x)\doteq x,\quad \sin x\doteq x,\quad \operatorname{tg} x\doteq x,\quad 余类推,$$

其中有許多是我們早已知道了的。

94. 微分在估計誤差中的应用 应用微分概念于近似計算中估計誤差是非常方便而且自然的。例如，設量 x 我們可以直接地量度或計算，而依賴于 x 的量 y 則以公式 $y=f(x)$ 来确定。在量度量 x 的时候通常会有个誤差 Δx，由它又引起了量 y 的误差 Δy。由于这些誤差是微小的量，所以可以假定

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x,$$

就是，用微分来代替增量，設 δx 是量 x 的最大絕对誤差：$|\Delta x|\leqslant\delta x$（在通常

---

① 实际上，斜率为 k，經过点 (x_0, y_0) 的直綫的方程是

$$y=y_0+k(x-x_0);$$

在切綫的情形，这里应当令 $y_0=f(x_0)$，$k=f'(x_0)$。

的条件下，在量度中类似的誤差限度是已知的)。于是显然可以取

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x \tag{8}$$

作为 y 的最大絕对誤差(誤差限度)。

1) 例如，假若要去确定一个球的体积，首先(用游标测徑器、公差仪、螺旋测徑器，等等)直接地測量球的直徑 D，再依公式

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

去計算体积 V。

因为 $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$，所以在这一情形，根据(8)

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

用前式除这个等式，得

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

所以算出来的体积的数值的(最大的)相对誤差比量出来的直徑的数值的(最大的)相对誤差大了两倍。

2) 假設要計算数 x 的以十为底的对数 $y = \log x$，若于得到 x 时有某些誤差，于是就影响到对数 y，使它也有了誤差。

在这里 $y'_x = \frac{M}{x}$ ($M \doteq 0.4343$)，因此，依公式(8)，

$$\delta y = 0.4343 \frac{\delta x}{x}.$$

这样，x 的对数 y 的(最大)絕对誤差就只依賴于数 x 本身的(最大)相对誤差而确定。反过来也是一样。

这个結果有多种应用。例如，借此可以获得关于常用的标度为 25 厘米 = 250 毫米的对数尺的准确度的概念。由于在放置照准器或讀数时可能发生錯誤，例如，在这边或另一边錯誤 0.1 毫米，于是在对数上就对应有誤差

$$\delta y = \frac{0.1}{250} = 0.0004.$$

由此，依我們的公式

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0.0004}{0.4343} \doteq 0.001.$$

讀数的相对准确度在算尺的所有部分都是一样的!

§3. 高阶导数及高阶微分

95. 高阶导数的定义 若函数 $y=f(x)$ 在某一区間$\mathscr{X}$内有有限的导数 $y'=f'(x)$，那末后者本身就代表着 x 的另一函数，于是有可能这个函数在$\mathscr{X}$内的某点x_0有有限的或无穷的导数。它就叫做函数$y=f(x)$在該点处的**二阶导数**并用下列符号之一来表示:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ D^2y;\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ f''(x_0),\ D^2f(x_0).$$

例如，象我們在 78 段中已經見到的，动点的速度 v 等于它所經过的路程 s 对于时間 t 的导数: $v=\frac{ds}{dt}$，而加速度 a 是速度 v 对于时間的导数: $a=\frac{dv}{dt}$。就是說，加速度是路程对于时間的**二阶导数**: $a=\frac{d^2s}{dt^2}$.

类似地，若函数 $y=f(x)$ 在整个区間$\mathscr{X}$内（即是，在这个区間内的每一点处）都有有限的二阶导数，則这个二阶导数在$\mathscr{X}$内某点 x_0 处有有限的或无穷的导数就叫做函数 $y=f(x)$ 在这点的**三阶导数**，并記成:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ y''',\ D^3y;\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\ f'''(x_0),\ D^3f(x_0).$$

用相似的方法可从三阶导数推出四阶导数，等等。若假定 $(n-1)$阶导数的概念已經定义了，而在区間$\mathscr{X}$内 $(n-1)$ 阶导数存在并且有限，那末它在这个区間内某点 x_0 处的导数就叫做原来的函数$y=f(x)$的 n **阶导数**；我們采用以下符号来記它:

$$\frac{d^ny}{dx^n},\ y^{(n)},\ D^{(n)}y;\ \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\ f^{(n)}(x_0),\ D^nf(x_0).$$

有时——在应用拉格朗日或哥西的記号时——可能有必要去指出对于那个变量在取导数，那时就将这个变量写成下标的形式:

$$y''_{x^2},\quad D^3_{x^3}f(x),\quad f^{(n)}_{x^n}(x_0),\ \text{余类推},$$

其中 $x^2, x^3, \cdots$ 我們規定是 $xx, xxx, \cdots$ 的簡写。例如，可以写：$a = s''_{t^2}$.

（讀者明白，这里的整个符号

$$\frac{d^nf}{dx^n},\ f^{(n)}\quad \text{或}\quad f^{(n)}_{x^n},\ D^nf\quad \text{或}\quad D^n_{x^n}f$$

可以看作是函数的記号）。

这样，我們依着阶次从一阶导数推移到以后各阶导数，而归納地定义了 n 阶导数的概念。从而确定 n 阶导数的关系式

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

就叫做递推式（或"循环式"），由于它使我們从 n 阶导数"回归"到 $(n-1)$ 阶导数。

当 n 給定了时，n 阶导数的計算，可以按照讀者已知的法則与公式去进行。

例如，設

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2},$$

則

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3},\quad y'' = 6x^2 - x + 4,$$

$$y''' = 12x - 1,\quad y'''' = 12,$$

于是所有以后各阶的导数都恒等于零。或設

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

于是

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}},\qquad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}},\ \text{等等.}$$

注意，象对于高阶导数那样，也可以归納地建立高阶单側导数的概念［参看 86 段］。若函数 $y=f(x)$ 只确定在某一区間 $\mathscr{X}$ 內，那

末当我們談到在这区間端点的任何阶导数的时候，总是指的是单側导数。

96. 任意阶导数的普遍公式 要計算任何函数的 n 阶导数，一般地說，应該先要算出它前面的一切阶次的导数。然而，在許多情形下，对于 n 阶导数却能够建立起这样的普遍表达式，它直接依賴着 n，而不再含有前面各阶导数。

在推导这种普遍表达式的时候，有时公式

$$(cu)^{n}=c\cdot u^{(n)},\quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

是有用处的，它們是讀者已經知道的 83 段中法則 I 及 II 在高阶导数的情况下的推广，只要逐次地应用这些法則就很容易得到它們。

1）首先考虑冪函数 $y=x^{\mu}$，其中 μ 是任意实数。我們依次地有：

$$y'=\mu x^{\mu-1},\quad y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},\cdots$$

由此也容易看出普遍的規律：

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

并且可以用数学归納法来证明它。

例如，若取 $\mu=-1$，則得

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^{n}\cdot n!}{x^{n+1}}$$

当 μ 本身是自然数 m 的时候，則 x^{m} 的 m 阶导数就已經是常数 $m!$，于是一切以后的导数就都是零了。由此很明显，对于 m 次的整多次式也会发生类似的状况。

2）現在設 $y=\ln x$。首先有

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

从这里我們把 1) 中对应公式里的 n 换成 $n-1$，并用它来取上式的 $(n-1)$ 阶导数，于是我們得着

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) 設 $y=a^x$，則

$$y'=a^x\cdot\ln a,\quad y''=a^x\cdot(\ln a)^2,\ \cdots$$

普遍公式

$$y^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n$$

这容易用数学归納法来証明。

特例，显然有

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

4) 假定 $y=\sin x$；于是

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,$$
$$y''''=\sin x,\quad y^{(5)}=\cos x,\ \cdots$$

沿着这一路綫去找所求的 n 阶导数的普遍表达式是困难的。但是若把一阶导数的公式改写成为 $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的形式之后，事情就会立刻化簡多了；容易明白，在每微分一次时变元就要增加 $\frac{\pi}{2}$，因此

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

类似地可得到公式

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5) 再討論函数 $y=\operatorname{arctg}x$. 我們提出的問題是要把 $y^{(n)}$ 用 y 表示出来。因为 $x=\operatorname{tg}y$，于是

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

再关于 x 来微分(記住，y 是 x 的函数)，得到

$$y''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$

$$=\cos^2 y\cdot\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

再一次微分得出:

$$y'''=\left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cdot\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$

$$=2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

普遍公式

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

可用数学归納法証明是正确的。

97. 萊布尼茲公式 我們在前一段的开始曾經指出，83 段的法則 I 与 II 是可以直接移用到任意阶导数上去的，然而对于有关乘积的微分的法則 III 来說，事情就复杂多了。

假定 u, v 是 x 的函数，且各自具有直到 n 阶的导数。我們要証明，这时它們的乘积 $y=uv$ 也有 n 阶导数，而且去求出它們的表达式。

应用法則 III，逐次微分这个乘积，我們求得:

$$y'=u'v+uv',\qquad y''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',\ \cdots$$

很容易看出构成所有这些公式的規律：它們的右边很象是二項式的各次冪 $u+v, (u+v)^2, (u+v)^3, \cdots$ 的展开式，只不过是把 u, v 的冪換成对应阶的导数罢了。若是在所得的公式內再把 u, v 写成 $u^{(0)}, v^{(0)}$，那末它們之間的相似就更为完全了。推广这个規律到任意 n 的情形，我們就得着普遍公式①:

---

① 符号 Σ 表示同类項的总和。当这些項都依賴着一个标号，而这个标号是在确定了的界限內变动着时，那末就在 Σ 的上面和下面指出这些界限来。例如，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i=a_0+a_1+\cdots+a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m},\quad 等等。$$

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}=$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot i}u^{(n-i)}v^{(i)}+\cdots+uv^{(n)}.\quad(1)$$

我們再用数学归納法来証明公式(1)的正确性。假設在某值 n 时,公式(1)是对的,又若函数 u, v 的$(n+1)$阶导数也都存在,那末可以把(1)对于 x 再微分一次,我們就得到:

$$y^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[u^{(n-i)}v^{(i)}]'=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i+1)}v^{(i)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i+1)}.$$

现在把包含在最后的两个总和内的各同类項,即是包含函数 u, v 的同阶导数乘积的項归并起来(容易看出,在每一个乘积內,二个导数的阶数的和始終是等于 $n+1$)。乘积 $u^{(n+1)}v^{(0)}$ 只包含在第一个总和内(当 $i=0$ 时);在这个总和内它的系数是 $C_n^0=1$。完全同样,$u^{(0)}v^{(n+1)}$ 只包含在第二个总和内(有序号 $i=n$ 的一項);它的系数是 $C_n^n=1$。包含在这二个总和內的所有其余的乘积它們的形式都是 $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$,其中 $1\leqslant k\leqslant n$。每一个这样的乘积不但在第一个总和内可以遇到(有序号 $i=k$ 的一項),而且在第二个总和內也可以遇到(有序号 $i=k-1$ 的一項)。对应的系数的和就是 $C_n^k+C_n^{k-1}$。但是,大家都知道,

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k.$$

这样,最后求出:

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]}v^{(k)}+u^{(0)}v^{(n+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)}.$$

由于

$$C_{n+1}^{0}=C_{n+1}^{n+1}=1.$$

我們已經得到 $y^{(n+1)}$ 的表达式，它完全类似于表达式(1)(只是 n 換成了数 $n+1$)；由此就証明了公式(1)对于一切自然数 n 的正确性。

上面証得的公式叫做萊布尼茲公式。在推导 n 阶导数的普遍表达式时它經常是有用处的。

我們要指出，对于多因子的乘积 $y=uv\cdots t$ 的 n 阶导数也可以建立象这样的公式，它与多項式冪 $(u+v+\cdots+t)^n$ 的展开式形状是相类似的。

例 求函数

$$y=e^{ax}\cdot\sin bx$$

的 n 阶导数的普遍式。根据萊布尼茲公式，得着

$$y^{(n)}=e^{ax}\cdot a^{n}\cdot\sin bx+ne^{ax}\cdot a^{n-1}b\cdot\cos bx-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{ax}\cdot a^{n-2}b^{2}\cdot\sin bx-$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}e^{ax}\cdot a^{n-3}\cdot b^{3}\cdot\cos bx+\cdots,$$

或

$$y^{(n)}=e^{ax}\Big\{\sin bx\left[a^{n}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^{2}+\cdots\right]+$$
$$+\cos bx\left[na^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^{3}+\cdots\right]\Big\}.$$

98. 高阶微分 現在我們回到高阶微分；它們也同样是归納地来定义的。函数 $y=f(x)$ 的(一阶)微分在某一点处的微分就叫做函数在这点的二阶微分；記作

$$d^{2}y=d(dy).$$

二阶微分的微分叫做三阶微分：

$$d^{3}y=d(d^{2}y)$$

一般地說，函数 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶微分的微分叫做它的 n 阶微分：

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

如果应用函数符号，那末各阶微分就可以表示为

$$d^2f(x_0),\ d^3f(x_0),\cdots,\ d^nf(x_0),\cdots.$$

并且这种符号还能够指出这些微分是在 x 的那一个特别值 $x=x_0$ 处而取的。

在計算高阶微分的时候，很重要的一件事是要記住：dx 是任意的与 x 无关的数，在对 x 微分时必需要把 dx 看作常数因子。这样我們就有（假定对应的导数总是存在的）：

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dy'\cdot dx=(y''\cdot dx)\cdot dx=y''dx^2,$$

$$d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dy''\cdot dx^2=(y'''\cdot dx)\cdot dx^2=y'''dx^3,$$ ①

等等，我們猜想普遍的規律会是

$$d^n y=y^{(n)}dx^n \tag{2}$$

用数学归納法也很容易来証明它。由此得出

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n},$$

于是以后就可以把这个符号看作分数了。

利用等式(2)，很容易把萊布尼茲公式改写成微分的形式。只要将它的两边乘上 dx^n，就可得出

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u\cdot d^i v\ \ (d^0u=u,\ d^0v=v).$$

萊布尼茲本人求得的公式正是这个形式。

99. 高阶微分形式不变性的破坏　回想起函数的一阶微分具有形式不变性的性質的时候，很自然地就会提出这个問題：高阶微

---

① $dx^2, dx^3, \cdots$ 等等恒理解为微分的冪：$(dx)^2, (dx)^3, \cdots$。而冪的微分就記作：$d(x^2), d(x^3), \cdots$。

分是否也有同样的性质呢。我們就来指出，例如，二阶微分就已經沒有这个性質了。

因此，設 $y=f(x)$ 而 $x=\varphi(t)$，于是 y 可以看作是 t 的复合函数：$y=f(\varphi(t))$。它对 t 的(一阶)微分可以写为 $dy=y'_x\cdot dx$，此处 $dx=x'_t\cdot dt$ 是 t 的函数。再求对 t 的二阶微分：

$$d^2y=d(y'_x\cdot dx)=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx).$$

对于 dy'_x 可以再应用(一阶)微分形式的不变性化成：$dy'_x=y''_{x^2}\cdot dx$，于是最后得着

$$d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x, \tag{3}$$

但是当 x 是自变量时，二阶微分的形式却是 $d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2$。当然，式(3)是 d^2y 的更普遍的表达式：若在特殊情形取 x 为自变量，则 $d^2x=0$——于是就只剩下第一项了。

今举一例。設 $y=x^2$，于是，当 x 是自变量时：

$$dy=2x\cdot dx,\quad d^2y=2dx^2.$$

現在又令 $x=t^2$，于是 $y=t^4$，而

$$dy=4t^3dt,\quad d^2y=12t^2dt^2.$$

dy 的新的表达式也可以从旧的得到，只要将 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$ 代入旧的就行。然而对于 d^2y，情形却大不相同：作了同样的代入之后，我們得到的是 $8t^2dt^2$ 而非 $12t^2dt^2$！

这时公式(3)的形式是

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x.$$

在这里代入 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$，$d^2x=2dt^2$，这就得出正确的結果 $12t^2dt^2$。

因此，若 x 不再是自变量时，则二阶微分 d^2y 就要用 x 的微分的二項式(3)来表示。对于自三阶以后的各阶微分，增补的項数(当另取他量作新的自变量时)就还要增加。按照这个道理，在用微分来表示高阶导数的式：

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots \tag{4}$$

中，这些微分已經不能对于任意变量取了，而仅能对于变量 x 而取。

第六章　微分学的基本定理

§1. 中值定理

100. 費馬定理　由知道了某一函数的导数(或一系列的导数)就能够对函数本身的性态做出結論。本章內要講到的一些簡单而又重要的定理及公式就是导数概念各种应用的基础(参看第七与第十三章)。

我們先从一个輔助命題开始，这命題可以正确地以費馬命名[①]。当然費馬并沒有得出这个命題的下面的形式(他并不曾有导数的概念)，不过这个命題在实質上却完全是重复了費馬寻求函数的最大及最小值时所用的方法(参看十四章)。

費馬定理　設函数$f(x)$定义在某一区間$\mathscr{X}$內，并且在这个区間的內点c取最大(最小)值。又若在这点存在着有限导数$f'(c)$，則必然$f'(c)=0$.

証明　为了确定起見，設$f(x)$在点c取最大值，于是对于$\mathscr{X}$內的一切$\mathscr{X}$就有

$$f(x)\leqslant f(c).$$

由导数定义：

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

并且这一极限与x是从右边还是从左边趋向c无关。但是在$x>c$时，表达式

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0,$$

---

① 彼埃儿費馬(1601—1665)是个卓越的法国数学家，他与无穷小量分析的史前史是有密切的关系的(参看十四章)。

于是当 $x \to c+0$ 时求极限即得:

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{1}$$

又若 $x<c$ 时, 則

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0,$$

在 $x \to c-0$ 时取极限, 又可求得

$$f'(c) \geqslant 0. \tag{2}$$

比較式(1)及(2), 就可得出所求的結論

$$f'(c)=0.$$

附注　上面的論証其实还証明了另一点: 即在所述点 c 不能够存在(双侧)无穷导数。因此, 只要假定了在这点(双侧)导数存在, 而不必附加有限的这一条件, 定理的結論仍是正确的。

我們記得[77、78段]导数 $y'=f'(x)$ 的几何意义就是曲綫 $y=f(x)$ 的切綫的斜率。所以 $f'(c)$ 等于零在几何上表示这曲綫上的对应点处的切綫是平行于 x 軸的。图38很明显的表示出这个情况。

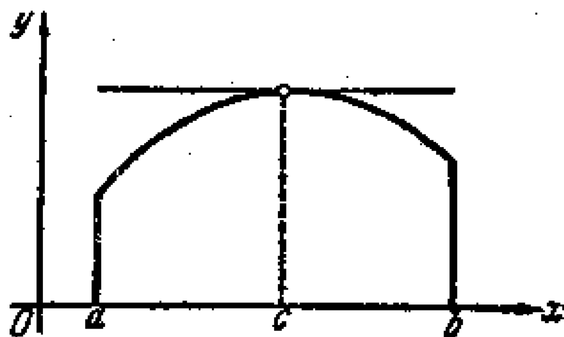


图38.

証明中用到的 c 是区間的一个内点这一假定, 是不可少的, 因为我們必須同时考虑在 c 右边的点 x 和在 c 左边的点 x。沒有这一假定, 定理就不会成立: 設函数 $f(x)$ 定义在閉区間内, 并且在这个区間的一个端点上达到它的最大(最小)值, 則在这一端点上导数 $f'(x)$(若存在)可能不是零。我們建議讀者自己去找出一个适当的例子。

101. 罗尔定理　下面这个簡单而又重要的以罗尔[①]命名的定

---

① 米歇尔·罗尔(1652—1719)是法国数学家, 他在很长的一段时期內却是新計算法的反对者, 一直到了暮年才归附于这种新計算法。本文里所引的定理是罗尔发表的, 但他也只是对多項式証明了这个定理。

理是微分学及其应用的許多定理及公式的基础。

罗尔定理　設：1) 函数 $f(x)$ 定义于閉区間 $[a, b]$ 上并于其上連續；2) 至少在开区間 (a, b)① 内有限导数 $f'(x)$ 存在；3) 在区間的端点上函数値相等：$f(a)=f(b)$.

那末在 a 与 b 之間一定可以找到这样的一个点 $c(a<c<b)$ 使得 $f'(c)=0$.

証明　$f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上是連續的，因此由維尔斯特拉斯第二定理［73 段］$f(x)$ 在这区間上必定有它的最大値 M 和最小値 m。

考虑两种情形：

1. $M=m$. 这时 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上恒为常量：事实上，这时由不等式 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 得出在一切 x 处 $f(x)=M$；因此在整个区間上 $f'(x)=0$，于是可以取 (a, b) 内任意一点作为 c。

2. $M>m$. 我們知道，函数必定可以取得这两个値，但是，由于 $f(a)=f(b)$，所以函数不可能都在区間的端点上取得这两个值，而至少其中有一个值是在 a 与 b 之間的某一点 c 上取得的。这时，由費馬定理可以推得，在这点的导数 $f'(c)$ 就会是零。定理得証。

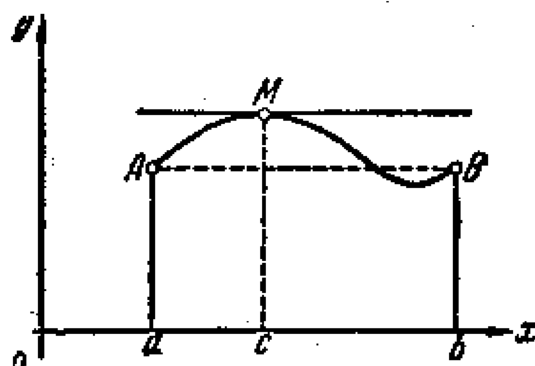


图39.

用几何的語言来說，罗尔定理表示着：如果曲綫 $y=f(x)$ 的两端的縱坐标相等，那末一定可以在曲綫上找到一点，在这一点的切綫是平行于 x 轴的（图 39）。

① 当然，函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的連續性已可从 2）推出，但是我們无論在这里或在以后都不打算把定理的条件拆开成为互相独立的假定。

注意，函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上的連續性以及在整个开区間 (a, b) 内存在着导数这些条件对于定理的結論的正确性来說是不可少的。函数 $f(x)=x-E(x)$ 在区間 $[0, 1]$ 上除了在 $x=1$ 时有間断以外，它滿足定理的其他的一切条件，但在 $(0, 1)$ 内却处处 $f'(x)=1$。由等式

$$f(x)=\begin{cases} x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right); \\ 1-x & \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right), \end{cases}$$

确定的函数在区間 $[0, 1]$ 上除了当 $x=\frac{1}{2}$ 时(双側)导数不存在外，它也滿足其他的一切条件；可是在左半区間内 $f'(x)=+1$，在右半区間内 $f'(x)=-1$。

定理的条件 3)也是同样地重要的：函数 $f(x)=x$ 在区間 $[0, 1]$ 上除了条件 3)以外滿足其他的一切条件，但它的导数到处是 $f'(x)=1$。

請讀者画出图形。

102. 有限增量定理 我們来討論罗尔定理的一些直接推論。第一个就是下面的拉格朗日的有限增量定理。

拉格朗日定理 設：1)函数 $f(x)$ 定义在閉区間 $[a, b]$ 上并在其上連續，2)至少在开区間 (a, b) 内有有限导数 $f'(x)$ 存在。那末在 a 与 b 之間一定可以找到这样的一个点 $c(a<c<b)$ 滿足等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{3}$$

証明 引入在 $[a, b]$ 上由等式

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

来定义的輔助函数。这个函数滿足罗尔定理的一切条件。事实上，它在 $[a, b]$ 上連續，因为它是連續函数 $f(x)$ 与一綫性函数之差。它在区間 (a, b) 内有确定的有限导数，等于

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

最后，把 a, b 直接代入 $F(x)$，証实 $F(a)=F(b)=0$，即是，$F(x)$ 在区間的两端取得等值。

因此，可以把罗尔定理应用于函数 $F(x)$，而肯定在 (a, b) 内有这样的一点 c 存在，使得 $F'(c)=0$. 这样

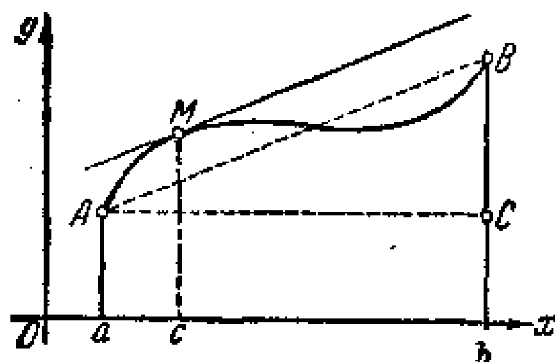


图 40.

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

由此

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

这就是所要証明的。

罗尔定理是拉格朗日定理的一个特殊情形；前面所作的关于条件 1) 与 2) 的附注在这里仍是有效的。

我們再来談談拉格朗日定理的几何意义(图 40)，注意，比值

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

是割綫 AB 的斜率，而 $f'(c)$ 是曲綫 $y=f(x)$ 上横坐标 $x=c$ 的点的切綫的斜率。这样，拉格朗日定理中的論斷就相当于：在 AB 弧上至少总可找到一点 M，在这点的切綫和 AB 弦平行。

已証明的公式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ 或 } f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

叫做**拉格朗日公式**或**有限增量公式**。显然，它在 $a>b$ 时仍然有效。

在区間 $[a, b]$ 上取一个任意量 x_0，并給 x_0 以增量 $\Delta x \gtrless 0$，并使 $x_0+\Delta x$ 不超出区間以外。当 $\Delta x>0$ 时应用拉格朗日公式于区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$，当 $\Delta x<0$ 时，应用这一公式于 $[x_0+\Delta x, x_0]$。于是拉格朗日公式就成为：

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(c) \tag{3a}$$

或

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x. \tag{4}$$

这时，介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之間的数 c 可以表示为

$$c=x_0+\theta\cdot\Delta x,\quad 其中 0<\theta<1^{①}.$$

这个等式給出在变元的任意有限增量 Δx 时的函数增量的准确表达式，它自然是与近似等式[93 段 3a]

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x$$

相对立的，在近似等式中只有当 Δx 是无穷小量时，相对誤差方才趋向于零。因此之故，就在公式(或定理)的名称中按上了"有限增量"这几个字。

至于拉格朗日公式的缺点，那就是在这个公式里有个我們所不知道的数 c (或 θ)[②]。但是这并不影响这一公式在分析中的多方面的应用。

103. 导数的极限 下面的附注就給出这种应用的一个有用的例子。假設函数 $f(x)$ 在区間 $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ 上連續，并且在 $x>x_0$ 时有有限的导数 $f'(x)$。又若存在着(有限或无穷)极限

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=K,$$

則函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右側导数也等于 K。事实上，在 $0<\Delta x\leq H$ 时，等式(3a)成立。因为导数 $f'(c)$ 的变元 c 包含在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之間，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$c\to x_0$，于是等式(3a)的右边以及左边就趋向于极限 K，这就是所要証明的。对于点 x_0 的左边邻域也可建立类似的論断。

作为例子，考慮在区間 $[-1, 1]$ 上的函数

$$f(x)=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$$

若 $-1<x<1$，則依微分学的一般法則容易求得：

$$f'(x)=\arcsin x.$$

---

① 有时說，θ 是个"真分数"；但是却不要就以为它一定是有理分数，数 θ 也可能是无理数。

② 仅在不多的情形中我們可以确定它；例如，对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，很易驗証 θ 总是等于 $\frac{1}{2}$。

当 $x\to 1-0$ ($x\to -1+0$) 时，这一导数显然趋向于极限 $\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$；因此在 $x=\pm 1$ 时存在着(单侧)导数：$f'(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}$。

如果回到我們在 87 段中曾經考虑过的函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 上来，那末对于它們(在 $x\gtrless 0$ 时)就有：

$$f'_1(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\quad f'_2(x)=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

因为第一个式子在 $x\to 0$ 时趋向于 $+\infty$，而第二个在 $x\to\pm 0$ 时分别有极限 $\pm\infty$，于是我們立刻就可以下結論，$f_1(x)$ 在点 $x=0$ 有双側导数 $+\infty$，但同时对于 $f_2(x)$ 說来，在这点只存在着单側导数：右导数是 $+\infty$，左导数是 $-\infty$。

由上所述就可推得，若有限导数 $f'(x)$ 在某一区間內存在，則它本身也是一个函数，且这一函数不能有通常的間断或跃度：在每一点处，它或是連續，或有第二类間断[参看 88 段, 2°]。

104. 有限增量定理的推广 哥西用以下的方法推广了上一段的有限增量定理。

哥西定理 設：1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上連續；2) 至少在开区間 (a,b) 內有限导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，3) 在区間 (a,b) 內 $g'(x)\neq 0$。

那末在 a，与 b 之間一定可以找到这样的一点 c，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

这个公式叫做哥西公式。

证明 我們先来证明：等式左边的分母不等于零，因为否則这个表达式就沒有意义了。假若 $g(b)=g(a)$，則依罗尔定理，导数 $g'(x)$ 在区間內的某一点就会等于零，而这是与条件 3) 相矛盾的；因此 $g(b)\neq g(a)$。

现在考虑輔助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

这个函数满足罗尔定理的一切条件。实际上，$F(x)$ 在$[a,b]$上是連續的，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是連續的；导数 $F'(x)$ 在 (a,b) 內存在，而且就等于

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

最后，直接代入 a 与 b，証得 $F(a)=F(b)=0$。应用罗尔定理，就得出，在 a 与 b 之間一定存在点 c，使得 $F'(c)=0$。換句話說，

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0,$$

或

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

除以 $g'(c)$[这是可以的，因为 $g'(c)\neq 0$]，就得着所求的等式。

很明显的，拉格朗日定理是哥西定理的一个特殊情形。要从哥西公式得出拉格朗日的有限增量公式，只須令 $g(x)=x$ 就行了。

101、**102** 及 **104** 諸段中在导数符号里有自变量的某个中值出現，这个值——我們曾經指出过——一般地說来我們是不知道的。它也会在某种意义上給予导数一个中值。由于这个緣故，这里的这一些定理就都叫做“中值定理”。

§2. 戴劳公式

105. 多項式的戴劳公式 若 $p(x)$ 是 n 次多項式：

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n, \tag{1}$$

把它逐次地微分 n 次：

$$p'(x)=a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\cdots+n\cdot a_nx^{n-1},$$

$$p''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\cdots+(n-1)n\cdot a_na^{n-2},$$

$$p'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+\cdots+(n-2)\cdot(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},$$

....

$$p^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n\cdot a_n,$$

并且在一切这些式子内令 $x=0$, 就得出用多项式本身及其导数在 $x=0$ 处的值去表示这多项式的系数的式子:

$$a_0=p(0),\quad a_1=\frac{p'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{p''(0)}{2!},$$

$$a_3=\frac{p'''(0)}{3!},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

把这些系数的值代入(1):

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

这个公式与(1)式只在系数的写法上不同。

我們也可以不依 x 冪去展开多项式, 而依 $(x-x_0)$ 冪去展开, 此处 x_0 是 x 的某一个特别的常数值:

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\cdots+ \\ +A_n(x-x_0)^n. \tag{3}$$

令 $x-x_0=\xi$, 而 $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$, 对于多项式

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\cdots+A_n\xi^n$$

的系数, 根据已証明的式子, 有表达式:

$$A_0=P(0),\quad A_1=\frac{P'(0)}{1!},\quad A_2=\frac{P''(0)}{2!}$$

$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\quad \cdots,\quad A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

但是

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\quad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$

$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\quad \cdots,$$

于是

$$P(0)=p(x_0),\quad P'(0)=p'(x_0),\quad P''(0)=p''(x_0),\quad \cdots$$

而

$$\left.\begin{aligned} A_0=p(x_0),\quad A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\quad A_2=\frac{p''(x_0)}{2!},\\ A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\quad \cdots,\quad A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

即展开式 (3) 的系数可用多项式本身及其导数在 $x=x_0$ 处的值来表达。

把(4)式代入(3):

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{5}$$

公式(5)以及它的特别情形(在 $x_0=0$ 时)(2)都叫做戴劳公式。不过公式 (2) 也常叫做麦克洛林公式①。戴劳公式在代数上的重要的应用是大家都知道的。

这里我們提出(对以后是有用处的)一个明显的附注，若多項式 $p(x)$ 表示为这一形式

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n,$$

則必有

$$p(x_0)=c_0,\ p'(x_0)=c_1,\ p''(x_0)=c_2,\ \cdots,\ p^{(n)}(x_0)=c_n.$$

106. 任意函数的展开式 現在回头来考慮一般并不是多項式的任意函数 $f(x)$，它定义在某一个区間 $\mathscr{X}$ 内。假定 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 中的某一点 x_0 有直到 n 阶为止的各阶导数存在。也就是，說得确切些，函数在点 x_0 的某一邻域内有直到 $(n-1)$ 阶为止的各阶导数:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(x),$$

① 白魯克·戴劳(1685—1731)与柯林·麦克洛林 (1698—1746) 都是英国数学家，是牛頓的繼承人。

此外，它在这点 x_0 还有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$①。于是，按照(5)的形式，对于函数 $f(x)$ 也可以作出一个多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (6)$$

根据前段的附注，这个多项式及其导数(直到 n 阶为止)在点 x_0 与函数 $f(x)$ 及其导数有相同的值。

但是在这一次只要函数 $f(x)$ 不是 n 次多项式，就已經不能肯定等式 $f(x)=p_n(x)$ 了，所以多項式 $p_n(x)$ 仅給出函数 $f(x)$ 的某一逼近式，利用 $p_n(x)$ 可以在某种准确度内算出 $f(x)$。因而对于在給定的($\mathscr{X}$中) x 与給定的 n 时差

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x),$$

或者

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\cdots-$$
$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (7)$$

的估計就成为重要的事情了。

为了这个目的，$r_n(x)$的这一表达式是不太合用的。要想把它表示为較便于研究的形式，除了为做成多項式 $p_n(x)$ 时所直接需要条件外，我們还須給函数 $f(x)$ 以更强的条件，就是我們假設今后 $f(x)$在$\mathscr{X}$内有直到$(n+1)$阶为止的各阶导数

$$f'(x),\ f''(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x)$$

存在。

① 如果点 x_0 是区間$\mathscr{X}$的端点之一，則在談到在这点的导数的时候，我們是指的单侧导数而言；完全同样地，这时对于点 x_0 的邻域这一名詞也是指的是单侧邻域。

我們現在把区间$\mathscr{X}$内的一个任意值x固定下来，再依照公式(7)右边的式样，把常数x_0换成变量z，就做出了一个新的辅助函数：

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-$$
$$-\cdots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

其中自变量z是算作只在区間$[x_0, x]$[①]上变动着的。在这个区間上函数$\varphi(z)$是連續的，并且在它的端点取得数值[参看(7)]：

$$\varphi(x_0)=r_n(x),\quad \varphi(x)=0. \tag{8}$$

此外，在区間(x_0, x)内存在着导数

$$\varphi'(z)=-f'(z)-\left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-f'(z)\right]-$$
$$-\left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right]-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right],$$

或經簡化后，

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n. \tag{9}$$

若再取一个任意的函数$\psi(z)$，它在閉区間$[x_0, x]$上連續，在开区間(x_0, x)内有不等于零的导数，那末对于这一对函数$\varphi(z)$，$\psi(z)$就可以从应用哥西公式[104 段]：

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

其中c在x_0与x之間，卽是，$c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$。

---

① 为着确定起見，我們就算作$x>x_0$。

計及(8)、(9)两式，由此可得

$$r_n(x) = -\frac{\psi(x_0)-\psi(x)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \qquad (10)$$

先把函数 $\psi(z)$ 选成：

$$\psi(z)=(x-z)^{n+1};$$

它滿足上面所説的一些条件。我們有

$$\psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},\ \ \psi(x)=0,\ \ \psi'(c)=-(n+1)(x-c)^n.$$

代入(10)中，最后得出：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (11)$$

現在，計及(7)与(11)，函数 $f(x)$ 就可以表示为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (12)$$

它与多項式的戴劳公式不同的地方就是它剛好多出一个余項(11)。

余項式(11)是拉格朗日的余項式；这一形式的余項很象戴劳公式中的一般項：只是把原来一般項中的$(n+1)$阶导数不取于 x_0 处，而取在某一中值(在 x_0 与 x 之間) c 处。

公式(12)叫做**有拉格朗日型余項的戴劳公式**。若在式内把 $f(x_0)$移至左边且令 $x-x_0=\Delta x$，則(12)式可重写为：

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \qquad (12a)$$

这一公式是**有限增量公式**[102 段，(4)]

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\cdot\Delta x$$

的直接推广，后式相当于(12a)中的 $n=0$ 时。

虽然拉格朗日型余項就其簡單而言是不能再好的了，但在个别情形下这个形式不太适用，因而必須改用别的略为复杂的形式。这里我們要提到其中之一的哥西型余項。它可从(10)式推得，若这次令 $\psi(z)=x-z$。这时

$$\psi(x_0)=x-x_0,\quad \psi(x)=0,\quad \psi'(c)=-1,$$

又因为

$$(x-c)^n=[x-x_0-\theta(x-x_0)]^n=(1-\theta)^n(x-x_0)^n,$$

則得出这样的最后的表达式

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}. \tag{13}$$

与拉格朗日型相比較，虽然这一形式的分母中少了个因子$(n+1)$，但是却多了个因子$(1-\theta)^n$，这使得它有时又很有用处。

我們看出，有各种形式余項的戴劳公式是中值定理的变形：这里也同样出現着 c 和 θ！

107. 余項的其他形式 当我們要想在 x 的某个不等于 x_0 的固定值处用多項式 $p_n(x)$ 来近似地替代函数 $f(x)$，而且还把由此而产生的誤差作个数值上的估計时，在这种情况下上面得出的在戴劳公式中的一些余項形式就可适用。但是也常有这样的时候，我們对于 x 的某些定值并不感到兴趣，而覺得重要的倒是在于当 $x\to x_0$ 时余項的状态，准确点説，重要的是关于余項的无穷小量的阶。这个阶数卽使在某些較弱的条件下也还是可以决定的。就是，假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域（双側或单側）只有 n 个逐阶导数

$$f'(x),\quad f''(x),\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)$$

存在着，而且最后的 $f^{(n)}(x)$ 在点 x_0 連續[①]。这时，在公式(12)中

---

① 其实只要假定导数 $f^{(n)}(x_0)$ 在一点 $x=x_0$ 处存在。我們为了便于求得結論，加了較强的条件。

以$(n-1)$代替n，可以写出:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中c在x_0与x之間，令最后一項中的

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x); \tag{14}$$

因为当$x\to x_0$时，显然地也有$c\to x_0$，于是(根据連續性的假定)$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$，則$\alpha(x)\to 0$，而$\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$。最后，得出:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n); \tag{15}$$

这样，这一回

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n), \tag{16}$$

即是，关于余項式我們这里只知道，在n为固定而$x\to x_0$时它与$(x-x_0)$比起来，是一个高于n阶的无穷小量，虽然——要着重指出——沒有一个固定的x在那里的$r_n(x)$的值是我們知道了的。余項式(16)是由皮亚諾[①]給出的。

我們見到，公式(15)仅仅刻划出当x趋向于x_0时函数的狀态，所以事实上它是有一定的“局部”性的。

若在(15)中又把$f(x_0)$移到左边且令$x-x_0=\Delta x$，則得出展开式

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\cdots+$$

① 朱塞佩·皮亚諾(1858—1932)是意大利数学家。

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n), \tag{15a}$$

它是 **82** 段公式(3):

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

的推广，当(15a)中的 $n=1$ 时就得出后一公式。

有时为了方便起见，就索性把(14)取成

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(x_0)+\alpha(x);$$

此处当 $x\to x_0$ 时，同样也有 $\alpha(x)\to 0$，而有皮亚诺型余项的戴劳公式就可写为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{17}$$

最后还要提出以下的附注。若在公式(12a)与(15a)中把 Δx 换成 dx，再回想起

$$f'(x_0)dx=df(x_0),\quad f''(x_0)dx^2=$$
$$=d^2f(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)dx^n=d^nf(x_0)$$

及

$$f^{(n+1)}(c)dx^{n+1}=d^{n+1}f(c),$$

则，在代入(12a)与(15a)以后，这两式就可表示为

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c),\quad (c=x_0+\theta\Delta x,\ 0<\theta<1) \tag{12б}$$

及

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n). \tag{15б}$$

这样，若假定 $\Delta x\to 0$，则函数的无穷小增量 $\Delta f(x_0)$ 由上面的这些公式就不仅可以分出它的主部——第一阶微分，而且也分出更高

阶的无穷小量项，它们——除去其分母中的阶乘因子不论——就是高阶微分

$$d^2f(x_0),\cdots,d^nf(x_0).$$

108. 已得的公式在初等函数上的应用 若 $x_0=0$, 戴劳公式就显得最简单了①:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x). \tag{18}$$

在把 $(x-x_0)$ 取作新的自变量之后，一般的戴劳公式总可以化成这个特别情形的。

我们考虑某些初等函数依这个公式的具体展开式。

1) 设 $f(x)=e^x$, 于是，由[**96** 段, 3)], 对于任何 $k=1,2,3\cdots$, $f^{(k)}(x)=e^x$。因为在这时 $f(0)=1, f^{(k)}(0)=1$, 故依公式(18),

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

2) 若 $f(x)=\sin x$, 则 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$[**96** 段, 4)], 于是

$$f(0)=0,\quad f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0,$$

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{m-1}\quad(m=1,2,3,\cdots).$$

因此，令公式(18)中 $n=2m$, 就有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots-(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+r_{2m}(x).$$

3) 类似地，在 $f(x)=\cos x$ 时[**96** 段, 4)]

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f(0)=1,\quad f^{(2m)}(0)=(-1)^m,$$

① 这一公式也以麦克劳林命名。

$$f^{(2m-1)}(0)=0 \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

这样(若取 $n=2m+1$):

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!}+r_{2m+1}(x)$$

4) 現在考虑冪函数 x^m, 其中 m 不是自然数也不是零。在这个情形下, 当 $x\to 0$ 时, 若 $m<0$ 则函数本身无限增大, 否則, 当导数的阶 $n>m$ 时, 导数会无限增大。因此, 这里不能取 $x_0=0$。

今取 $x_0=1$, 就是要把 x^m 依 $(x-1)$ 的冪来展开。如前所述, 我們可以引用 $(x-1)$ 作为新的变量; 不过仍旧用 x 来記这一新变量, 于是也就是要把函数 $(1+x)^m$ 依 x 的冪来展开。

我們知道[96 段, 1)],

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

因此

$$f(0)=1,\ f^{(k)}(0)=m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

展开式的形式为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^n+r_n(x).$$

5) 若轉移到对数函数 $\ln x$ 上, 它在 $x\to +0$ 时趋向于 $-\infty$, 所以, 与前例一样, 我們就来考虑函数 $f(x)=\ln(1+x)$, 而且要把它依 x 的冪来展开。

这时[96 段, 2)]

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\text{①},$$

$$f(0)=0,\ f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

由此

① 我們永远規定 $0!=1$。

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x).$$

6) 現在設 $f(x)=\operatorname{arctg}x$。由 96 段，5) 很容易得着它的导数在 $x=0$ 处的值：

$$f^{(2m)}(0)=0,\quad f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!$$

因此它的展开式可以表示成为这一形式

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}+r_{2m}(x).$$

109. 近似公式·例 若在公式(18)中弃去余项，則得**近似公式**

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

它以多項式来替代原来性質复杂的函数。这个公式的性能可从两方面来估价：或者通常用余項的拉格朗日形式来指出誤差的限度：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

或者，由皮亚諾式来表現出在 $x\to 0$ 时，这个誤差的无穷小量的阶：

$$r_n(x)=o(x^n).$$

例如 回到前面所考虑的初等函数的展开式。

1) 令 $f(x)=e^x$. 近似公式为：

$$e^x\doteq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!};$$

因为在这里的余項是

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

所以，例如在 $x>0$ 时，可估計誤差如下：

$$0<r_n(x)<e^x\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

特例，若 $x=1$，

$$e\doteq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad 0<r_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

我們在 49 段数 e 的近似計算中已經利用过与此类似的公式，但余項的估計是由另一方法得出的，那里的結果是比較精确些。

2) 取 $f(x)=\sin x$, 得着

$$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

在这个情形余項为:

$$r_{2m}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

而且容易估計誤差:

$$|r_{2m}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

特别地, 若我們只取一項而令

$$\sin x \doteq x,$$

那么, 为着要使誤差小于, 比如說 0.001, 就只要取(算作 $x>0$)

$$\frac{x^3}{6}<0.001 \text{ 或 } x<0\ 1817,$$

它大約等于10°。在利用两項的近似公式

$$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{6}$$

时, 要想达到同样的准确度, 就只需要取

$$\frac{x^5}{120}<0.001 \text{或} x<0.6544(\doteq 37.5°);$$

如果限制角 $x<0.4129(\doteq 23.5°)$, 那末誤差甚至可 <0.0001, 余类推。

3) 类似地对于 $f(x)=\cos x$, 我們有

$$\cos x \doteq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!},$$

而且

$$r_{2m+1}(x)=(-1)^{m+1}\cos\theta x\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

于是

$$|r_{2m+1}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

例如, 对于公式

$$\cos x \doteq 1-\frac{x^2}{2}$$

有誤差

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}.$$

要使誤差，比如說，<0.0001，就要使 $x<0.2213(\doteq 13^\circ)$，余类推。

我們要請讀者注意，与 **56**、**57**、**98** 諸段的公式比較起来这里已有了重大的进展．现在我們已經能够确定誤差的限度，并且也得到了具有任何准确度的展开式。

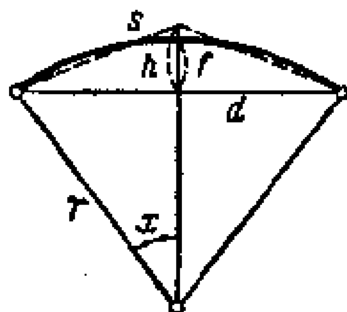


图 41.

最后，我們举一个完全是另一类型的近似公式的例，但是仍旧要用到戴劳公式的。

4) 要想把圓弧近似地求长，而这条弧与半徑比較起来是很微小的（图 41）契貝謝夫① 曾經給出了以下的法則：弧长 s 近似地等于作在弦长 d 上而高为 $\sqrt{\frac{4}{3}}f$（f 是矢长）的等腰三角形的两腰之和。

若以 x 記圓心角的一半，r 記半徑，則 $s=2rx$。另一方面，

$$\frac{1}{2}d=r\sin x=r\left\{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right\},\ \left(\frac{1}{2}d\right)^2=r^2\left\{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)\right\},$$

$$h=\sqrt{\frac{4}{3}}\,f=\sqrt{\frac{4}{3}}\,r(1-\cos x)=\sqrt{\frac{4}{3}}\,r\left\{\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right\},$$

$$h^2=r^2\left\{\frac{x^4}{3}+o(x^5)\right\},$$

于是等腰三角形的两腰之和，依照毕达哥拉斯定理，等于

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2+h^2}=2r\sqrt{x^2+o(x^5)}=2rx\sqrt{1+o(x^3)}=2rx+o(x^4).$$

讀者明白，在契貝謝夫公式里因子 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 的作用就是在于要消灭掉根号里 x^4 的那一項。計算的結果，所得的弧长的近似値与弧本身的长相差一个高于四阶的无穷小量。

我們还要在第十五章（第二卷）关于无穷級数部分里再来講有余項的戴劳公式，在那里这个公式将起着极其重要的作用，在那里也将举些应用級数于近似計算的例子，这些例子其实往往就是戴劳公式的应用。

---

① 巴夫努其·里沃維奇·契貝謝夫院士（1821—1894）是偉大的俄罗斯数学家，是彼得堡数学学派的奠基人。

第七章　应用导数来研究函数

§1. 函数的变化过程的研究

110. 函数为常数的条件　在研究函数的变化过程的时候首先出现的問題是，在那些条件下函数在一个給定的区間内始終等于常数，或若单調地变化[47 段]。

定理　設函数 $f(x)$ 定义在区間$\mathscr{X}$① 上，且在其内有有限的导数 $f'(x)$，而在其两端（若它們属于$\mathscr{X}$）上保持連續。要使 $f(x)$ 在$\mathscr{X}$ 上为常数，充分的条件是

$$f'(x)=0 \text{ 在 } \mathscr{X} \text{ 内。}$$

証明　假定这一条件已是滿足。我們从区間$\mathscr{X}$中固定某一点 x_0，再取其他的任何一点 x。对于区間$[x_0, x]$或$[x, x_0]$拉格朗日定理[102 段]的一切条件都是滿足了的。因此，我們可以写出

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

其中 c 在 x_0 与 x 之間，也就是，已知 c 是在$\mathscr{X}$内。但是依据假定 $f'(c)=0$，因而，对于$\mathscr{X}$中的一切 x

$$f(x)=f(x_0)=\text{常数}.$$

我們的論断就已証明。

注意，定理中的这个条件显然也是函数为常数的必要条件。

由此可以推得以下的簡单推論，它在积分学内將有着重要的应用。

推論　設两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在区間$\mathscr{X}$上，且在其内有有限的导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，而在其两端（若它們都属于$\mathscr{X}$）上保

---

① 区間$\mathscr{X}$可以是閉的或不是閉的，有限的或无穷的。

持为連續。若这时

$$f'(x)=g'(x) \text{ 在 } \mathscr{X} \text{ 內},$$

則在全区間$\mathscr{X}$上这两个函数仅相差一个常数:

$$f(x)=g(x)+C \quad (C=\text{常数}).$$

只要把定理应用到差$f(x)-g(x)$上去就可证明；因为$f(x)-g(x)$的导数在$\mathscr{X}$內成为零，因而差本身在$\mathscr{X}$上就成为常数。

現在来考虑函数

$$\operatorname{arctg} x \text{ 与 } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$$

为例很易驗证，它們的导数在除去$x=\pm1$（在此处第二个函数失去意义）以外的一切点x处都是相等的。因此，恒等式

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg} x+C$$

仅是各別地在区間

$$\mathscr{X}_1=(-1,1), \quad \mathscr{X}_2=(-\infty,-1), \quad \mathscr{X}_3=(1,+\infty)$$

中的每一个上成立。很奇妙的是，常数C的值在这些区間上各不相同。在第一个区間上$C=0$（令$x=0$，就可证实），而在其他二个区間上，各有$C=\frac{\pi}{2}$或$C=-\frac{\pi}{2}$（这是很容易证到的，例如，若令$x\to-\infty$或$x\to+\infty$）。

所有这些关系式也都可以用初等的方法来证明。

附注　在作理論研究的时候，以及一般地当函数是这样的給定着，从它的定义里不能够直接看出它是常数的时候，那么剛才证明的定理的价值就显示出来了。类似于此的情况我們以后还会屡次遇到。

111. 函数为单調的条件　我們現在来說明，怎样能够由函数的导数去判定函数本身在一个給定的区間上是上升（下降）的。

定理　設函数$f(x)$确定在区間$\mathscr{X}$上，且在其內有有限的导数$f'(x)$，而在其两端（若它們属于$\mathscr{X}$）上保持着連續。要使$f(x)$在$\mathscr{X}$上狹义地单調上升（下降），充分的条件是

$$\text{在 } \mathscr{X} \text{ 內 } f'(x)>0 \quad (<0).$$

证明　今对上升的情形来进行证明。設这时已滿足所述的条

件。在$\mathscr{X}$里我們取二个值 x' 与 $x''(x'<x'')$，且在区間$[x', x'']$上对于函数 $f(x)$ 应用拉格朗日公式:

$$f(x'')-f(x')=f'(c)(x''-x') \quad (x'<c<x'').$$

因为 $f'(c)>0$，所以

$$f(x'')>f(x'),$$

而函数 $f(x)$ 就严格地上升了。

这一次所述的条件已不再是完全必要的条件了。例如，若导数 $f'(x)$在区間$\mathscr{X}$内的有限多个点处成为 0 时，則定理仍然成立。我們可以很容易地来証实这一点，就是把区間$\mathscr{X}$用这些点来分成若干小区間，再在每个小区間上分别地应用剛在証明的定理。

只要回想一下［77、78 段］导数就是函数图形上的切綫斜率，那末从几何上看来，剛才在导数的符号与函数变化方向之間所建立的联系是非常明显的了。这个斜率的符号指出了切綫是向上还是向下傾斜的，于是曲綫本身也就随着切綫向上或向下前行(图



图 42.

42)。切綫在个别的点上也可能是水平的，这就相当于导数成为零时。

例 1) 函数 $f(x)=x^3$ 就是后一种情况的最簡单的例子：它是上升函数，但是它的导数 $f'(x)=3x^2$ 却在 $x=0$ 时为零。

2) 类似地，函数

$$f(x)=x-\sin x$$

也是个上升函数，因为它的导数

$$f'(x)=1-\cos x$$

不为负数，虽然在数值 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时为零。

112. 极大及极小 · 必要条件 若函数 $f(x)$ 定义于区間 $[a,b]$ 上并在其上連續的，但不是单調的，則在区間 $[a,b]$ 上必能找到些部分区間 $[\alpha,\beta]$，在它們的内点（即在 α 与 β 之間）处函数可以达到最大値或最小値。在函数的图形（图 43）上包含着峰或谷的区間就对应于这些部分区間。

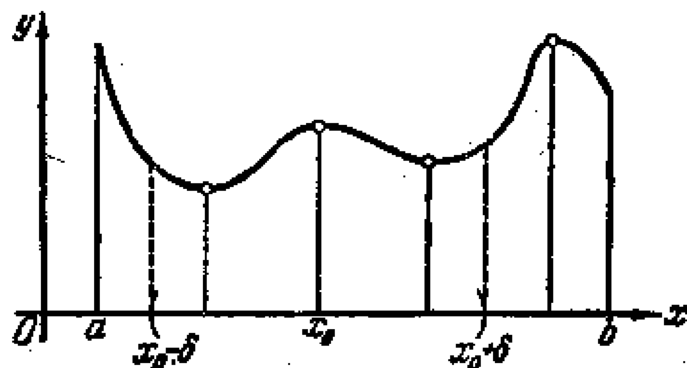


图 43.

我們說函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大（或极小）①，若对于 x_0 能够在函数的定义区間里有这样的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，其中一切点 x 都能滿足不等式

$$f(x)\leqslant f(x_0)$$

$$(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)).$$

换句話說，若数值 $f(x_0)$ 是函数在这点的某个（即使很小的）邻域内所取的一切値中的最大値（最小値），則說 $f(x)$ 在点 x_0 处达到极大（极小）。請注意，就从极大（极小）的定义里先已假定了函数在点 x_0 的两側都是給定了的。

若有这样的邻域存在，在其中（在 $x\neq x_0$ 时），成立着严格的不等式

$$f(x)<f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)>f(x_0)),$$

就說，函数在点 x_0 有狭义的极大（极小），否則，在相反的情形，就

① 按照拉丁文 maximum 与 minimum 的意思是“最大的”与“最小的”（値）。

說有广义的极大(极小)。

若函数在点 x_0 及 x_1 都有极大，則对于区間 $[x_0, x_1]$ 我們应用維尔斯脫拉斯第二定理[73]，就可看出，函数必在 x_0 与 x_1 之間的某一点 x_2 处达到在这个区間上的最小值，也就是 $f(x)$ 在 x_2 处就有极小。类似地，在两个极小之間也一定能找出至少一个极大。在那种最簡单的(而实用上是最重要的)情形下，即当函数总共只有有限多个极大及极小的时候，这些值干脆就交迭着出现。

注意，可以用一个共同的名詞——极值[①]来表示极大或极小。

現在要問，怎样去求出能使函数获得极值的变元的一切值，在解决这个問題的时候，导数就会起着根本的作用。

首先假定，函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 內存在着有限导数。若在点 x_0 函数有极值，則应用前面讲过的費馬定理[100段]于区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，就得出 $f'(x_0)=0$：这就是极值存在的必要条件。极值只能在那些使导数为零的点里去找；这种点就叫做静止点[②]。

但是不要以为，每一个静止点都能够使函数获得极值：剛在所指出的条件只是必要的，而非充分的。我們曾經看到，例如，在111段1)里，函数 x^3 的导数 $3x^2$ 在 $x=0$ 时就等于零，然而在这一点函数却沒有极值：它始終是上升着。

这样，一个函数 $f(x)$ 的静止点，可以說，只是关于极值的一个“可疑的”点，我們还应当对它作进一步的檢驗。

若是扩大所考慮的函数的种类，而設 $f(x)$ 在个别的点处不存在有限导数，那末 $f(x)$ 也可能在某一个这种有限导数不存在之点处取得极值。因此也同样应該把这种点放在关于极值的“可疑的”点之列，而且給以檢驗。

113. 第一法則 因此，設点 x_0 是关于函数的极值的“可疑的”

① 拉丁文 extremum，它的意思是“极端的”(值)。

② 在这些点处函数好象是“停止”了变化：这时变化的速度[78段]为零。

点。

假定，在这点 x_0 的某一邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内（至少对于 $x\neq x_0$）存在着有限的导数 $f'(x)$，而且这个导数在 x_0 的左右两边都（各别地）保持着确定的符号。这时，就会有以下三种情形：

I. 在 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，而在 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$，即导数 $f'(x)$ 在经过点 x_0 时由正号变为負号。在这一情形，函数 $f(x)$ 在区間$[x_0-\delta, x_0]$上是上升的，而在区間$[x_0, x_0+\delta]$上是下降的，于是数值 $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在区間$[x_0-\delta, x_0+\delta]$上的最大值，即是，在点 x_0 函数有极大。

II. 在 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，而在 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$，即导数$f'(x)$

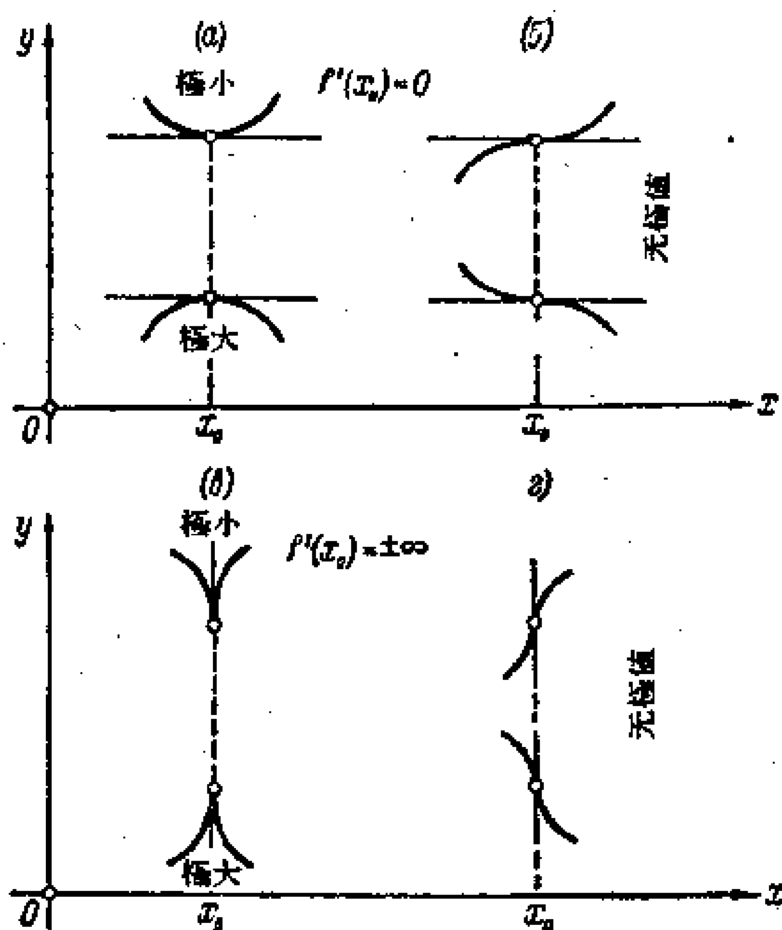


图 44.

在經过点 x_0 时由負号变为正号。在这一情形，类似地可以証实，在点 x_0 函数有极小。

Ⅲ. 在 $x<x_0$ 及 $x>x_0$ 时都有 $f'(x)>0$，或者在 x_0 的左右两边都有 $f'(x)<0$，卽 $f'(x)$ 在經过点 x_0 时并不变号。那时函数或者总是上升的，或者总是下降的：在 x_0 的某一側的任意近处总可找出些点 x，使 $f(x)<f(x_0)$，而在其他一側又有些点 x 使 $f(x)>f(x_0)$，于是在点 x_0 无极值。

于是，我們得到檢驗"可疑的"值 x_0 的第一个法則：先把 $x<x_0$，再把 $x>x_0$ 代入导数 $f'(x)$ 以确定导数在点 x_0 的左右附近的符号：若这时导数 $f'(x)$ 的符号由正变負，則有极大，若由負变正，則有极小，若不变号，則决无极值。

現在来描述一下我們将对之应用这一法則的那一类函数。这类函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續且有連續的导数 $f'(x)$，最多有限多个点除外。在这些例外的点处导数 $f'(x)$ 从它的左边及右边都要趋向于同号或异号的无穷极限，在第一种情形存在着双側无穷导数，而在第二种情形因符号不同就分为两个单側导数①。最后还設导数只能在有限多个点处为零。这类函数的关于极值的"可疑的"点的各种可能性，我們在图 44 上給出了几何的說明。

注意，在 б, в, г 的情形中，曲綫是从切綫的一边穿过切綫而到另一边的；在这种情形就說是曲綫有拐点。

对于所考慮的这一类函数，上述的法則完全可以解决我們所关心的問题。这是因为，对于这种函数在区間 (a, b) 內只有有限多个静止点或有限导数在那里不存在的点：

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_{n-1}<b, \tag{1}$$

又在任一区間

① 利用从剛才講过的导数符号的探討上就恰好可以判别出这些情况。

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \cdots,\ (x_k, x_{k+1}),\ \cdots,\ (x_{n-1}, b) \tag{2}$$

內导数 $f'(x)$ 保持着不变号。事实上，如果 $f'(x)$，例如在区間 (x_k, x_{k+1}) 内，变了号的话，那末，由 $f'(x)$ 的連續性的假定——依波尔察諾-哥西定理 [68]——它在 x_k 与 x_{k+1} 之間的某一点就要为 0，但这是不可能的，因为导数的一切根都已包括在点列(1)之內了。

依照 **111** 段的定理，在(2)中的每个区間內函数严格单調地变化着。

附注 虽然所指出的这类函数已足可包括一切实用上有价值的情况，但是可能在有些情形我們这一研討“可疑的”值的法則并不适用，懂得这一点是有好处的。例如，若考虑由等式

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ (\text{在 } x \neq 0 \text{ 时})\ \text{及}\ f(0) = 0$$

所确定的函数。我們已知[88 段，2°]它在 $x=0$ 时有导数 $f'(0)=0$。可是在这个靜止点的左边及右边的任何近处，导数

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

却会无穷多次地变号，同时也无穷多次地为零，所以法則不能适用（虽然不用它，也能直接地明了在点 $x=0$ 处无极值）。

114. 第二法則 設点 x_0 是靜止点：

$$f'(x_0) = 0 \tag{3}$$

又函数 $f(x)$ 不仅在这点的一个邻域內有一阶导数 $f'(x)$，而且在点 x_0 还有二阶导数 $f''(x_0)$，那末就可以把一切的檢驗都轉化成为对于 $f''(x_0)$ 符号的考察，这里假定 $f''(x_0)$ 不为零。

其实，由导数的定义，再配合(3)，就有

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

然而，依照 **37** 段，2)中的定理，函数

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} \tag{4}$$

的符号，只要当 x（不等于 x_0）充分接近于 x_0（$|x-x_0|<\delta$）的时候，就与其极限 $f''(x_0)$ 的符号相同。

又設，比如說，$f''(x_0)>0$；那时分数(4)对于上述的一切值 x 就是正的。但是当 $x<x_0$ 时，分母 $x-x_0<0$，因此，分子 $f'(x)$ 也必須同样地小于零；反之，当 $x>x_0$ 时，就有 $x-x_0>0$，于是也有 $f'(x)>0$。換句話說，我們得出导数 $f'(x)$ 的符号由負变正，于是就可以依照第一法則，得出在点 x_0 有极小。类似地可以确定：若在点 x_0 处 $f''(x_0)<0$，則在点 x_0 有极大。

这样，可以把用来檢驗"可疑的"值 x_0 的第二法則叙述于下：把 x_0 代入二阶导数 $f''(x)$ 内；若 $f''(x_0)>0$，則函数有极小，若 $f''(x_0)<0$，則函数有极大。

一般說来，这一法則的适用范圍是比較狹窄的：例如，在那些有限一阶导数不存在的点处，这一法則就显然是不能用的（因为在那里就更談不上二阶导数）。又如在那种二阶导数等于零的情形，这个法則也同样地不能給出什么結果。那时問題的解决就要依賴于高阶导数的性态了[参看 **117** 段]。

115. 函数的作图 善于找出那些数值 x 使函数 $y=f(x)$ 在那里能够取得极值，这可以用在函数的作图上，它可以更精确地刻划出当 x 在区間 $[a,b]$ 上从左到右逐漸增大的时候，函数的变化进程。

以前 [**19** 段]我們按点作过图形，所取的点或是較密或是較疏，但这些点的取法都是偶然的，而沒有顧到每一个图形的特性(事先也并不知道)。現在我們就可以利用前面所指出的一些方法去确定某些个"据"点，也就是能說明当前函数的特性的点。我們这里所指的，首先就是图形的"轉向点"，即是曲綫的峰与谷，它們对应于函数的极值。此外，一切有水平切綫或垂直切綫的点，即使它們并不对应于函数的极值，也应算到这些"据"点里去。

我們只限于考慮在 113 段內所指出的一类函数 $y=f(x)$。这时,要作这种函数 $y=f(x)$ 的图形,就应該进行如下:

1)确定使导数 $y'=f'(x)$ 等于零或无穷大(或至少存在无穷单侧导数)的 x 值,并研究这些 x 是不是对应于函数的极值;

2)对于一切这些 x 值以及所論的区間的端点 a 与 b, 計算出函数 $y=f(x)$ 的对应值。

为了方便起見,可把所得的結果列成一表(参看下面的例題),并把图形上算出了的点的特性給以必要的标明:极大、极小、拐点,$y'=0, y'=+\infty, y'=-\infty$,以及最后 $y'=\pm\infty$ 或 $y'=\mp\infty$(我們約定用这两个符号来記异号的无穷单侧导数的情形)。若是愿意的話,在上述的那些图形上的点以外,还可以再考慮一些其他的点,例如,图形与两軸的交点等。

把这些点都画到图上之后,就可以經过这些点(点的个数一般是不太多的)作函数的图形,并且注意到这些点的特性。应当記住,在它們之間的各个区間上,113 段中已經說明过,导数的符号是不变的,于是图形在每一个区間上也就总是向上或总是向下地前行着。

若当 x 变号时函数值不变(偶函数),则图形就对称于 y 軸,于是曲綫的計算与作图就可簡化些。当图形对称于坐标原点时,作图也可簡化。它在解析上表示:当 x 变号时函数也只变其号(奇函数)。

准确地指出函数的上升与下降的区間,以及函数的变化速度下降到零或上升到无穷的那些点。这样作出的图形——不企图去求得各个縱坐标的准确性——已經可以十分完善地反映出函数变化的进程(这也正是我們的目的)。

116. 例 1) 求函数

$$f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$$

的极值，且作其图。

由于函数有周期 2π，所以我們只要討論 x 在區間 $[0, 2\pi]$ 上的变化就可以了。它的导数是

$$f'(x)=3\sin^2x\cdot\cos x-3\sin x\cdot\cos^2x=3\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x-\cos x).$$

它的根(靜止点)是:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, (2\pi).$$

在經过 $x=0$ 时因子 $\sin x$ 的符号由負变正，而 $f'(x)$ 的最后二个因子的乘积在 $x=0$ 附近保持着負号，所以整个导数的符号由正变負；故在 $x=0$ 有**极大**。因子 $\sin x-\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 时等于零，在經过这点时，这因子的符号由負变正，且因为前面两个因子都为正，故导数的符号由負变正；因此在这点有**极小**。仿此考察其余的靜止点：在所有这些点处函数交迭地获得极大与极小。

要决定极值，我們也可以不去考察一阶导数的变号，而来計算二阶导数

$$f''(x)=3(\sin x+\cos x)(3\sin x\cos x-1)$$

再把要檢驗的 x 值直接代入 $f''(x)$。例如，在 $x=0$ 时，我們得着 $f''(0)=-3$，这对应于**极大**。在 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，就有 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，即对应于**极小**，余类推。

我們还要来决定图形与 x 軸交点的横坐标，就是，解方程式 $\sin^3x+\cos^3x=0$，由此 $\cos x=-\sin x$，于是 $x=\frac{3\pi}{4}$ 或 $x=\frac{7\pi}{4}$。

現在把这些求得的 x 值的对应函数值算出来，并且列成一个表：

$x=$	0	$\frac{\pi}{4}=0.78$	$\frac{\pi}{2}=1.57$	$\frac{3\pi}{4}=2.36$	$\pi=3.14$	$\frac{5\pi}{4}=3.94$
$y=$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.71$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx-0.71$
	$y'=0$	$y'=0$	$y'=0$		$y'=0$	$y'=0$
	极大	极小	极大		极小	极大

$x=$	$\frac{3\pi}{2}=4.71$	$\frac{7\pi}{4}=5.50$	$2\pi=6.28$
$y=$	-1	0	1
	$y=0$		$y'=0$
	极小		极大

依照着这个表可以作出图形，把它画在图 45 上。

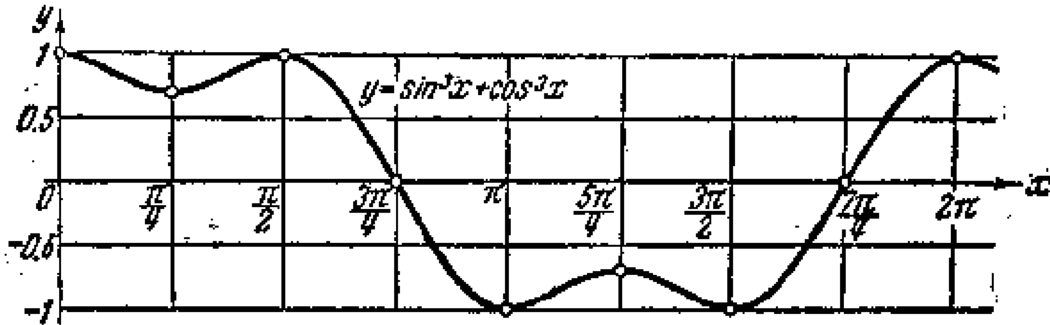


图 45.

2) 求函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值，且作其图形。

在这次有限导数

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

除了在点 $x=0$ 及 $x=\pm 1$ 以外，是到处存在的。当 x 从左边及右边去接近这些值时，导数就有无穷极限，即是説，在这些点上导数等于 $\pm\infty$[103]。

要确定导数的根，可令它的分子等于零，我們就求得：$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。于是关于极值为"可疑的"点就是：

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1.$$

此外，由于这函数是偶函数(因此，它的图形对称于 y 軸)，所以就只要限于右半平面，即数值 $x\geqslant 0$，来討論就够了。

当 $x=0$ 时 (并在此点附近) 分子与分母的第二个因子都有正号。因子 $x^{\frac{1}{3}}$ 则由負变为正，因此导数亦由負变为正：极小。当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 (并在其附近)分母恒为正。至于分子，由于 x 之值在 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 附近，可以重写为 $(1-x^2)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}$；它在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时为 0，而随 x 之减小而增大，随 x 之增大则减小，因此是由正变为負而有极大出現。在經过 $x=1$ 时，分母中的因子 $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ 在該点为 0，然而却不变号；整个导数亦然，因此在 $x=1$ 时沒有极值。

虽然所考虑的函数定义在整个区間 $(-\infty,+\infty)$ 上而且是連續的，但是图形当然只能够在有限区間上去作出来。然而仍可以說明函数"在无穷远处"的性态：若把函数重写成

$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

则就很显然的有：$f(x)>0$ 且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$。这样，函数的图形是

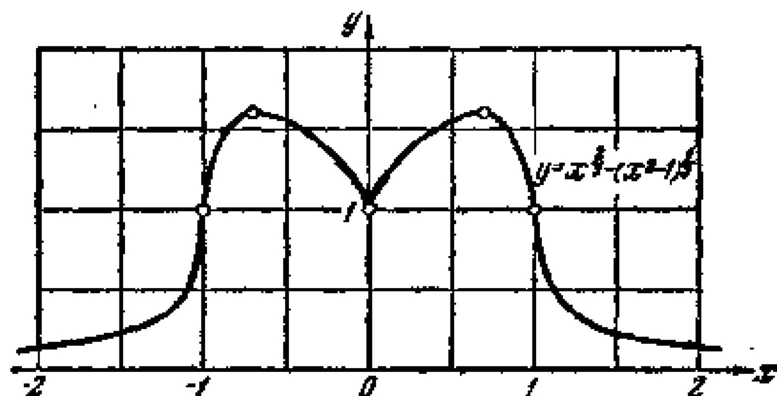


图 46.

在 x 軸的上边，不过当图形向左边无穷远处及右边的无穷远处移动时，它却可以无限地接近于 x 軸。

表：

$x=$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.71$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.71$	1	$+\infty$
$y=$	0	1	$\sqrt[3]{4}=1.59$	1	$\sqrt[3]{4}=1.59$	1	0
		$y'=+\infty$	$y'=0$	$y'=\mp\infty$	$y'=0$	$y'=-\infty$	
			极大	极小	极大		

图形見图 46.

117. 高阶导数的应用 我們已經見到，若 $f'(x_0)=0$，而 $f''(x_0)>0$，則函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小；又若 $f'(x_0)=0$ 而 $f''(x_0)<0$，則函数在这点有极大。至于当 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)=0$ 的情形，我們还沒有研究过。

現在假定函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域內有 n 个逐阶导数，且第 n 阶导数在点 $x=x_0$ 連續。又設直到 $(n-1)$ 阶为止这些导数全都在这点等于零：

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

但同时却有 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$。把函数 $f(x)$ 的增量 $f(x)-f(x_0)$ 按 $(x-x_0)$ 的冪而用有皮亚諾型余項的戴劳公式[107 段，(17)]来展开。因为小于 n 阶的一切导数在点 x_0 等于零，故

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

由于当 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to0$，所以当 x 充分接近于 x_0 时，分子的和的符号就会与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号相一致，在 $x<x_0$ 时以及在 $x>x_0$ 时都是如此。現在来考慮两种情形：

1° n **是奇数**：$n=2k+1$。当 x 的数值由小于 x_0 变到大于 x_0 时，因式 $(x-x_0)^{2k+1}$ 就会变号，但因为上式第一个因子这时不变号，所以差 $f(x)-f(x_0)$ 也要变号。这样一来，函数 $f(x)$ 在点 x_0 就不能有极值了，因为在这点的附近，函数值有小于 $f(x_0)$ 的，也有大于 $f(x_0)$ 的。

2° n **是偶数**：$n=2k$。在这一情形，当 x 由小于 x_0 变到大于 x_0 时，差 $f(x)-f(x_0)$ 并不变号，因为对于一切 x 都有 $(x-x_0)^{2k}>0$。显然，在 x_0 的左右两边附近，差 $f(x)-f(x_0)$ 的符号与数 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号是一致的。这卽是說，若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则在点 x_0 的附近 $f(x)>f(x_0)$，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极小；又若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则函数有极大。

由此卽得这样的**法则**：

若在各阶导数中，第一个在点 x_0 不等于零的是奇数阶导数，则函数在点 x_0 既无极大值也无极小值。若这种导数是偶数阶导数，则函数在点 x_0 有极大值或极小值，且要看这个导数是負的还是正的而定[①]。

例如，对于函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$，則 $x=0$ 是靜止点，因为在这点导数

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$$

等于零。其次：

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\qquad f''(0)=0;$$

---

① 1742 年柯林·麦克洛林在他的"流数論"里指出了这个法則。

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\qquad f'''(0)=0;$$
$$f''''(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\qquad f''''(0)=4.$$

因为第一个不等于零的是偶阶导数，故有极值，又因 $f''''(0)>0$，而为极小。

§2. 函数的最大值及最小值

118. 最大值及最小值的求法 設函数 $f(x)$ 定义在有限閉区間 $[a, b]$ 上而且是連續的。迄今为止我們只注意到函数的极大及极小，現在再提出一个問題，即怎样去找出函数在这个区間上所取的一切值中的最大的及最小的；① 根据連續函数的已知性质[73]，这种最大值及最小值都是存在的。为了确定起見，就来討論最大值。

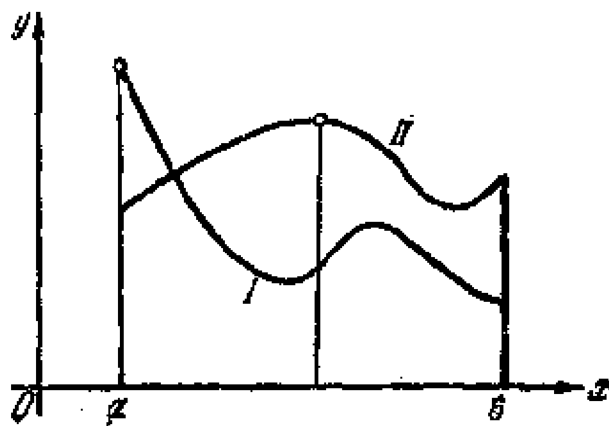


图 47.

若函数在 a 与 b 之間某点达到最大值，则它同时也就是极大之一(显然，是最大的极大)；但是函数也可能在区間的一个端点 a 或 b 上达到最大值(图 47)。这种一来，我們就需要把函数 $f(x)$ 的一切极大互相比較一下，并且与它的边界值 $f(a)$ 及 $f(b)$ 也要比較一下；这些数中的最大的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一切值中的最大值。类似地也可以找出函数的最小值。

如果要想避免对极大或极小进行探討，那末可以换个做法。只須算出在一切有关极值的"可疑的"点处的函数值，再把它們与

① 这样，我們替名詞"极大"保留起它的"特有的"意义(函数在对应点的直接邻域内的最大值)，并且使它有别于在所考虑的全区間上函数的最大值。

关于函数的极小与最小值也是一样。

边界值$f(a)$及$f(b)$相互比較一下;这些数中的最大数及最小数显然就是函数一切值中的最大值及最小值。

附注 在应用問題上多半会碰到在a与b之間只有一个“可疑的”点x_0这种簡单情形。如果在这点函数有极大(极小),那末不必去与边界值相比較也可明白这就是函数在区間上的最大值(最小值)(图48)。在这类情形,去对极大及极小进行探討經常会显得比去算出及比較函数的个别的一些值更为簡单(尤其是,若在函数的表达式內含有文字常数时)。

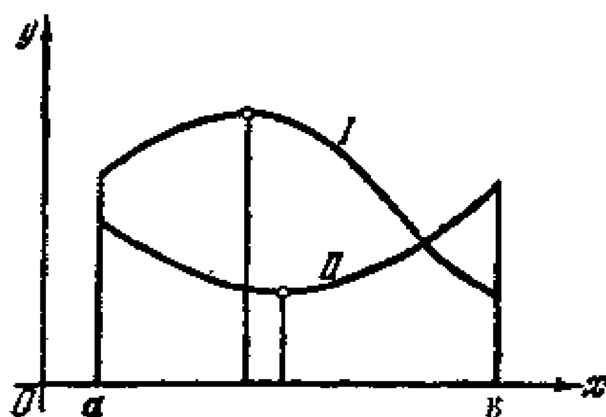


图 48.

还要着重指出,上面所讲的完全可以适用于开区間(a, b)以及无穷区間。

119. 問題 現在闡明屬于各方面的几个問題。这些問題的解决恰好就要归結于求函数的最大値或最小值。然而,时常这些函数值本身还不及那些使函数获得极值的点(变元的数值)有意义。

1) 在一块边长为a的正方形铁片的各角上切去相等的正方块,再把它的边沿着虛綫折轉(图49),作成一个无蓋的方底盒子。怎样才能得出有最大容积的盒子呢?

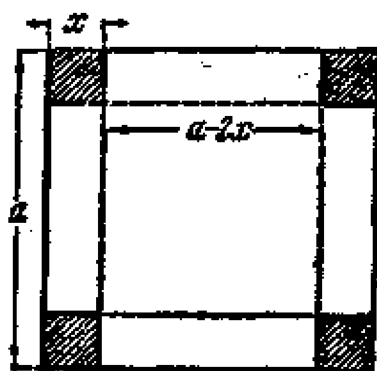


图 49.

若用x表示切去的正方块的边长,則盒子的体积y可以表示为:$y=x(a-2x)^2$,而x是在区間$\left[0, \frac{a}{2}\right]$上变化着。問題就已成为去找出函数在这个区間上的最大值了。

因为导数$y'=(a-2x)(a-6x)$在0与$\frac{a}{2}$之間只有唯一的根$x=\frac{a}{6}$,所以,由此可知,这个值可使函数获得极大,同时我們也就得着了所要求的最大值。或者换种說法:在$x=\frac{a}{6}$时有$y=\frac{3a^3}{27}$,同时y的边界值却等于零;因此在$x=\frac{a}{6}$时,眞正得出y的最大值。

2) 已知一木料有直径为 d 的圆截面。要把它砍为有矩形截面的且最坚固的木梁。

提示　在材料力学的理論中已証明了，矩形梁的强度与积 bh^2 成比例，此处 b 是木梁的矩形截面的底，而 h 是它的高。

因为 $h^2=d^2-b^2$，所以問題就涉及表达式 $y=bh^2=b(d^2-b^2)$ 的最大值，其中"自变量" b 是在区間 $(0,d)$ 內变化着。

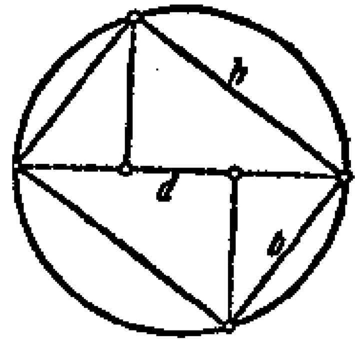


图 50.

导数 $y'=d^2-3b^2$ 在这个区間內只有一次是等于零，即是在点 $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$ 处。二阶导数 $y''=-6b<0$，因此，在所指出的这点达到了极大，同时也就是最大値。

在 $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$ 时，$h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$，于是 $d:h:b==\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$。从图 50 上可以看到，怎样去作所求的矩形（就是，把直徑分成三等分，再在各个分点上竖一垂綫）。

3) 設一电灯可以沿着鉛垂綫 OB（图 51）移动（例如，装在滑輪上时）。它在与水平面 OA 有怎样的距离时就应该停止移动，才能够使得这个平面上的点 A 处有最大的照度？

提示　照度 J 与 $\sin\varphi$ 成比例，而与距离 $r=AB$ 的平方成反比例，即是

$$J=c\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 c 与灯光的强度有关。

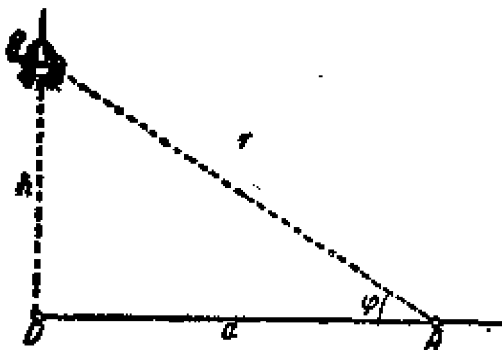


图 51.

若取 $h=OB$ 为自变数，则

$$\sin\varphi=\frac{h}{r},\quad r=\sqrt{h^2+a^2},$$

而 $$J=c\cdot\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}\quad(0<h<+\infty).$$

其次，导数

$$J'_h=c\cdot\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}$$

在 $h=\frac{a}{\sqrt{2}}\doteq0.7a$ 时等于零，而且在 h 經过这个值时 J'_h 变号由正到負，这个 h 就是最适当的距离。

附注　趁此机会要請讀者注意下面的情况。当寻求函数在变元的确定的变化区間上的最大值或最小值时，可能容易遇到在这个区間内完全沒有导数的根，或其他"可疑的"值。这一件事也就供述出在所考虑的区間上函数是单調上升的或是单調下降的，因此，它必在区間的两端上达到最大值及最小值。

§3. 未定式的定值法

120. $\frac{0}{0}$型未定式　現在利用导数的概念去定出一切类型未定式的值。我們先从基本情形——$\frac{0}{0}$型未定式入手，就是研究两个趋向于零(例如，在极限过程 $x\to a$ 之下)的函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的比值的极限問題。以下引入的定理大体上是約翰·伯努利做出的結果。不过包含在这一定理中的法則却是常常叫做"洛必达法則"，因为正是在洛必达著的[1]，1696 年出版的"无穷小量分析"上，第一次发表这一法則(虽然还不完全是目前的形式)。

定理1. 設：1)函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区間 $(a,b]$ 上，2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, 3)在区間$(a,b]$上存在着有限导数$f'(x)$及 $g'(x)$，且 $g'(x)\neq 0$，最后 4)存在着(有限或无穷)极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

則也有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

証明　令 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 等于零：$f(a)=g(a)=0$[2]，

---

[1] 基約姆·佛朗索阿·德·洛必达(1661—1704)是法国数学家。在課文里所提到的那本书是头一本出版的微分学教程。

[2] 当然，本来也可以先就索性假定这两个函数定义且連續于 $x=a$ 处；但是，把定理的条件說成象課文里的那样在应用上有时倒是比較方便些(例如，参看定理 1*)。

我們补充了 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在点 a 的定义。于是这二个函数在整个閉区間$[a, b]$上就都成为連續的了：函数在点 a 的值与 $x\to a$ 时它們的极限相同［由 2)］。而函数在区間上其他各点处的連續性又可从有限导数的存在而推出［参看 3)］。应用哥西定理［**104** 段］，得到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中 $a<c<x$。这里 $g(x)\neq 0$，即 $g(x)\neq g(a)$ 是假設中 $g'(x)\neq 0$ 的一个推論，这在证明哥西公式时就已經得到过了。

当 $x\to a$ 时，显然地，也有 $c\to a$，所以，由 4)，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K,$$

这就是需要证明的。

这样，已证明的定理就把函数之比的极限化成导数之比的极限，若是后者存在的話。求导数之比的极限往往会显得比較簡单些，而且可以用初等的方法来做出。

注意，只不过是为了确定起見，我們才考虑 a 是区間的左端点，而变量 x 从右边趋向于 a 的情形。也可以把 a 算作是右端点，而 x 从左边趋向于 a。最后，也同样可以容許双側极限过程的情形。

例 1) 求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}.$$ ①

依洛必达法則，它等于极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}}=\frac{16}{9}a.$$

① 这是在洛必达书里引用的关于未定式的定值法的第一个例子。

这里由于导数的比式在 $x=a$ 处連續，所以可以把 $x=a$ 直接代入比式而得着最后的結果

2) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}.$$

把导数的比式逐步化简：

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\cos^2 x},$$

在 $x\to 0$ 时，它显然趋向于 2。按照定理，这也就是所求的极限。

請讀者注意，这里导数的比式虽然又是一个 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，但是要去定它的值却已可以用初等变换的方法了。在其他的場合，也可能需要重复地应用这个定理。有必要提醒大家，在定值的时候，允許用各种方法去把所得的式子化簡，如約去公因子、利用已知的极限，等等。

容易把定理 1 推广到变元 x 趋向于无穷极限：$a=\pm\infty$ 的情形。例如，以下的定理就是成立的：

定理 1* 設：1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区間 $[c,+\infty)$ 上，2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，3) 在区間 $[c,+\infty)$ 上存在着有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$，且 $g'(x)\neq 0$，最后 4) 存在着（有限或无穷）极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

則也有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

证明 以公式 $x=\frac{1}{t}$，$t=\frac{1}{x}$ 更换变量 x。于是，若 $x\to+\infty$，則 $t\to+0$，反之亦然。由 2) 就有

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

而由 4)，

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K.$$

对于新变量 t 的函数 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 及 $g\left(\frac{1}{t}\right)$，可以应用定理 1，就給出

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K,$$ ①

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

即是所要求证的。

121. $\frac{\infty}{\infty}$型未定式 现在再来考虑$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，即是研究两个趋向于无穷大（在 $x\to a$ 时）的函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的比值的极限問题。我們要来证明，在这种情形下洛必达法則同样是可以应用的；下面的定理是定理 1 的簡单的复述。

定理 2. 設：1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区間 $(a, b]$ 上，2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$，3) 在区間$(a, b]$上存在着有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$，且 $g'(x)\neq 0$，最后 4) 存在着（有限或无穷）极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

則也有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

---

① 函数 $f\left(\frac{1}{t}\right)$，$g\left(\frac{1}{t}\right)$是作为 t 的复合函数来对 t 求导数的。

证明　由 2)，可以认为，对于所有的 x 值，$f(x)>0$ 及 $g(x)>0$。

先考虑 K 为有限的情形。若給定任意数 $\varepsilon>0$，則由条件 4)，必可求出这样的 $\eta>0(\eta\leqslant b-a)$，在 $a<x<a+\eta$ 时有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

为了簡便，令 $a+\eta=x_0$ 而取 x 在 a 与 x_0 之間。把哥西公式应用到区間 $[x, x_0]$ 上①：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中 $x<c<x_0$，因此，

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

現在写出恒等式(可以直接驗证)：

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right].$$

因为当 $x\to a$ 时，$g(x)\to\infty$，所以必可求出这样的 $\delta>0$ (可以认为 $\delta\leqslant\eta$)，在 $a<x<a+\delta$ 时

$$g(x)>g(x_0),\ 且\ \left|\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是在上述的 x 值时，就有[参看(1)]

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了所需要的命题。

現在設 $K=\infty$[在假定 2) 之下，不可能有 $K=-\infty$ 的情形]；于是，至少当 x 值充分接近于 a 时 $f'(x)\neq 0$。把 f 与 g 的地位交

① 这点就是与定理 1 的证明最不同的地方：这里不能在区間 $[a, x]$ 上应用哥西公式，因为，不論怎样在点 a 处去定义函数 $f(x)$ 及 $g(x)$，由 2) 总不可能得出在 a 点为連續的函数。

换一下，就有

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

所以，依据已证明的結論，

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

由此，且由在本段开始所作的关于 $g(x)>0$, $f(x)>0$ 的說明即知

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

定理 2 中也可以认为 $a=-\infty$，而定理的证明基本上是并不需要更改。如果 a 是所考虑的区間的右端点，則作为特例也可以认为 $a=+\infty$。这样，定理 2 其实已經包括了 $a=\pm\infty$ 这种情形在内。

例

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mu x^{\mu}}=0$（若$\mu>0$）.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{a^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\cdot\ln a}$ $(a>1,\ \mu>0)$.

若 $\mu>1$，則右边又有同一类型$\frac{\infty}{\infty}$的未定式；但若继續这一步驟并且重复地应用定理 2，最后在分子上必可得出帶有負（或零）指数的幂。因此，在一切情形都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0.$$

122. 其他类型的未定式 前面的定理都是有关于$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式的。

若有 $0\cdot\infty$ 型的未定式，則可以把它变成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，而后应用洛必达法則，設

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

幷且 $f(x)$不变号。于是就有

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

其中第二式在 $x\to a$ 时是$\frac{0}{0}$型未定式，第三式是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式。

例 5)

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

(我們算作 $\mu>0$)。

也总可以把 $\infty-\infty$ 型的未定式变成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型。設有式子 $f(x)-g(x)$，而且

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

于是，可以作例如以下的变换，把这个式子化为$\frac{0}{0}$型的未定式：

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}.$$

然而在实地运算时常常还可以比这更簡单地做到这一点。

例 6)

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\cdot\sin^2x},$$

但

$$\frac{x^2\cdot\cos^2x-\sin^2x}{x^2\cdot\sin^2x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2x};$$

前一个因子的极限可以用初等的方法去求出：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

对第二个因子应用定理1：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

这样，所要求的极限就等于 $-\frac{2}{3}$.

对于 1^∞, 0^0, ∞^0 等型的未定式，可以预先把这些式子取对数。

設 $y=[f(x)]^{g(x)}$；則 $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$。$\ln y$ 的极限就是已經熟悉了的 $0\cdot\infty$ 型未定式。若是用前面指出的方法之一能求出 $\lim\limits_{x\to a}\ln y$，它等于有限数 k, $+\infty$ 或 $-\infty$。則 $\lim\limits_{x\to a} y$ 对应地就是 e^k, $+\infty$或 0。

例 7) 設

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

要在 $x\to 0$ 时求出 $\lim y$ (1^∞ 型未定式)。

若算作 $x>0$ (由于 y 是偶函数，故可以限于这个假定)，則

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}.$$

应用定理1：

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}.$$

但是我們剛剛才看到过，这个极限等于 $-\frac{1}{3}$。这样，

$$\lim_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

附注 型如 $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ 及 $\infty-\infty$ 的未定式可以在欧拉的著作中見到；哥西也曾經考慮到未定式的一些标准类型，但是这两个人都沒有把 $\frac{\infty}{\infty}$ 的情形給以严格的証明！

第八章　多元函数

§1. 基本概念

123. 变量之間的函数关系·例　迄今为止我們只研究过两个变量的共同变化，其中的一个变量依賴于另外一个：由自变量的値已經完全可以决定因变量或函数的値。然而出現几个自变量的情形，也并不少見，于是要想确定函数的値，就必須先去确定所有这些自变量在同一时候各自所取的値。

1）例如，圓柱体的体积 V 是它的底半徑 R 及高 H 的函数；这些变量之間的依賴关系可用公式

$$V = \pi R^2 H$$

来表示，由这个式子，在知道了自变量 R 及 H 的値时，就能够决定 V 的对应値。

2）設一汽缸的活塞下面有一定質量的气体，它的溫度不是固定不变的；于是这个气体的体积 V 及压力 p 都与它的（絕对）溫度 T 以克拉披隆公式相联系：

$$pV = RT \qquad (R = \text{常数}).$$

由此，例如，認为 V 及 T 都是自变量，則它們的函数 p 就可以这样来表示：

$$p = \frac{RT}{V}.$$

3）在研究任何物体的物理状态时，往往需要去观察它的各种性質从一点到它点的变化。例如：密度、溫度、电位等等。所有这些量都是“点的函数”，或者也可以說是点的坐标 x，y，z 的函数。如果物体的物理状态是随着时間而变化的，那末在这些自变量內就还要加上时間 t。在这种情形我們就遇到了四个自变量的函数。

类似的例子讀者自己还可以任意增多。

要想对于多个自变量的函数的概念給以精确的定义，我們先从最簡单的情形，卽当自变量有两个时开始。

124. 二元函数及其定义区域 在談到两个自变量 x 及 y 的变化时，我們每次都应該指出，它們可以同时取得的是哪些对数值 (x, y)；这些成对的数值所成的集合 $\mathscr{M}$ 就是变量 x, y 的变化区域。

函数概念的定义可以用与一元函数的情况用类似的說法来給出：

如果依照某一法則或規律，对于集合 $\mathscr{M}$ 中的每一对数值 (x, y) 相应地有 $\mathscr{Z}$ 中一个确定的 z 值，則变量 z（它的变化区域为 $\mathscr{Z}$）就叫做自变量 x, y 在集合 $\mathscr{M}$ 上的函数。

这里說的是单值函数；很容易把这个定义推广到多值函数上去。

上面所讲的集合 $\mathscr{M}$ 就是函数的定义区域。变量 x, y 本身——对于它們的函数 z 而言——叫做函数的变元。与在一元函数时相类似，z 与 x, y 之閒的函数关系可以表示为：

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \text{ 等等.}$$

若从 $\mathscr{M}$ 中取出一对数值 (x_0, y_0)，則 $f(x_0, y_0)$ 就表示当 $x = x_0$, $y = y_0$ 时函数 $f(x, y)$ 所取的那一特别(数)值。

現在举几个解析地(即用公式)給定的函数的例子，并指出它們的定义区域。公式

$$1) \quad z = x^2 + y^2$$

对于一切数对 (x, y) 无例外地确定一个函数。公式

$$2) \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad 3) \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

只能各別适用于(如果我們只談到有限的实数值 z)那些滿足不等式

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \qquad \text{或} \quad x^2 + y^2 < 1$$

的数对 (x, y)。公式

$$4) \quad z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$$

是对于分別滿足不等式

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b$$

的 x 及 y 所定义的函数。

在一切这些例子里我們都指出了公式所适用的最寬广的——自然的[18段, 2°]——范圍。

現在再考慮这样一个例子。

5) 設三角形的各边在周长保持有常量 $2p$ 的条件下任意地变化着。若用 x 及 y 表示它的两边，則第三边就是 $2p-x-y$，于是三角形就完全由边 x 及 y 所确定了。三角形的面积 z 与这两边有怎样的关系呢？

依照已知的公式这一面积可以表示为：

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至于这个函数的定义区域 $\mathscr{M}$，在这一次，它却要受到引进这函数的具体問題的限制。因为三角形的每边边长是小于半周的正数，所以应当滿足不等式

$$0<x<p,\quad 0<y<p,\quad x+y>p;$$

这些不等式就刻划出了区域 $\mathscr{M}$，虽然所得出的公式本身在更寬广的范圍上，例如，对于 $x>p$ 及 $y>p$ 还是有意义的。

这样，虽然在一元函数的时候，作为变元的标准的变化区域只是(有限或无穷)区間，而在二元函数的情形，我們就已經碰到变元的各种各样极为复杂的可能的(与自然的)变化区域了。

从这些区域的几何意义上来考虑它們，事情就会变得容易多了。若在平面上取两个互相垂直的軸，再用通常的方法在这两个軸上安置上 x 值及 y 值，那末正象大家所知道的，由每一对 (x, y) 可以唯一地确定平面上的一点，它以这些数值作为自己的坐标，反之亦然。

于是为了想要表示出那些使函数有定义的数对 (x, y)，最簡单的办法就是去指出它們所对应的点在 xy 平面上填滿了怎样的一个图形。

于是就說，函数 1)是确定在全平面上，函数 2)及 3)是各别地确定在閉

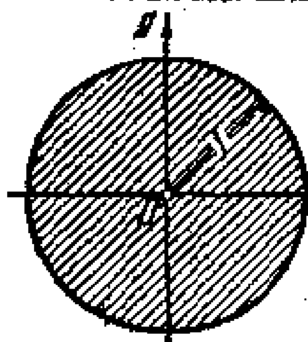


图 52.

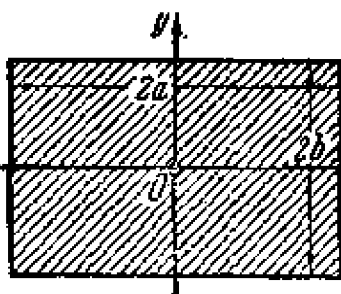


图 53.

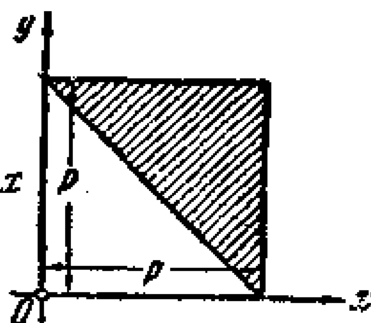


图 54.

圆(即是，包括圆周)及开圆(除去圆周；图 52)上；函数4)是确定在矩形(图 53)上；最后函数 5)只能在开的三角形(图 54)中去考虑。

这种几何的解释是如此的方便，以致通常就把数对(x, y)叫做"点"，而这种"点"的集合也就按照它所对应的几何形状的名称来叫它。于是，满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

的"点"集或数对(x, y)的集合是个"矩形"，它的度量等于$b-a$及$d-c$；与区間的表示法相类似我們將用符号$[a, b; c, d]$来表示这一矩形。满足不等式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2$$

的"点"集或数对(x, y)的集合是半徑为r而圆心在"点"(α, β)的"圆"，等等。

恰象函数$y=f(x)$可以用它的图形从几何上去說明[19 段]一样，方程$z=f(x, y)$也可以从几何上去給以說明。在空間取x軸，y軸及z軸所成的直角坐标系；再在平面xy上描出变量x及y的变化区域$\mathscr{M}$，最后，在这个区域的每一点$M(x, y)$上作平面xy的垂綫，而且在每条垂綫上按照数值$z=f(x, y)$来取定一点。这样所得的点的軌迹就是我們函数的一种空間图形。一般地說来，这是一个曲面，等式$z=f(x, y)$也就叫做曲面的方程。

例如，在图 55 及图 56 上画出的就是函数

$$z=x^2+y^2 \text{ 及 } z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

的几何图形。

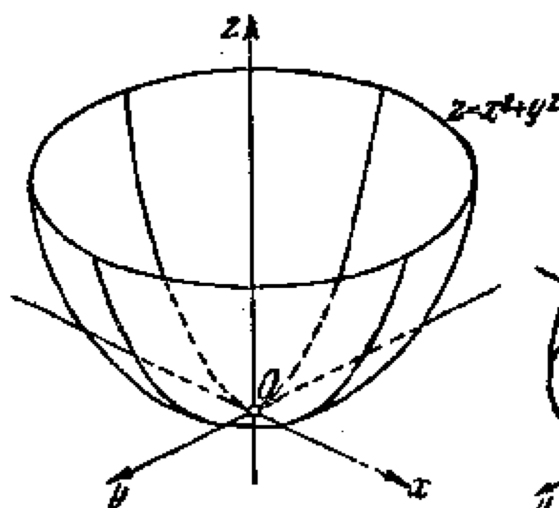


图 55.

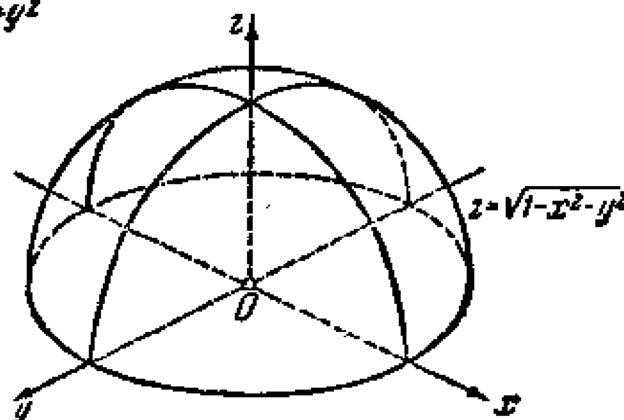


图 56.

其中第一个图形是迴轉抛物面，而第二个是半球面。

125. m 維算术空間 在論及 m 个自变量($m \geqslant 3$)的函数时，我們先来討論这些变量同时所取的数值組。

在 $m=3$ 时，由三个数 x, y 及 z 所成的这种数值組 (x, y, z)，讀者都明白，也还可以几何地解释为空間的点，而这种数值組的集合則可以解釋为空間的一部分，或几何学上的体。但在 $m>3$ 时就已經不可能再有直接的几何意义了。

然而由于想把这些几何方法(它对于二个及三个变量的函数来說是显得极有效的)推广到更多个变量的函数的理論上去，于是在分析学中也就引入了 $m(m>3)$ 維"空間"的概念。

由 m 个实数所成的組：$M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$① 叫做 m 維的"点"；而数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 就是这"点" M 的坐标。一切可能得到的 m 維的"点"的集合就組成一个 m 維"空間"，它有时也叫做算术空間。

"m 維的点"以及"m 維(算术)空間"这些概念是黎曼② 首先想到的，但是名詞却是康脫取定的。

現在可以合理地引入两个 m 維"点"

$$M(x_1, x_2, \cdots, x_m) \text{与} M'(x_1', x_2', \cdots, x_m')$$

之間的"距离" $\overline{MM'}$ 的概念。仿效解析几何学中大家知道的公式，令

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i' - x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_m' - x_m)^2}; \tag{1}$$

在 $m=2$ 或 3 时，这个"距离"是与对应的两个几何点之間的通常

① 由于变量的个数并不一定，所以不用不同的字母，而用只具有不同序号的同一字母去表示它們，还显得比較方便些。这样 x_i 表示的(与以前的用法相反)并非是某个变量的第 i 个值，而是第 i 个变量本身，它自己也可以取不同的值。

② 貝恩哈德·黎曼(1826—1866)是杰出的德国数学家。

相一致的。

若再取一点

$$M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_m''),$$

则也可以证明，"距离" $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ 及 $\overline{MM''}$ 满足不等式

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \tag{2}$$

它与已知的几何定理："三角形的一边不大于其他二边之和" 很相似。

实际上，对于任何两組实数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 常成立不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}\text{①}.$$

这里若令

$$a_i = x_i' - x_i,\ b_i = x_i'' - x_i',\ \text{于是}\ a_i + b_i = x_i'' - x_i,\ \text{则得}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i''-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'-x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i''-x_i')^2},$$

这个式子与(2)相当。这样，在我們的"空間"中才能具备距离的这

---

① 若把它的二边各自平方，再消去二边的相等的項，則这一不等式就化成著名的哥西不等式：

$$\sum_{i=1}^{m}a_ib_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}.$$

我們順便要指出，如何可以用初等方法去证明后一不等式成立。二次三項式

$$\sum_{i=1}^{m}(a_ix+b_i)^2 = x^2 \cdot \sum_{i=1}^{m}a_i^2 + 2x \cdot \sum_{i=1}^{m}a_ib_i + \sum_{i=1}^{m}b_i^2$$

不取負值，因而它不能有不同的实根，于是它的判别式也就不能是負的：

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m}b_i^2 - \left\{\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right\}^2 \geqslant 0,$$

这就是哥西不等式。

一重要性质。

也可以在m維“空間”中考虑“直綫”。讀者都記得，在平面x_1x_2上直綫是由方程$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}$来确定的，而在空間$x_1x_2x_3$是由方程組$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}=\frac{x_3-\beta_3}{\alpha_3}$来确定的（此处这些系数$\alpha$不能够同时为零）。类似于此，滿足方程組

$$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_m-\beta_m}{\alpha_m}$$

（在α滿足前述的条件之下）的“点”$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$集就叫做m維“空間”中的“直綫”。如果用t表示这些比式的公共值，則“直綫”也可用**参数方程**:

$$x_1=\alpha_1 t+\beta_1,\quad x_2=\alpha_2 t+\beta_2,\cdots,\quad x_m=\alpha_m t+\beta_m$$

来确定，式中假定**参变量**t从$-\infty$变到$+\infty$。我們将认为这一直綫上的“点”是依着参变量上升的次序一个**跟着**一个的；若$t'<t<t''$，則在对应的“点”M', M, M''中“点”M就恰好位于其他二点**之間**，因为它在M'之后而又在M''之前。在这些条件之下，很容易証明，它們彼此間的距离滿足关系式

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

这正是在通常空間中的直綫的特性。

經过給定的两“点”

$$M'(x_1', \cdots, x_m')\text{ 及 }M''(x_1'', \cdots, x_m'')$$

的“直綫”的方程显然可以写成:

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'),\cdots,\quad x_m=x_m'+t(x_m''-x_m')$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

于此在$t=0$及$t=1$时就得到“点”M'及M''。又若使t从0变到1，則得到連接这两“点”的“直綫段”。

最后，若有几个“綫段”$M'M_1, M_1M_2, \cdots, M_kM''$，它們一个挨

着一个地接連起来,則就組成了m維"空間"中的一条"折綫"。

126. m維空間中的区域举例 現在我們来考慮m維"空間"中几个最簡单的"体"或"区域"。

1) 坐标彼此独立地滿足于不等式

$$a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\quad a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,\quad a_m\leqslant x_m\leqslant b_m$$

的一切"点"$M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$所成的集合,叫做m維"长方体",并且記作:

$$[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \cdots;\ a_m, b_m].$$

特别的在$m=2$时,就由此得出在**124**段中曾經讲到过的"长方形";而三維"长方体"就是通常空間中的长方体。

若在前面写着的关系式中去掉等号:

$$a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2,\cdots,\ a_m<x_m<b_m,$$

則就可用它們来确定一个开的"长方体":

$$(a_1, b_1;\ a_2, b_2;\cdots;a_m, b_m),$$

为了有所区别前面所考慮过的那个,就叫做閉的"长方体"。差$b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots, b_m-a_m$就叫做这二种长方体的度量,而点

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \cdots, \frac{a_m+b_m}{2}\right)$$

叫做它們的中心。

以"点"$M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$为中心的任意一个开的"长方形":

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1;\ x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2;\cdots;\ x_m^0-\delta_m, x_m^0+\delta_m) \qquad (3)$$

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m>0)$叫做"点"$M_0$的邻域;最常遇到的邻域是"立方体":

$$(x_1^0-\delta; x_1^0+\delta; x_2^0-\delta, x_2^0+\delta;\cdots; x_m^0-\delta, x_m^0+\delta)$$

$(\delta>0)$,它的所有的度量都相等$(=2\delta)$。

2) 考慮滿足于不等式

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_m-x_m^0)^2\leqslant r^2(\text{或}<r^2)$$

的一切"点" $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$所成的集合，式中 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 是个定"点"，而 r 是正常数。这个集合叫做**闭的**（或**开的**）m維"球"，其半徑为 r，而中心在"点" M_0 处。换句話說，球是所有与某一定"点" M_0 的"距离"不超过（或小于）r 的点M所成的集合。很明显，这个"球"在 $m=2$ 时就是圓[参看 124 段]，而在 $m=3$ 时就是通常的球。

以"点" $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 为中心，任意 $r>0$ 为半徑的开"球"也同样可以认为是点M_0的邻域；为了有别于那种前面曾經引入的"长方体形"的邻域起見，这就叫做"球形"的邻域。

現在就搞清楚以下的事实是有好处的。若"点" M_0 是上述的任一类型的某个邻域的中心，則它也一定可以是另一类型的某个邻域的中心，且使这个邻域包含在前一个之中。

首先假設給定中心在"点"M_0处的"长方体"(3)。于是只要取这样的开"球"，它也有同一个中心 M_0 而半徑 r 小于一切的 $\delta_i (i=1, 2, \cdots, m)$，則这个球就可包含在所謂的"长方体"内了。实际上，对于这个"球"内的任一"点" $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$将有（对每个 i）：

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

于是这点必屬于所給的"长方体"。

反之，若給定中心在 M_0 而半徑为 r 的"球"，則在它的里面也一定可以包含一个"长方体"(3)，例如，令 $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = \frac{r}{\sqrt{m}}$ 即可。这是因为，这个"长方体"中的任一"点" $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 与 M_0 的"距离"是

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\delta_k^2} = r,$$

因此，这点就属于所給的“球”了。

127. 开区域及閉区域的一般定义 若“点” $M'(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ 連同它的某一个充分小的邻域都属于m維“空間”中的集合$\mathscr{M}$，则称“点” M' 为集合$\mathscr{M}$的內“点”。由前段末所证明的論断显然可以推得，这个定义中所指的邻域不論是哪种类型——是“长方体形的”或是“球形的”——都是一样。

开的“长方体”

$$(a_1, b_1; \cdots; a_m, b_m) \tag{4}$$

中的每一个“点”都是它的內点。实际上，若

$$a_1 < x_1' < b_1, \cdots, a_m < x_m' < b_m,$$

则很容易找到这样的 $\delta > 0$，使得

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b_1, \cdots, a_m < x_m' - \delta < x_m' + \delta < b_m.$$

类似地，对于中心在“点” M_0 处而半徑为 r 的开“球”，属于它的每一个点 M' 也都是它的內点。因为若取 ρ 使适合

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

且以 M' 为中心作半徑为 ρ 的“球”，则它就会完全包含在原先的“球”內：因为只要 $\overline{MM'} < \rho$ 就有[**125** 段，(2)]

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

于是“点”M也属于原先的“球”。

这种完全都是由內“点”組成的集合就叫做开“区域”。

这样，开的“长方体”以及开“球”都是开“区域”的一些例子。

现在把聚点的概念 [**32** 段] 推广到 m 維“空間”中的集合$\mathscr{M}$的情形上去，若在“点” M_0 的每个邻域(仍旧不論是哪种类型)中总含有至少集合$\mathscr{M}$中的一个非 M_0 的“点”，则 M_0 就叫做集合$\mathscr{M}$的“聚点”。

开“区域”的“聚点”而不属于这个区域的叫做它的界“点”。界点的全体組成“区域的边界”。开“区域”和它的“边界”一起就叫做

距离閉“区域”。

不难見到，开的“长方体”(4)的界“点”就是那一些“点” $M(x_1, \cdots, x_m)$，它們满足不等式

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \cdots, a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

并且至少其中有一个 $x_i = a_i$（或 $x_i = b_i$）。

完全与此相同，上面所考慮过的开“球”的界“点”就是那些恰好能有 $\overline{MM_0} = r$ 的“点” M。

因此，閉的“长方体”与閉“球”就給出了閉“区域”的一些例子。

以后凡是談到“区域”，开的或閉的，我們总是指的这里所說的有特殊意义的“区域”而言。

現在来证明閉“区域”的所有的“聚点”仍然都属于这个“区域”。

設給定閉“区域” $\overline{\mathscr{D}}$ 及其外的一“点” M_0 要来证明 M_0 不是 $\overline{\mathscr{D}}$ 的“聚点”。

閉“区域” $\overline{\mathscr{D}}$ 是由某个开“区域” $\mathscr{D}$ 加上它的“边界” $\mathscr{E}$ 而得出的，显然 M_0 不能是 $\mathscr{D}$ 的“聚点”；因此 M_0 可以被这样的一个开“球”所包圍，使在它的里面决不含有 $\mathscr{D}$ 的“点”。于是在它里面也就不能有 $\mathscr{E}$ 的“点”；否則，若含有 $\mathscr{E}$ 的任何一“点” M'，也就会含有“点” M' 的某个邻域的全部，而在这个邻域内却又連一个 $\mathscr{D}$ 的点都沒有，这与 M' 为 $\mathscr{D}$ 的“界点”的定义相矛盾。所以在上述的开“球”内确乎沒有 $\overline{\mathscr{D}}$ 中的“点”，这就证明了我們的論断。

一般地，含有自己的一切“聚点”的“点”集 $\mathscr{M}$ 就叫做**閉集**。这样，閉“区域”是閉集的特別情形。

在以上数段中所說的話都可以看成只是建立了某种**几何語言**；[1]在 $m>3$ 时，这些話并不与任何**眞实**的几何概念有关。然而着

[1] 一切几何名詞，若在使用时其意义与通常的不同，我們都已打上了引号，如：“点”、“距离”、“区域”等等。以后我們就不再这样做了。

重地指出这点是有益处的，就是事实上，m 維(算术)“空間”只是将空間概念有效地推广到高阶去第一步，而这些空間概念正是近世分析学中許多更高深部門的基础。

128. m 元函数 設有 m 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，它們同时所取的值可以从 m 維空間的某个点集 $\mathscr{M}$ 中任意选取，則这些变量就叫做**自变量**。对于两个自变量时所作的函数的定义以及有关于它所讲的一切[124]都可以直接搬到現在所要考慮的情形上来，因此沒有必要再去討論它。順便提到，第二章中所讲的单变量的函数就可以称为一元函数，是 m 元函数的特例。

若用 M 表示点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，則这些变量的函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 有时也叫做**点 M 的函数**，并且記作：$u=f(M)$。

現在假定在 k 維空間的(这里 k 与 m 无关)某个点集 $\mathscr{T}$ 上給定了 k 个变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的 m 个函数

$$x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_k), \cdots, \quad x_m=\varphi_m(t_1, t_2, \cdots, t_k), \tag{5}$$

或，簡单地写成

$$x_1=\varphi_1(P), \cdots, \quad x_m=\varphi_m(P), \tag{5a}$$

式中 P 表示 k 維空間的点 $(t_1, t_2, \cdots, t_k)$。此外，再假設当点 $P(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 在集合 $\mathscr{T}$ 的范圍內变化时，与它对应的以(5)或(5a)为坐标的 m 維点 M 不会超出函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)=f(M)$ 的定义区域，即 m 維集合 $\mathscr{M}$ 的范圍。

于是变量 u 就可以看成是由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 作**媒介的**自变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$(在集合 $\mathscr{T}$ 上)的**复合函数**：

$$u=f(\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_k), \cdots, \varphi_m(t_1, t_2, \cdots, t_k));$$

u 是函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 的函数[参看 25 段]。

这种用函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 以及函数 f 来确定复合函数的过程(正象最簡单的一元函数的情形一样)叫做迭置。

一开始就会直接遇到的多元函数类幷不是很大的。实际上，这类函数总是借助于迭置单变量初等函数[22 段、24 段]以及下列的二元函数：

$$z=x\pm y,\ z=xy,\ z=\frac{x}{y},\ z=x^y,$$

(即四則运算及所謂冪指函数)而成的。

对于自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 以及常量重复地使用四則运算，首先就导出整多項式(有理整函数)：

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_m)=$$

$$=\sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} C_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m} \text{①} \qquad (6)$$

以及两个整多項式的商(有理分函数)：

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_m^{\mu_m}}. \qquad (7)$$

利用一元初等函数更可导出这样一些函数，例如：

$$f(x, y, z)=\frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t)=\sin xy+\sin yz+\sin zt+\sin tx,$$

等等。

在 18 段內那些关于单变量函数的解析表示法所作的附注在这里也是适用的。

129. 多元函数的极限 考虑 m 維空間內点的序列

---

① 我們知道，記号Σ表示同类項的总和。这里我們有着加数依賴于几个标号的更为复杂的情形。

$$\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)})\} \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

如果点 M_n 的坐标都一个个地趋向于点 $M_0(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的对应坐标，就是，若在 $n\to\infty$ 时

$$x_1^{(n)}\to a_1, x_2^{(n)}\to a_2, \cdots, x_m^{(n)}\to a_m, \tag{9}$$

則我們就說，这个序列收斂于极限点 M_0。

条件(9)也可以代之以要求点 M_n 与 M_0 之間的距离趋向于零

$$\overline{M_0M_n}\to 0. \tag{10}$$

这两个定义的等价性可以从 **126** 段内所作的关于两种类型的邻域的論证来推出。其实，条件(9)表示着：不論 $\delta>0$ 是怎样的一个数，点 M_n 只要在 n 充分大时就可以滿足不等式

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\delta, \cdots, |x_m^{(n)}-a_m|<\delta,$$

即 M_n 包含在以点 M_0 为中心的开长方体

$$(a_1-\delta, a_1+\delta, \cdots; a_m-\delta, a_m+\delta)$$

内；而条件(10)的意义則是，不論 $r>0$ 是怎样的一个数，点 M_n 只要在 n 充分大时就可以滿足不等式

$$\overline{M_0M_n}<r,$$

即 M_n 落在仍以点 M_0 为中心以 r 为半徑的开球内。

設在 m 維空間内給定了某一点集 $\mathscr{M}$，而点 $M_0(a_1, \cdots, a_m)$ 是它的聚点。于是一定可以从 $\mathscr{M}$ 中取出这样的点列(8)，其中每一点都不是 M_0，并且它以 M_0 为极限点而收斂。

現在假定在上述的集合上定义了函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。类似于一元函数的情形，我們說：

函数 $f(x_1, \cdots, x_m)=f(M)$ 当变量 $x_1, \cdots, x_m$ 各别地趋向于 $a_1, \cdots, a_m$（或簡单地，当点 M 趋向于点 M_0）时以数 A 为极限，如果不論从 $\mathscr{M}$ 中怎样取异于 $M_0(a_1, \cdots, a_m)$ 的且收斂于 M_0 的序列(8)，由对应的函数值所組成的序列 $\{f(x_1^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)})\}=\{f(M_n)\}$ 恒收斂于 A。

这一事实記作:

$$A=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, \cdots, x_m),$$

或簡单地記作

$$A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

很容易把函数极限的定义扩充到当数 $A, a_1, \cdots, a_m$ 中有几个或全部为无穷大的情形。

我們着重指出，即对于多元函数、函数的极限概念也可以这样地化为序列极限的概念。

然而在这种极限的定义也可以用"ε-δ的語言"来给出，而不必提到序列。当数 $A, a_1, \cdots, a_m$ 都是有限时，这个定义就是：

我們說，函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 当变量 $x_1, \cdots, x_m$ 各别地趋向于 $a_1, \cdots, a_m$ 时以数 A 为极限，如果对于每一个数 $\varepsilon>0$ 可以找着这样的数 $\delta>0$，使得只要

$$|x_1-a_1|<\delta, \cdots, |x_m-a_m|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1, \cdots, x_m)-A|<\varepsilon.$$

这时先得假定点 $(x_1, \cdots, x_m)$ 是取自 $\mathscr{M}$ 且异于 $(a_1, \cdots, a_m)$ 的。因此，对于集合 $\mathscr{M}$ 中位于点 M_0 的充分小邻域

$$(a_1-\delta, a_1+\delta; \cdots; a_m-\delta, a_m+\delta)$$

之內，但除去这点本身(如果它属于 $\mathscr{M}$ 的話)的一切点，上面的关于函数 f 的不等式都应該成立的。

把点 $(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $(a_1, \cdots, a_m)$ 記成 M 及 M_0，于是上面所讲的定义还可以用几何的語言說成这样：数 A 叫做函数 $f(M)$ 当点 M 趋向于点 M_0 时(或在点 M_0 处)的极限，如果对于每一个数 $\varepsilon>0$ 存

在着这样的数 $r>0$, 使得只要距离 $\overline{M_0M}<r$, 就有

$$|f(M)-A|<\varepsilon.$$

与前面一样, 点 M 必须假定是取自 $\mathscr{M}$ 且异于 M_0 的。由此, 对于集合 $\mathscr{M}$ 中位于点 M_0 的充分小的球形邻域之內但除去这点本身的一切点, 这个关于函数的不等式都应該成立的。

由 **126** 段关于两种类型的邻域的討論就可立刻明白, 函数极限的新定义的这两种形式是等价的。

至于談到函数极限的新定义和以前所給的"用序列的語言"所下的定义之間的等价性問題, 則也可以象在一元函数时[**33** 段]一样来建立。

最后請注意, 所有在前面建立起来的极限理論[第三章]都可以推广到多元函数的一般情况上来。而且絕大部分的推广还可以不必經过絲毫的改动, 这是因为这里的一切也都可以归之于序列問題[参看 **42** 段]。

130. 例 1) 首先利用积的极限定理, 容易证明

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} Cx_1^{\nu_1}\cdots x_m^{\nu_m}=Ca_1^{\nu_1}\cdots a_m^{\nu_m},$$

其中 $C, a_1, \cdots, a_m$ 是任意的实数, 而 $\nu_1, \cdots, \nu_m$ 是非負的整数。由此, 若用 $P(x_1, \cdots, x_m)$ 表示有理整函数(6), 則依照和的极限定理, 可以得出

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} P(x_1, \cdots, x_m)=P(a_1\cdots, a_m).$$

类似地对于有理分函数(7), 依照商的极限定理, 就有

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} Q(x_1, \cdots, x_m)=Q(a_1, \cdots, a_m),$$

当然, 这个等式只能在分母在点 $(a_1, \cdots, a_m)$ 处不为零的条件下成立。

2) 考虑当 $x>0$ 及任意 y 时的冪-指函数 x^y。于是, 若 $a>0$ 而 b 是一个任意的实数, 就有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y = a^b,$$

实际上，若取任意的依赖于 n 的变量 $x_n\to a$ 及 $y_n\to b$，则[参看 66 段]

$$x_n^{y_n} = e^{y_n\cdot\ln x_n}\to e^{b\cdot\ln a} = a^b,$$

而这——用"序列的語言"来說——就证实了所要求的結果。

3）討論极限：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

这里函数确定于全平面上，仅只点 $x=0,\ y=0$ 除外。

若取二个部分点序列

$$\left\{M_n\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)\right\}\text{及}\left\{M'_n\left(\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}\right)\right\},$$

它们显然都收斂于点$(0,0)$，则对于一切的 n 都有

$$f(M_n)=f\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\text{ 而 } f(M'_n)=f\left(\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{2}{5}.$$

由此就已推得，上述的极限并不存在。

类似可以确信极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

并不存在。

4）相反的，以下的极限却是存在的：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

这可以从不等式

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|$$

立刻推出。

131. 累次极限 除了上面所考慮的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 当其一切变元同时趋向于各自的极限时所得的极限之外，还要来討論另一种的极限，它是由各个变元依着某一种次序相继地各别取极限而得出的。前一种极限叫做 m 重极限(或在 $m=2, 3, \cdots$时叫做二重极限、三重极限等等)，而后一种叫做累次极限。

为了簡单起见，限于討論二元函数 $f(x, y)$ 的情形。假設变量

x, y 的变化区域$\mathscr{M}$是这样的，就是 x(与 y 无关地)可以取集合$\mathscr{X}$内的任一数值，而 a 为$\mathscr{X}$的聚点，但不属于$\mathscr{X}$，同样，y(与 x 无关地)在集合$\mathscr{Y}$内变化，而 b 为$\mathscr{Y}$的聚点，但不属于$\mathscr{Y}$。这样的区域$\mathscr{M}$可以記成$\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$。例如，

$$(a, a+H; b, b+K)=(a, a+H)\times(b, b+K).$$

若对于$\mathscr{Y}$中任一固定的 y，函数 $f(x, y)$(它就只是 x 的函数)在 $x\to a$ 时的极限存在，則这个极限，一般地說，将与預先固定的 y 值有关：

$$\lim_{x\to a} f(x, y)=\varphi(y).$$

其次可以討論函数 $\varphi(y)$ 在 $y\to b$ 时的极限：

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y);$$

这就是两个累次极限中的一个。另外一个也可以在相反的次序上去取极限，得出

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y).$$

不要以为这些累次极限必定是相等的。

例如，若在区域$\mathscr{M}(0, +\infty; 0+\infty)$上令：

1) $$f(x, y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

且取 $a=b=0$，則得

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x, y)=y-1,\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=-1,$$

而同时却有

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0} f(x, y)=x+1,\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)=1.$$

也可能发生这样情形，就是累次极限中的一个存在着，而另一个却不存在，例如，函数：

2) $$f(x, y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}\quad 或\quad 3)\quad f(x, y)=x\cdot\sin\frac{1}{y}$$

就是这样的；这二个例中都是累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$ 存在着，而累次极限

$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f$ 不存在(在后一例中,甚至第一次极限 $\lim_{y\to 0} f$ 已不存在)。

这些简单的例子指出了,对于两个不同变量的极限过程在交换其次序的时候应該要多么地小心謹愼:錯誤的推断常常就是发生在这种不合法的交换上面,而同时分析上的許多重要問題却又正好是与极限过程的交换次序有关,但是当然,每一次交换的合法性都是应当加以論証。

下面的重要定理打开了进行这种論証一个途徑,同时它又建立起二重极限与累次极限之間的一种关系:

定理 若 1)(有限的或无穷的)二重极限

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$$

存在且 2)对 $\mathscr{Y}$ 中任一个 y 有关于 x 的(有限的)单重极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x, y)$$

存在,则累次极限

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

也存在,且等于二重极限。

我們来在 A, a 及 b 为有限数时来証明这个定理。根据"用 ε-δ 語言"来下的[129]函数极限的定义,依給定的 $\varepsilon>0$,必可找得这样的 $\delta>0$,使得只要 $|x-a|<\delta$ 及 $|y-b|<\delta$(并且 x 取自 $\mathscr{X}$,而 y 取自 $\mathscr{Y}$),就有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon. \tag{11}$$

现在固定 y 值使其滿足不等式 $|y-b|<\delta$,再在(11)式中使 $x\to a$ 而求极限。因为根据假設 2),这时 $f(x, y)$ 趋向于极限 $\varphi(y)$,于是得到

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon.$$

当想到这里的 y 是 $\mathscr{Y}$ 中的任意数,而仅受条件 $|y-b|<\delta$ 的限制时,就得出結論

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y),$$

这就是所要求証的。

若是除了条件 1)及 2)以外，又有：对$\mathscr{X}$中任一个 x 有关 y 的（有限的）单重极限

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

存在，則从刚才的証明中把 x 与 y 对調一下，卽知第二个累次极限

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)$$

也存在着，而且等于同一个数 A。在这情形两个累次极限相等。

从已証明的定理立刻就可明白：在例 1）及 2）中二重极限都不存在。这也可以很容易地直接証实。

相反的，在例 3）中二重极限却是存在：由不等式

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|$$

可以看出，它等于零。这个例子就說明了，由定理的条件1)并不能引出条件2)。

但是，不要以为二重极限的存在是累次极限相等的必要条件：在第130段的例 3）中，虽然二重极限并不存在，但两个累次极限却都存在且都等于零。

§2. 連續函数

132. 多元函数的連續性及間断 設函数 $f(x_1,\cdots,x_m)$ 定义在 m維空間的某个点集$\mathscr{M}$上，而 $M'(x_1',\cdots x_m')$是这个点集的聚点，并且还属于这个点集。

若等式

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1'\\ \cdots\cdots\\ x_m\to x_m'}}f(x_1,\cdots,x_m)=f(x_1',\cdots,x_m') \tag{1}$$

成立，就說函数 $f(x_1,\cdots,x_m)$在点 $M'(x_1',\cdots,x_m')$連續；否則，就說函数在点 M' 有了間断。

函数在点 M' 的連續性若用"ε-δ 的語言"[129]来說就是：对于任一給定的 $\varepsilon>0$，一定可以找得这样的 $\delta>0$，使得只要

$$|x_1-x_1'|<\delta, \cdots, |x_m-x_m'|<\delta \tag{2}$$

就有

$$|f(x_1, \cdots, x_m)-f(x_1', \cdots, x_m')|<\varepsilon, \tag{3}$$

或换一种說法：对 $\varepsilon>0$，一定可以找到这样的 $r>0$，使得只要距离

$$\overline{MM'}<r,$$

就有

$$|f(M)-f(M')|<\varepsilon.$$

这时点 $M(x_1, \cdots, x_m)$ 預先就假定是属于集合 $\mathscr{M}$ 的，特别地还可以重合于 M'。这是因为函数在点 M' 的极限恰好等于在这点的函数值，所以 M 必須异于 M' 这个通常的要求在这里就不再需要了。

把差 x_1-x_1', $\cdots$. x_m-x_m' 看作是自变量的增量 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_m$，而把差

$$f(x_1, \cdots, x_m)-f(x_1', \cdots, x_m')$$

看作是函数的增量，就可以(象在一元函数的情形那样)說：若对应于諸自变量的无穷小增量，函数的增量也是无穷小，則函数連續。

上面所定义的函数在点 M' 的連續性可以說是对于变量 $x_1, \cdots, x_m$ 全体的連續性。如果函数在点 M' 連續，那末同时也有

$$\lim_{x_1 \to x_1'} f(x_1, x_2', \cdots, x_m')=f(x_1', x_2', \cdots, x_m'),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ x_2 \to x_2'}} f(x_1, x_2, x_3', \cdots, x_m')=f(x_1', x_2', x_3' \cdots, x_m')$$

等等，因为这里我們只不过是依着一些特殊的規律让 M 去接近 M'。换句話說，函数对于每个变量 x_i，或对于每一对变量 x_i, x_j 等等也都是連續的。

我們已經遇到过連續函数的例子。象在 130 段 1) 中已經証明了 m 元的有理整函数及有理分函数在 m 維空間的一切点上(对于分函数要除去使分母等于零的那些点)的連續性。又在同段 2) 中已証明冪-指函数 x^y 在右半平面($x>0$)的一切点上的連續性。

若再考虑由分式

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0)$$

在除去原点以外的全平面上所确定的函数，且又假定 $f(0,0)=0$，則得出間断的例子。間断恰好就发生在原点，因为[130 段，3)]当 $x\to 0, y\to 0$ 时，函数的极限并不存在。

这里我們遇到了这样有趣的情况。所考虑的函数 $f(x, y)$在点$(0, 0)$对于二个变量全体而言，縱然是不連續的；但是函数在这点对于 x 以及对于 y 各别而言，由于 $f(x,0)=f(0,y)=0$，却又都是連續的。不过如果考虑到：当我們説到对于 x 或 y 各别的連續性时，我們就只考虑沿着 x 軸或 y 軸接近于点$(0,0)$的問題，而并不顧及无限多种其它接近于$(0,0)$的規律，那末上述的現象其实并不奇怪。

附注　哥西在他的"代数分析"中曾經企图去証明：若多元函数各别地对于每个变量都連續，則它就对于变量的全体連續。上面的例子恰好否定了这个論断。

如果函数 $f(M)$ 当 M 趋向于 M' 时根本沒有一定的有限极限

$$\lim_{M\to M'} f(M)$$

存在，就說，函数在点 M' 有間断；甚至当函数在点 M' 未确定时也这样說。

133. 連續函数的运算　很容易叙述并且証明关于两个連續函数的和、差、积、商的連續性定理[参看 62 段]；現在就把这件事留給讀者自己去做。

我們只討論关于連續函数迭置的定理。如同在 128 段中一样，我們假定函数 $u=f(x_1,\cdots,x_m)$ 給定在 m 維点 $M(x_1,\cdots,x_m)$的集合 $\mathscr{M}$ 上，此外，又假定在 k 維点 $P(t_1,\cdots,t_k)$ 的集合 $\mathscr{P}$ 上定义了 m 个函数

$$x_1=\varphi_1(t_1,\cdots,t_k),\cdots,x_m=\varphi_m(t_1,\cdots,t_k) \tag{4}$$

而且以(4)为坐标的点M不超出上述集合$\mathscr{M}$范圍之外。

定理 若函数 $\varphi_i(P)(i=1,2\cdots,m)$ 却在$\mathscr{T}$中的点 $P'(t'_1,\cdots,t'_k)$处連續,而$f(M)$在相应的坐标为

$$x'_1=\varphi_1(t'_1,\cdots,t'_k),\cdots,x'_m=\varphi_m(t'_1,\cdots,t'_k)$$

的点$M'(x'_1,\cdots,x'_m)$处連續,則复合函数

$$u=f(\varphi_1(t_1,\cdots,t_k),\cdots,\varphi_m(t_1,\cdots,t_k))=$$
$$=f(\varphi_1(P),\cdots,\varphi_m(P))$$

也在 P' 点連續。

实际上,首先由 $\varepsilon>0$ 可确定一个数 $\delta>0$,使得由(3)即可得(2)(由于函数 f 的連續性)。然后由数 δ(由于函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 的連續性)又可找到数 $\eta>0$,使得由不等式

$$|t_1-t'_1|<\eta,\cdots,|t_k-t'_k|<\eta \tag{5}$$

即可得不等式

$$|x_1-x'_1|=|\varphi_1(t_1,\cdots,t_k)-\varphi_1(t'_1,\cdots,t'_k)|<\delta,\cdots$$
$$|x_m-x'_m|=|\varphi_m(t_1,\cdots,t_k)-\varphi_m(t'_1,\cdots,t'_k)|<\delta.$$

但是,再由(5)即有

$$|f(x_1,\cdots,x_m)-f(x'_1,\cdots,x'_m)|=$$
$$=|f(\varphi_1(t_1,\cdots,t_k),\cdots,\varphi_m(t_1,\cdots,t_k))-$$
$$-f(\varphi_1(t'_1,\cdots,t'_k),\cdots,\varphi_m(t'_1,\cdots,t'_k))|<\varepsilon,$$

故我們的論断得証。

134. 关于函数取零值的定理 現在我們来研究連續于m維算术空間[①]区域$\mathscr{D}$上每一点(或簡言之,就是連續于区域$\mathscr{D}$上)上的多元函数的性質。这些性質与区間上連續一元函数的性質(第四章§2)完全相似。

① "区域"的意义見第 127 段。

为了叙述簡明起見，我們限于两个变量的情况。要直接推广到一般的情况去，是毫无困难的。然而，有时也要順便作些說明。

为了陈述类似于波尔察諾-哥西第一定理[第 68 段]的定理，我們还需要联通区域的概念：联通区域是这样的区域，其中任意两点都可以用全由区域内的点所組成的折綫[第 125 段]联結起来。

定理 設函数 $f(x, y)$ 定义并且連續于某个联通区域 $\mathscr{D}$ 中。若在区域中两点 $M'(x', y')$ 与 $M''(x'', y'')$ 上函数取异号值

$$f(x', y')<0, \quad f(x'', y'')>0,$$

則在此区域中一定可以找到这样的点 $M_0(x_0, y_0)$，在其上函数取零值：

$$f(x_0, y_0)=0.$$

我們把它化为单变量函数来证明。

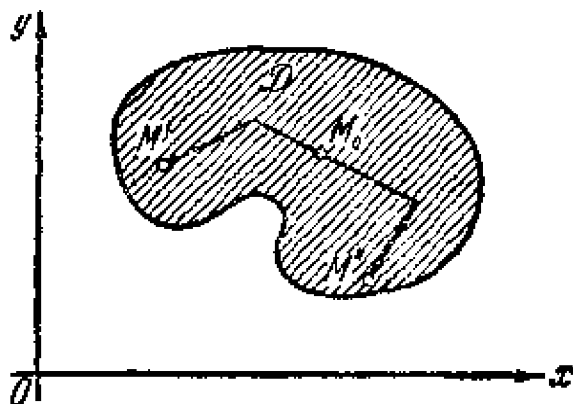


图 57.

由于区域 $\mathscr{D}$ 的联通性，可以用 $\mathscr{D}$ 中的折綫把 M' 与 M'' 两点联結起来（图 57）。若在其某一頂点上函数 $f(x, y)$ 变为 0，則本定理中的論断已成立。反之，則逐段来看这折綫，一定会找到其中一个直綫段，在其两端函数值异号。因此，可以不損普遍性，在一开始就設直綫段 $M'M''$ 全在 $\mathscr{D}$ 中，其方程为

$$x=x'+t(x''-x'),$$

$$y=y'+t(y''-y')(0\leqslant t\leqslant 1)$$

若点 $M(x, y)$ 沿此綫段运动，則原来的函数 $f(x,y)$ 就变为单变量 t 的复合函数：

$$F(t)=f(x'+t(x''-x'), y'+t(y''-y')),$$

而由上段之定理，它显然連續。但对于 $F(t)$ 有

$$F(0)=f(x',y')<0,\ 而\ F(1)=f(x'',y'')>0;$$

应用第 **68** 段已經证明之定理必有 0 与 1 間的一值 t_0 使 $F(t_0)=0$。再由 $F(t)$ 之定义有

$$f(x_0,y_0)=0,$$

其中

$$x_0=x'+t_0(x''-x'),\ y_0=y'+t_0(y''-y').$$

点 $M_0(x_0,y_0)$ 即是所求。

由此还可得到类似于波尔察諾-哥西第二定理的定理(可以立刻得出)。

讀者可以看到，这些結果推广到 m 維空間 $(m>2)$ 去是并无任何困难的，因为在 m 維联通区域中之各点仍可用折綫联結，于是問題和剛才一样就化为考察一个单变量的复合函数。

135. 波尔察諾-維尔斯德拉斯輔助定理 为了进一步叙述，需要把第 **51** 段中的輔助定理推广到任意維空間的点序列。我們約定称这空間的点集 $\mathscr{M}$ 为**有界**的，只要这集合能包含在某个"长方体"內。像前面一样，我們只限于"平面"情况。

从任一**有界**的点序列

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\cdots,M_n(x_n,y_n),\cdots$$

中恒可以取出收斂于一极限点的部分序列

$$M_{n_1}(x_{n_1},y_{n_1}),M_{n_2}(x_{n_2},y_{n_2}),\cdots,M_{n_k}(x_{n_k},y_{n_k}),\cdots$$

$$(n_1<n_2<\cdots<n_k<,\cdots,n_k\to+\infty).$$

证明十分簡单，只要应用第 **51** 段中证得的关于綫性序列的輔助定理。

因序列設为有界，因此其点皆含于某个矩形 $[a,b;c,d]$ 中，故

$$a\leqslant x_n\leqslant b,\ \ c\leqslant y_n\leqslant d\ (n=1,2,3,\cdots).$$

現对序列 $\{x_n\}$ 应用第 **51** 段之輔助定理，自其中可取出一个部

分序列$\{x_{n_k}\}$收斂于某极限$\bar{x}$。于是对于部分序列

$$(x_{n_1}, y_{n_1}),\ (x_{n_2}, y_{n_2}), \cdots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \cdots$$

第一个坐标已經收斂。再对第二个坐标的序列$\{y_{n_k}\}$再次应用上述定理，又可选出收斂于某个$\bar{y}$的部分序列$\{y_{n_{k_i}}\}$。于是，序列

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}),\ (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \cdots, (x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}), \cdots$$

显然收斂于极限点$(\bar{x}, \bar{y})$。

这里的討論也很容易推广到$m>2$維的空間：只不过不是取两次部分序列，而是取m次。

136. 关于函数有界性的定理　应用以上已证明的定理，很容易对二元函数证明維尔斯德拉斯第一定理：

定理　若函数$f(x, y)$定义且連續于某个有界閉区域$\mathscr{D}$中[①]，則它是有上下界的，就是說，函数值全部必介于两个有限界之間：

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

证明(用反证法)　和第**72**段完全一样。設当(x, y)在$\mathscr{D}$中变化时$f(x, y)$是无界的，設为上无界。則对任意的n在$\mathscr{D}$中必有点$M_n(x_n, y_n)$在，使

$$f(x_n, y_n) > n. \tag{6}$$

依第**135**段之輔助定理，由序列$\{M_n\}$之有界性，可取出一部分序列$\{M_{n_k}\}$收斂于极限点$\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$。

注意，这点$\overline{M}$必在区域$\mathscr{D}$中。若不然，則它与M_{n_k}都不重合而应是$\overline{\mathscr{D}}$的聚点，从而屬于$\overline{\mathscr{D}}$，但由于$\mathscr{D}$是閉区域，故这不可能[見**127**段]。

由函数在$\overline{M}$处的連續性应有

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

但这与(6)矛盾。

① 但这一次不必要是联通区域。

維尔斯德拉斯第二定理的叙述与证明(应用上述定理)都与第**73**段中完全一样。

注意，不需作根本的变动即可把維尔斯德拉斯的两个定理推广到連續于任意有界閉集(不一定是区域)$\mathscr{M}$的函数上去。

正如对于一元函数一样，对于定义在$\mathscr{M}$上的有界函数，其上下确界之差也叫做函数在这集合上的振幅。若$\mathscr{M}$有界而且是閉的(特别，若$\mathscr{M}$是有界閉区域)而f連續于其上，則振幅就是函数的最大值与最小值之差。

137. 一致連續性 我們知道，$f(x, y)$在定义域集合$\mathscr{M}$的一个定点(x_0, y_0)处的連續性可用"ε-δ 語言"表达如次：对任意$\varepsilon>0$，皆可找到$\delta>0$，使当对$\mathscr{M}$中一切点(x, y)只要

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta$$

就有

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

現在設$f(x, y)$連續于整个集合$\mathscr{M}$上；于是产生了一个問題，对任一个$\varepsilon>0$，能否找到一个$\delta>0$，同时适用——在上述意义下——于$\mathscr{M}$一切点(x_0, y_0)。如果对任一ε，都是可能的，就說函数在$\mathscr{M}$上一致連續。

康脫定理 若函数$f(x, y)$在有界閉区域$\mathscr{D}$上連續，則它在$\mathscr{D}$上也一致連續。

我們用反证法来证明。設对某一数$\varepsilon>0$，并不存在同时适用于$\mathscr{D}$中一切点(x_0, y_0)的数$\delta>0$.

取一串趋向0的正数

$$\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots>0; \ \delta_n\to 0.$$

因为其中每一个δ_n都是不适用——在上述意义下——于$\mathscr{D}$中一切点(x_0, y_0)的，故对于δ_n必可在$\mathscr{D}$中找到一个特定的点(x_n, y_n)，对于它δ_n不适用。即是說，在$\mathscr{D}$中存在着点(x'_n, y'_n)使

$$|x'_n - x_n| < \delta_n, \quad |y'_n - y_n| < \delta_n,$$

然而

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x_n, y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{7}$$

由点序列$\{(x_n, y_n)\}$的有界性，按波尔察諾-維尔斯德拉斯輔助定理，可以取出一个部分序列$\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$，使$x_{n_k} \to \bar{x}$，$y_{n_k} \to \bar{y}$，而极限点$(\bar{x}, \bar{y})$必属于区域$\mathscr{D}$(因它是閉的)。

又因

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k},$$

而当k上升时，$n_k \to +\infty$而$\delta_{n_k} \to 0$，故

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \to 0, \quad y'_{n_k} - y_{n_k} \to 0,$$

所以

$$x'_{n_k} \to \bar{x}, \quad y'_{n_k} \to \bar{y}.$$

由于函数$f(x, y)$的連續性，在区域$\mathscr{D}$中的点$(\bar{x}, \bar{y})$应有

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

同时

$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

故

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to 0,$$

但这与不等式(7)矛盾。定理得証。

为了由此得出推論，还需要点集合直徑的概念：这就是集合中任意两点距离的上确界。

推論 若$f(x, y)$在有界閉区域$\mathscr{D}$上連續，則对已知的$\varepsilon > 0$，必可找到$\delta < 0$，使得不論怎样将此区域分为部分閉区域$\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_k$，[①]只要其直徑小于$\delta$，則在每一部分上，函数的振幅都小于$\varepsilon$。

---

① 这些部分区域只有共同的界点。

只要把 δ 取作一致連續性定义中的 δ 即可。若部分区域 $\mathscr{D}_i$ 的直徑小于 δ，則其中任意两点 (x, y) 与 (x_0, y_0) 的距离 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$。由此有 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，故 $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$。若把这两个点这样取，使 $f(x,y)$ 与 $f(x_0,y_0)$ 分别是函数在 $\mathscr{D}_i$ 中的最大与最小值，就得到所需的論断。

容易看到，将这个定理推广到連續于有界閉集 $\mathscr{M}$ 的函数上去时，其证明仍无須改变(如同維尔斯德拉斯定理)。

第九章　多元函数的微分学

§1. 多元函数的导数与微分

138. 偏导数　为了书写和叙述的簡单起見，我們限于三元函数的情况；然而以下的一切对于任意多元函数也是对的。

于是，設在某一个(开)区域$\mathscr{D}$中有函数 $u=f(x, y, z)$；取此区域中一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$。若給 y, z 以常值 y_0, z_0 而令 x 变化，則 u 是单变量 x 在 x_0 邻域中的函数；而可以提出在点 x_0处計算导数的問題。給 x_0 以增量 Δx，于是函数也会得一增量

$$\Delta_x u=f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0),$$

称为 f 对 x 的偏增量，因为它只是由一个变量的改变而引起的。由定义知导数即是以下的极限值：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

这个导数称为函数 $f(x, y, z)$在点(x_0, y_0, z_0) 处对于 x 的偏导数。

我們可以看到，在这定义中各个元的作用并不相同，y_0 与 z_0 是固定的，而 x 則是变动的，它趋向 x_0。

偏导数可以用以下的符号之一来表示：

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\text{①};\ u'_x,\ f'_x(x_0, y_0, z_0);\ D_x u,\quad D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

要注意，这些記号下的 x 仅是表示对那一个变量求导数，而与在什么点(x_0, y_0, z_0)处去計算导数无关②。

---

① 在記偏导数的时候，通常用弯的 ∂ 而不用直的 d。

② 这里，整个記号

$$\frac{\partial f}{\partial x}, f'_x, D_x f$$

可看作对 x 的偏导数的函数記号。以下再不作这一类說明了。

同样地，令 x 与 z 固定，而 y 变动，也可以考虑极限值

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

这极限称为函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处对于 y 的**偏导数**，并可記为：

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y};\ u'_y,\ f'_y(x_0, y_0, z_0);\ D_y u,\ D_y f(x_0, y_0, z_0).$$

函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处对于 z 的**偏导数**也可以同样地定义。

偏导数的計算方法在实質上較之計算通常的导数并沒有什么新的东西。

例 1) 令 $u=x^y$ $(x>0)$；这函数的偏导数是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

第一个偏导数是作为 x 的幂函数($y=$常数)算出来的，而第二个是作为 y 的指数函数($x=$常数)算出来的。

2) 若 $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$，則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

3) 对于 $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

注意，偏导数最常用的符号(弯曲的 ∂)只能看作整个記号，而不能看作商或分数。

139. 函数的全增量 若由自变量之值 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 开始，并各給以增量 Δx, Δy, Δz 則函数 $u=f(x, y, z)$ 也会得一增量

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=$$
$$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0),$$

称为函数之全增量。

在一元函数 $y=f(x)$ 情况，設在 x_0 点有限导数 $f'(x_0)$ 存在，則对于函数的增量应有以下的公式[第 82 段(2)]：

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

其中 α 依賴于 Δx，而当 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$。

我們現在对多元函数 $u=f(x,y,z)$ 的增量得出类似之式：

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y+$$
$$+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z, \qquad (1)$$

其中 α,β,γ 依賴于 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 并与之同时趋向于 0。然而这里須对函数加以更强的限制。

1° 若偏导数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x,y,z)$ 不但存在于 (x_0,y_0,z_0) 处，而且也存在于其某一邻域中，此外，它們又在此点对 x,y,z 連續，則式(1)成立。

为証此式，可将函数增量 Δu 写为

$$\Delta u=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)]+$$
$$+[f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)]+$$
$$+[f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)].$$

这三个差中的每一个都是对一个变元的偏增量。因为已設偏导数存在于 (x_0,y_0,z_0) 之邻域中，故——当 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 充分小时——对这些差分别可用有限增量公式[第 102 段][①]；即得：

$$\Delta u=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y+$$
$$+f'_z(x_0,y_0,z_0+\theta_2\Delta z)\Delta z.$$

若再令

① 若考慮第一个差，則可把它看作单变量 x 的函数 $f(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 由 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 的增量，这函数对 x 的导数，即 $f'_x(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 由假定对于区間 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 中的所有 x 存在，故有限增量公式可以应用。

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)=f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)+\alpha,$$

$$f'_y(x_0,\ y_0+\theta_1\Delta y,\ z_0+\Delta z)=f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)+\beta,$$

$$f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0+\theta_2\Delta z)=f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)+\gamma,$$

于是即得 Δu 之表达式(1)。当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0, \Delta z\to 0$ 时，上式左方的导数的变元趋向于 x_0, y_0, z_0(因 $\theta, \theta_1, \theta_2$ 都是真分数)，故由偏导数在該点連續之假設，即知左方趋向于式右之偏导数，而量 α, β, γ 趋向 0。证明完毕。

由上面已证的定理还可得出：

2° 由偏导数在一点邻域中之存在与在該点之連續性，可以推出函数在該点之連續性。

事实上，当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0$ 时显然有 $\Delta u\to 0$。

为了把(1)写得更紧縮些，我們引入以下的記号:

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

即点(x_0, y_0, z_0)与$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$間的距离。

由此即有

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z=\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}+\gamma\frac{\Delta z}{\rho}\right)\rho.$$

将括号中式子記为 ε, 則有

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z=\varepsilon\rho,$$

其中 ε 依賴于 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 并当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0$, 或簡言之，即当 $\rho\to 0$ 时亦趋向 0。故公式(1)又可写为:

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y+$$
$$+f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z+\varepsilon.\ \rho, \qquad (2)$$

而当 $\rho\to 0$ 时 $\varepsilon\to 0$。$\varepsilon\cdot\rho$ 这量显然可写为 $o(\rho)$ (只要把 **54** 段中記号推广到多元函数即可)。

注意，在以上討論中，我們并未排除增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 中有个别或全体同时为 0 的情况，于是在說到，当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0$ 时有

$$\alpha\to 0,\ \beta\to 0,\ \gamma\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

其涵义是要在較广泛的意义上去了解的，即不排除这些增量在其变动过程中取零值的可能性(参閱第 **82** 段类似的附注)。

在証明以上定理时，我們对于多元函数所作的要求比对于一元函数的要較多一些。为了指出当不具有这些条件时，公式(1)与(2)可能不成立，让我們最后来考察下面的例子(为简单起見，只設有两个自变量)。

今定义函数为

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ (若\ x^2+y^2>0),\ f(0,0)=0.$$

这函数在全平面上連續；在点$(0,0)$处的連續性，可由第 **130** 段，4)看出。其次，对 x 与对 y 的偏导数在全平面上皆存在：当$x^2+y^2>0$ 时显然有

$$f'_x(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在原点則有 $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$；这可由偏导数之定义及 $f(x,0)=f(0,y)=0$ 直接得出。容易看出，在$(0,0)$点偏导数的連續性被破坏(例如，对于第一个只要令$y=x=\frac{1}{n}\to 0$ 即可证明)。

公式(1)与(2)对此函数在$(0,0)$ 点不成立。实际上，設若不然，則有

$$\Delta f(0,0)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

这里当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时有 $\varepsilon\to 0$。特别取 $\Delta y=\Delta x>0$，应有

$$\frac{1}{2}\Delta x=\varepsilon\sqrt{2}\cdot\Delta x,\quad 即\ \varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

故当 $\Delta x\to 0$ 时 ε 不趋向 0，而与假設矛盾。

140. 复合函数的导数 作为公式(1)的应用，我們来研究复合函数的微分問題。設有定义于区域$\mathscr{D}$中之函数

$$u=f(x, y, z),$$

而且其每一个变元 x, y, z 又是另一变元 t 在某区間上的函数:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t).$$

除此之外, 設当 t 变动时, 点(x, y, z)不超出$\mathscr{D}$之范圍。

以 x, y, z 之值代入 u 即得复合函数

$$u=f(\varphi(t), \ \psi(t), \ \chi(t)).$$

設 u 对 x, y, z 具有連續偏导数 u'_x, u'_y, u'_z 而 x'_t, y'_t, z'_t 亦存在。于是可以证明复合函数之导数亦存在, 并可以把它算出来。

实际上, 設給 t 以增量 Δt, 則 x, y, z 各得相应的增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 而 u 亦得增量 Δu。

将 u 之增量以公式(1)表出(这是可以的, 因为已假設了偏导数 u'_x, u'_y 与 u'_z 之連續性), 即得

$$\Delta u=u'_x \cdot \Delta x+u'_y \cdot \Delta y+u'_z \cdot \Delta z+\alpha \cdot \Delta x+\beta \cdot \Delta y+\gamma \cdot \Delta z,$$

这里当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ 时 $\alpha \to 0, \beta \to 0, \gamma \to 0$。将此式双方除以 Δt, 得

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}+u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}+u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}+\alpha \frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}+\gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

現令 $\Delta t \to 0$, 于是 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 皆趋向 0, 因为函数 x, y, z 对 t 是連續的(已設了导数 x'_t, y'_t, z'_t 存在), 故 α, β 与 γ 亦趋向于 0。求极限即得

$$u'_t=u'_x \cdot x'_t+u'_y \cdot y'_t+u'_z \cdot z'_t. \tag{3}$$

可見, 在以上假設下复合函数之导数确是存在的。若用微分記号, 則(3)可写为:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

現在考虑 x, y, z 不只依賴于一个变量 t, 而是依賴于几个变量之情况; 例如

$$x=\varphi(t, v), \quad y=\psi(t, v), \quad z=\chi(x, v).$$

除了假設 $f(x, y, z)$ 的偏导数存在与連續外, 这里还假設 $x, y,$

z 对 t 与 v 的偏导数存在。

在将 φ, ψ, χ 这些函数代入 f 后，即得两个变量 t 与 v 的函数，因而发生了有关偏导数 u'_t, u'_v 的存在与計算的問題。但这个情况本质上与已經研究过的并无不同，因为在求二元函数偏导数时，我們是要固定其中一个变量的，于是函数也就成为一元函数了。因此公式(3)仍可适用，而公式(4)則須改写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{4a}$$

141. 例 1)考虑冪-指函数

$$u=x^y.$$

設 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 并按以上公式微分，即得已知的萊布尼茲-与約翰伯努利公式

$$u'_t=y\cdot x^{y-1}\cdot x'_t+x^y\cdot\ln x\cdot y'_t.$$

这一公式在前面我們曾以不同的符号用一种技巧的方法得出过［第35段(5)］。

公式(3)与一元函数的公式 $u'_t=u'_x\cdot x'_t$ 相似。然而要着重指出，导出这些公式的条件是不同的。若 u 只依賴于一个变量，則只須設 u'_x 存在，而在多个变量时还要設偏导数 u'_x, u'_y, …連續。下面的例子指出，只設偏导数存在对于(3)之成立是不够的。

2) 今定义函数 $u=f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}(\text{当}x^2+y^2>0\text{时}),\ f(0,0)=0.$$

我們已看到，这函数在一切点包括原点都有偏导数，而且

$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0;$$

然而，正是在这点上偏导数有間断。

若引用新变量 t 而設 $x=y=t$，即得 t 之复合函数。由式(3)这函数的导数当 $t=0$ 时应当为

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t=0.$$

但另一方面，若将 x, y 之值眞正代入 $u=f(x,y)$，并設 $t\neq 0$，应有

$$u=\frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}\cdot t,$$

当 $t=0$ 时此式亦成立。

現在直接对 t 微分，則知在 t 之一切値包括 $t=0$ 在內 $u'_t=\frac{1}{2}$。說明了式(3)在这时不可使用。

3) 由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可定义 y 为 x 的函数：

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ (-a<x<a)$$

其导数为

$$y'_x=\mp\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

今不对 y 解出此方程而求这导数。

解　設想將方程中的 y 已經用上面所提到的函数来代入，則它应恒滿足方程。对 x 微分这恒等式(用复合函数的微分法則)，即得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'_x=0,$$

如前一样，有

$$y'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

4) 在一般情况下，設有未对 y 解出的方程

$$F(x,y)=0$$

(F 及其偏导数皆連續)。在一定条件下(見第二卷第二十章)可以断言，由此方程可定义 y 为 x 的函数，而且导数存在(虽然这一函数之解析表达式可能不知道!)。在这类情况，y 称为 x 的隐函数。求隐函数的导数。

解　正如在上面的特例中一样，設想已將 y 用这个隐函数来代入。对 x 微分这恒等式，即得：

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'_x=0,$$

于是(自然要設 $F'_y\neq0$)有

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

142. 全微分　对于一元函数 $y=f(x)$ 的情况，我們已在第**89**段中考虑过将其增量 $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表为

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ \ (A=\text{常数})\tag{5}$$

的問題。并证明了[第 **90** 段]可以有这种表示法的充分与必要条件

是在 x_0 点有有限导数 $f'(x_0)$ 存在，而且恰好当 $A=f'(x_0)$ 时，上述的等式成立。函数增量的綫性部分

$$A\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$$

就称为函数的**微分** dy。

現在推广到多元函数，例如对于定义在某(例如，是开的)区域 $\mathscr{D}$ 上的三元函数 $f(x,y,z)$，自然可提出类似的問題，即将增量

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)$$

表为

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+C\cdot\Delta z+o(\rho),\tag{6}$$

其中 A,B,C 是常数，而 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

正如在 **90** 段一样，容易证明，若(6)成立，則函数在 (x_0,y_0,z_0) 点对各个元的偏导数必存在，而且

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=A,\ f'_y(x_0,y_0,z_0)=B,\ f'_z(x_0,y_0,z_0)=C.$$

事实上，例如，只要令(6)中 $\Delta y=\Delta z=0$ 而 $\Delta x\neq 0$，即得[与第 **90** 段(1a)比較]:

$$\Delta_x f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=A\cdot\Delta x+0(|\Delta x|),$$

故知存在着

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=A.$$

因此关系式(6)只可能取以下形式

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0)=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z+o(\rho),\tag{7}$$

或簡写为

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+u'_y\cdot\Delta y+u'_z\cdot\Delta z+o(\rho).\tag{7a}$$

虽然，在一元函数的情况，只要在該点 $y'_x=f'(x_0)$ 存在，即可保证

式(5)成立，但在現在情况，只知偏导数

$$u'_x=f'_x(x_0,y_0,z_0),\ u'_y=f'_y(x_0,y_0,z_0),\ u'_z=f'_z(x_0,y_0,z_0)$$

存在，却不能保证展开式(6)成立了。对于二元函数，这一点已在第 **139** 段的例子中看到过。那里还指出了式(6)成立的充分条件：即偏导数在(x_0,y_0,z_0)的邻域中存在，且在該点連續。

当式(7)成立时，称函数$f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处可微分，而（只在这时！）称函数增量之綫性部分

$$u'_x\cdot\Delta x+u'_y\cdot\Delta y+u'_z\cdot\Delta z=$$
$$=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z$$

为(全)微分，并記之为du或$df(x_0,y_0,z_0)$。

在多元函数时"函数在一点可微分"这一断言，我們知道，并不相当于在該点"函数对一切元的偏导数存在"这一断言，其涵义要更多一些。然而通常我們假設偏导数的存在与連續性，也就包含了可微分性了。

所謂自变量的微分dx,dy,dz，約定即是任意增量$\Delta x,\Delta y,\Delta z$①；故可写作

$$df(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=f'_x(x_0,y_0,z_0)dx+f'_y(x_0,y_0,z_0)dy+f'_z(x_0,y_0,z_0)dz$$

或

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz.$$

143. 一阶微分形式的不变性 設函数$u=f(x,y,z)$具有連續偏导数u'_x,u'_y,u'_z，而x,y,z又是自变量t与v的函数：

$$x=\varphi(t,v),\quad y=\psi(t,v),\quad z=\chi(t,v),$$

而且亦有連續偏导数$x'_t,x'_v,y'_t,y'_v,z'_t,z'_v$。于是[第**140**段]复合函

① 若规定自变量x的微分即是視x为自变量x、y、z的函数之微分，则由一般公式有

$$dx=x'_x\cdot\Delta x+x'_y\cdot\Delta y+x'_z\cdot\Delta z=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+0\cdot\Delta z=\Delta x;$$

而等式$dx=\Delta x$就已得证。

数 u 对于 t 及 v 的导数不但存在，而且連續，这由(3)易見。

若 x, y, z 是自变量，則 u 之全微分应該是

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

但現在 u——通过 x, y, z——依賴于变量 t 与 v。因此，对这两个变量微分可写为：

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

但由(3)有

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

而类似地亦有

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

代入 du 的表达式就有：

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t)dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v)dv.$$

集項如下：

$$du = u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + \\ + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv).$$

不难看到：括号中之式正是（t 与 v 的）函数 x, y, z 的微分，故有

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

我們所得的微分形式与 x, y, z 是自变量时的微分形式一样（但是 dx, dy, dz 这些符号，在这里自然是另一种意义）。

因此，对于多元函数，正如对于一元函数一样，仍有一阶微分形式的不变性①。

可能 x, y, z 依賴于不同变量

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(v, w).$$

这时可以认为

---

① 注意，只要假定一切所考察的函数都是可微分，则以上結論仍成立。为此只須证明可微分函数疊置后仍为可微分函数。

$$x=\varphi_1(t,v,w),\quad y=\psi_1(t,v,w),\quad z=\chi_1(t,v,w),$$

而以上的討論仍可适用。

推論 当 x 与 y 是一元函数时，有以下的公式：

$$d(cx)=c\cdot dx,\quad d(x\pm y)=dx\pm dy,\quad d(xy)=xdy+ydx,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}.$$

这些公式当 x,y 是任意多元的函数

$$x=\varphi(t,v,\cdots),\ y=\psi(t,v,\cdots)$$

时仍成立。

我們来证明最后一个为例。

为此先設 x 与 y 是自变量，而

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y^2}\cdot dy=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}.$$

我們看見，这时微分形状与一元函数的相同。由一阶微分形式之不变性，即可断定这个式子当 x,y 是任意多元函数时仍成立。

上面证得的全微分的性质与推論可用以化簡微分之計算，如

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2}.$$

因为自变量微分的系数正是相应的偏导数，故由此立刻可得后者。例如，对于 $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ 立即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

[比較第 138 段，2)]。

144. 全微分在近似計算中的应用 正与一元函数微分相似[第 94 段]，多元函数的全微分也可以有效地应用于近似計算中誤差估計。設有函数 $u=f(x,y)$，而在确定 x,y 之值时发生了誤差，設为 Δx 与 Δy。于是按变元不正确的值算出来的 u 值也有誤差 $\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，若已知 Δx 及 Δy 之誤差估計，要估計 Δu 这一誤差。

近似地將函数增量代以其微分(这只在 $\Delta x, \Delta y$ 充分小时才是合理的)即得

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y. \tag{8}$$

这时誤差 $\Delta x, \Delta y$ 及其系数都是可正可負。把它們都換成絕对值，即得不等式

$$|\Delta u|\leqslant\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

若用 $\delta x, \delta y, \delta u$ 表示最大絕对誤差(或絕对誤差的界限)，則显然有

$$\delta u=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\delta y. \tag{9}$$

下面是几个例子。

1) 首先，用以上的公式容易建立起平常近似計算的法則。令 $u=xy$ (其中 $x>0, y>0$)，故 $du=ydx+xdy$；把微分代以增量，即得 $\Delta u=y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$ [見(8)]，或关于誤差界限[见(9)]有:

$$\delta u=y\cdot\delta x+x\cdot\delta y.$$

双方除以等式 $u=xy$，最后即得

$$\frac{\delta u}{u}=\frac{\delta x}{x}+\frac{\delta y}{y}. \tag{10}$$

它表明这样一个法則：积的(最大)相对誤差等于各因子(最大)相对誤差之和。

也可以做得更簡单些。先取 $u=xy$ 的对数，然后再取微分：

$$\ln u=\ln x+\ln y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$$ ① 等等。

若 $u=\dfrac{x}{y}$，由这个方法可得

$$\ln u=\ln x-\ln y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y};$$

取絕对值与最大误差，又得到(10)。因此，商的(最大)相对誤差等于除式与被除式(最大)相对誤差之和。

---

① 請讀者注意，在計算 $\ln u$ 的微分时，是把 u 看作自变量來作的，虽然事实上 u 是 x 与 y 的函数。在以下也要注意到这一点。

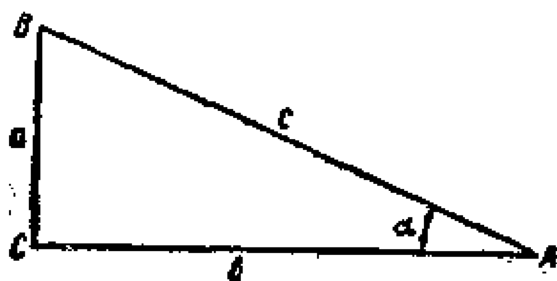


图 58.

2) 誤差計算在地形測量上时常要用到，主要用在由三角地形的已測到的元素計算不能直接測到的元素上。下面是这方面的一个例子。

設在直角三角形 ABC(图 58)中，底边 $AC=b$ 与邻角 $BAC=\alpha$ 已經測得；第二个邻边 a 可用公式 $a=b\cdot\operatorname{tg}\alpha$ 算出。在測量 b 与 α 时的誤差怎样反映在 a 的值上？

取对数并微分即得

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b}+\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha},\quad 故\quad da=\operatorname{tg}\alpha\cdot db+\frac{b}{\cos^2\alpha}d\alpha,$$

故

$$\delta a=\operatorname{tg}\alpha\cdot\delta b+\frac{b}{\cos^2\alpha}\cdot\delta\alpha.$$

145. 齐次函数 我們知道，齐次多項式是由次数相同的項組成的多項式。例如，表达式

$$3x^2-2xy+5y^2$$

就是二次齐次多項式。若将 x 与 y 都乘以一个因子 t，則整个多項式就得到一个 t 的二次方因子。任意的齐次多項式都有类似性質。

然而，有些較复杂的函数也有这样的性質；例如，若取

$$x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y},$$

則当将两个元 x, y 各乘以 t 时，整个函数得到一个 t^2 的因子，而与二次齐次多項式相仿。这一类函数自然可称为二次齐次函数。

現在給出一般的定义：

定义于区域 $\mathscr{D}$ 上的 m 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为 k 次齐次函数，只要当把各变元都乘以 t 时整个函数得到 t 的 k 冪因子，即只要成立着等式

$$f(tx_1,\cdots,tx_m)=t^kf(x_1,\cdots,x_m).\qquad(11)$$

为簡单起見我們限于考慮 $x_1, \cdots, x_m$ 与 t 都只取正値的情况。对于函数 f 的定义区域 $\mathscr{D}$，我們假設它有性质：若 $\mathscr{D}$ 包含一点 $M(x_1, \cdots, x_m)$，則它也要包含一切点 $M_t(tx_1, \cdots, tx_m)$，这里 $t>0$，即包含由原点出发而經过 M 点的完整的半射綫。

齐次函数的次数 k 可以是任一实数；例如，函数

$$x^{\pi}\cdot\sin\frac{y}{x}+y^{\pi}\cdot\cos\frac{y}{x}$$

就是变元 x 和 y 的 π 次齐次函数。

現在来求 k 次齐次函数的一般表达式。

先設 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 是零次齐次函数；于是

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_m)=f(x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

令 $t=\frac{1}{x_1}$，即得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)=f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

若引入 $m-1$ 个元的函数

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots u_{m-1})=f(1, u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}),$$

即有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

因此，所有的零次齐次函数都可以写成为各变元与某一变元之比的函数。反之，也很显然，上式就給出了零次齐次函数的一般表达式。

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是 k 次齐次函数，則它与 x_1^k 之比是零次齐次函数，由上面证得的結果有

$$\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{x_1^k}=\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right),$$

于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)=x_1^k\cdot\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

反之，若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 满足上式，则又很容易驗証它是 k 次齐次函数。于是，我們就得到了 k 次齐次函数的一般表达式。

例

$$x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}=x^2\frac{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^4+1}}{\frac{y}{x}-1}\cdot\ln\frac{y}{x}.$$

現在設（k 次）齐次函数 $f(x, y, z)$① 在（开）区域 $\mathscr{D}$ 中对各个元都有連續的偏导数。任意固定 $\mathscr{D}$ 中一点 (x_0, y_0, z_0) 則由基本恒等式(11)知，对任意 $t>0$ 皆有：

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^k\cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

現將此式对 t 微分；式左視为 t 之复合函数②，而式右則为 t 之冪函数。于是即有：

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+$$
$$+f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0 =k\cdot t^{k-1}\cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

若設 $t=1$ 即有下式：

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x_0+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y_0+$$
$$+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z_0=k\cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

于是，对于任意点 (x, y, z) 皆有

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z=$$
$$=k\cdot f(x, y, z). \qquad (12)$$

这等式称为欧拉等式。

我們已看到，任一具有連續偏导数的 k 次齐次函数都滿足这等式。也可以証明逆定理，即任一連續、具有連續偏导数而且滿足欧拉等式(12)的函数一定是 k 次齐次函数。

---

① 只是为了书写簡单才限于三个变量的情况。

② 正是为了可以应用复合函数微分法則，才設偏导数的連續性[第 140 段]。

附注 欧拉在他的"微分学"一书里只考虑过特殊类型的齐次表达式——有整式、分式、根式及其結合而未給出一般定义。但在引用以他命名的公式时，他所依据的性质正是现时作为齐次函数定义之基础的性质。

§2. 高阶导数与高阶微分

146. 高阶导数 若函数 $u=f(x, y, z)$① 在某一个(开)区域 $\mathscr{D}$ 上有对于其中一个变元的偏导数，则此偏导数本身仍是 x, y, z 的函数，它可能在某一点(x_0, y_0, z_0)仍有对于同一变元或另一变元的偏导数。这些后来得到的偏导数称为原来的函数 $u=f(x, y, z)$ 的二阶偏导数(或第二次偏导数)。

例如，若一阶导数是对 x 取的，则它对 x, y, z 的导数便記为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}$$

或

$$u''_{x^2}=f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0),\quad u''_{xy}=f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$u''_{xz}=f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)②.$$

类似地可以去定义三阶、四阶导数等等(第三次、第四次导数)。n 阶偏导数的一般定义也可以归納地給出。

注意，对于不同变元而取的高阶偏导数也称混合偏导数，例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2},\ \cdots.$$

例 1) 設 $u=x^4y^3z^2$，則

$$u'_x=4x^3y^3z^2,\quad u''_{xy}=12x^3y^2z^2,\quad u'''_{xyz}=24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{xyzx}=72x^2y^2z,$$

$$u'_y=3x^4y^2z^2,\quad u''_{yx}=12x^3y^2z^2,\quad u'''_{yxx}=36x^2y^2z^2,\quad u^{(4)}_{yxxz}=72x^2y^2z,$$

$$u'_z=2x^4y^3z,\quad u''_{zx}=8x^3y^3z,\quad u'''_{zxy}=24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{zxyx}=72x^2y^2z.$$

---

① 在此为书写簡单計只限于三元函数。

② 当然，微分記号应該看作整个符号。分母中的平方 ∂x^2 約定代替 $\partial x \partial x$，表示对于 x 微分二次。同样，x^2 也可写作 xx。在 u 的右下角的符号 x^2 代替 xx，意义也相同。下文都照这样去理解。

2) 我們已知[第 138 段, 2)] $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ 的偏导数是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

現在算出其以后的导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) &&=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) &&=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) &&=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) &&=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)&&=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2}\right)&&=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},
\end{aligned}$$

等等。

147. 关于混合导数的定理 在考察例 1) 与例 2) 的时候, 一眼就可看到, 关于同样的諸变量但依不同次序而取的混合导数是相等的。

但立刻就应該指出, 这一性质决不能就由混合导数的定义必然可导出的, 因为也会有依不同次序而取的混合导数是不相等的情况。

例如, 考察函数

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ \ (x^2+y^2>0\text{ 时}),\quad f(0,0)=0.$$

我們有:

$$f'_x(x,y)=y\cdot\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\quad (x^2+y^2>0\text{ 时}),$$

$$f'_x(0,0)=0.$$

若給 x 以等于零的特殊值, 則对任意 y 值(包括 $y=0$ 在內)就有: $f'_x(0,y)=$ $=-y$。将这一函数对 y 微分, 得 $f''_{xy}(0,y)=-1$, 由此推得, 特别在 $(0,0)$ 点处有

$$f''_{xy}(0,0)=-1.$$

用同样的方法計算在点 $(0,0)$ 处 f''_{yx}, 即得

$$f''_{yx}(0,0)=1.$$

于是,对于所考察的函数,有 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$。

然而,在前述例子中所看到的仅微分次序不同的諸混合导数相等的事实也并不是偶然的:在很广泛一类情况下都会成立。

定理 設 1)函数 $f(x,y)$ 定义在(开)区域$\mathscr{D}$上,2)在此区域上存在着一阶导数 f'_x 及 f'_y 以及二阶混合导数 f''_{xy} 与 f''_{yx},最后,3)这些二阶导数 f''_{xy} 与 f''_{yx},作为 x 与 y 的函数,在 $\mathscr{D}$ 中某点 (x_0,y_0) 連續。于是在此点有:

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{1}$$

证明 考慮表达式

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk},$$

其中 h,k 不为 0,例如为正数,而且充分小,使得矩形 $[x_0,x_0+h;y_0,y_0+k]$ 全在 $\mathscr{D}$ 中;一直到討論結束我們就这样来規定着 h 与 k。

現在引进一个 x 的輔助函数:

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k},$$

由假設 2),它在区間 $[x_0,x_0+h]$ 中有导数

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k},$$

从而 $\varphi(x)$ 是連續函数。借助于这个函数,可将 W 的表达式

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k}-\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right]$$

改写为

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}.$$

因为 $\varphi(x)$ 在区間 $[x_0,x_0,+h]$ 中滿足拉格朗日定理[第 102 段]的一切条件,因此,可用有限增量公式将 W 改写成:

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)}{k},$$

$$(0<\theta<1)$$

利用二阶导数 $f''_{xy}(x, y)$的存在性，就可在区間$[y_0, y_0+k]$上对于 y 的函数$f'_x(x_0+\theta h, y)$再用一次有限增量公式，最后得

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \qquad (0<\theta, \theta_1<1). \tag{2}$$

但W之表达式中一方面含 x 与 h，另一方面又以同样方式含 y 与 k。因此，若将它們互相調換，并引入輔助函数

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h, y)-f(x_0, y)}{h},$$

用同样方法去論证，得出結果：

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2, \theta_3<1). \tag{3}$$

比較(2)与(3)即知

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k).$$

現令 h 与 k 趋向于0，而取极限。由于因子 $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之有界性，故上式左右二方的变元都相应地趋向于x_0, y_0。于是由3)最后得：

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0),$$

故证訖。

于是，連續的混合导数 f''_{xy} 与 f''_{yx} 恒相等。

在上举的例子中，这些混合导数

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \quad (x^2+y^2>0)$$

当$x\to 0, y\to 0$时根本沒有极限，因此，在点(0, 0)发生間断：这时我們的定理自然不能应用。

附注　早在欧拉与克莱洛[1] (1740) 就注意到混合导数之相等，并試图去证明过。然而第一个严格证明是直到1873年才由許瓦茲[2]給出的。

我們要注意两次微分的交换次序問題与第131段里讲的两次

[1] 阿历克西斯·克洛德·克萊洛(1713—1765)是卓越的法国数学家。

[2] 卡尔·赫尔曼·阿瓦曼杜阿·許瓦茲(1843—1921)是德国数学家。

取极限的交换次序这个普遍問題間的联系。

还有下面有关混合导数的一般定理:

定理 設m元函数$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$定义在一个$m$維开区域$\mathscr{D}$上，且在域中具有至$(n-1)$阶为止的一切可能的偏导数以及$n$阶混合导数，而且所有这些导数都在$\mathscr{D}$中連續。

在这些条件下，任一n阶混合导数的值就与取微分的次序无关。

我們不再去讲这个证明了，它可以根据前面定理导出。

我們在以后恒假設导数有連續性，那末微分的次序就无关紧要了。在使用混合导数时我們常把对同一变元的各次微分集合在一起。

148. 高阶微分 設在区域$\mathscr{D}$中給出某个具有一阶連續偏导数的函数$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。于是我們知道，其(全)微分$du$就是以下表达式:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m,$$

其中$dx_1, \cdots, dx_m$是自变量$x_1, x_2, \cdots, x_m$的任意增量。

我們看到，du仍是$x_1, \cdots, x_m$的一个函数。若設u的連續二阶偏导数存在，则du就有連續一阶偏导数，于是才能够談到这个微分du的全微分$d(du)$，它称为u之二阶微分（或第二次微分）；用記号d^2u表示。

要着重指出，增量$dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$在这里要看作常数，而且由一次微分轉移到下一次微分时，都保持着同一数值（故二阶微分$d^2x_1, \cdots, d^2x_m$都是零！）。

于是，若应用第**143**段中已知的微分法则，就有:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\cdots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m.$$

展开后即有:

$$
\begin{aligned}
d^2u=&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_1+\\
&+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_2+\cdots+\\
&+\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_m\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m\right)\cdot dx_m=\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m^2+\\
&+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+\cdots+\\
&+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}dx_2dx_3+\cdots+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}dx_m.
\end{aligned}
$$

同样地可以定义三阶微分 d^3u, 等等。一般地，若$(u-1)$阶微分 $d^{n-1}u$ 已經定义,则 n 阶微分 d^nu 就定义为$(n-1)$阶微分的(全)微分:

$$d^nu=d(d^{n-1}u).$$

若函数 u 有直至 n 阶为止的所有各阶的連續偏导数，则 n 阶微分的存在就有了保证。但是各阶微分的展开式却是越来越复杂。为了簡化其記法,我們用下面的方法。

首先，对于一阶微分的表达式，我們約定“可把 u 提出括号之外”,于是它就可以符号地写作

$$du=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)\cdot u.$$

現在我們注意，若在二阶微分表达式中也“把 u 提出括号之外”,则剩在括号里的形式上正是

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m$$

的平方展开式;因此二阶微分可以符号地写作

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2\cdot u.$$

同样地可以写出三阶微分等等。一般的法则是：对于一切的 n 都有符号等式

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n\cdot u, \tag{4}$$

上式应作如此了解：首先，把括号里的“多项式”按代数学的乘幂法则形式地展开，然后把所得各项“乘”以 u（塡写在分子 ∂^n 之后），只在这以后，一切記号才回复到导数与微分的意义。

法则(4)可以用数字归納法来证明。

于是，n 阶微分是 n 次齐次完全多项式，或常称为对于自变量微分的 n 次型，其系数是 n 阶偏导数乘一个为整数的常数（“多項式”公式中的系数）。

例如，若 $u=f(x,y)$，則

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3,$$

$$d^4u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}dx^3dy+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2+4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}dxdy^3+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4,$$

等等。具体地設 $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$，即有

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},\quad d^2u=\frac{2xy(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^3u=\frac{(6x^2y-2y^3)dx^3+(18xy^2-6x^3)dx^2dy}{(x^2+y^2)^3}+$$

$$+\frac{(6y^3-18x^2y)dxdy^2+(2x^3-6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

等等。

149. 复合函数的微分 設現在有复合函数：

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m),$$

其中

$$x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\cdots,t_k).\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

在这种情形一阶微分仍可保持原来的形式：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$$

(根据一阶微分形式的不变性,第 **143** 段)。但是这里 $dx_1, dx_2, \cdots,$ dx_m 已不再是自变量的微分，而是函数的微分，因此，本身就可能都是函数,而不像前面那样的常数了。

現在来算这函数的二阶微分,(应用第 **143** 段的微分法则)有:

$$d^2u=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2+\cdots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d(dx_1)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d(dx_2)+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot d(dx_m)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2\cdot u+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot d^2x_m.$$

我們看見，对于高于一阶的微分，形式的不变性一般并不再成立。

現在来看一个特例,即 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的綫性函数的情形,即

$$x_i=\alpha_i^{(1)}t_1+\alpha_i^{(2)}t_2+\cdots+\alpha_i^{(k)}t_k+\beta_i,\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $\alpha_i^{(j)}$ 和 β_i 都是常数。

这时,有

$$dx_i=\alpha_i^{(1)}dt_1+\cdots+\alpha_i^{(k)}dt_k=\alpha_i^{(1)}\Delta t_1+\cdots+\alpha_i^{(k)}\Delta t_k.$$

我們看到，函数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一切一阶微分在現在这种情况仍是常数,而与 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 无关;所以第 **148** 段中的算式可以不加改动而应用。由此可知，在将自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 换为新变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 綫性函数之后，即使对高阶微分仍可保持原来的形式。在其中微分 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ 虽与增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m$ 相同,但后者不是任意的,而是由增量 $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_k$ 决定的。

这个簡单而重要的附注是哥西作出的：我們在下一段立刻就要用到它。

150. 戴劳公式 我們已知[第 **107** 段(126)]，若函数 $F(t)$的前 $n+1$ 阶导数存在，則按戴劳公式，它可展开为下面的形式：

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\Delta t).\quad(0<\theta<1)$$

这里要着重指出，参与右边微分式中各个不同幂次中的数量 dt 确实等于增量 Δt，而 Δt 是参与在左边的函数增量中：

$$\Delta F(t_0)=F(t_0+\Delta t)-F(t_0).$$

最后形式的戴劳公式便被推广到多元函数的情况(哥西)。

为书写簡单，我們限于二元函数 $f(x, y)$的情况。

設在某定点 (x_0, y_0) 的邻域中这函数具有一切的直到 $(n+1)$ 阶为止的連續导数。給 x_0, y_0 以某增量 $\Delta x, \Delta y$，而使联結(x_0, y_0)点与 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 点的直綫段不越出点 (x_0, y_0) 的前述邻域之外。

現在要证明关于 $f(x, y)$在上述的假定下，以下等式是正确的：

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),\qquad(5)$$

$$(0<\theta<1)$$

而且在等式右方各阶微分中的 dx 与 dy 正好等于等式左方产生函数增量之自变数增量 Δx 与 Δy。

为了证明，引入新的自变量 t，并設

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\quad y=y_0+t\cdot\Delta y,\quad(0\leqslant t\leqslant 1)\qquad(6)$$

将 x 与 y 之値代入 $f(x, y)$，得单变量 t 之复合函数：

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y).$$

我們知道，被引入的公式(6)在几何上就表示联結点 $M_0(x_0, y_0)$ 与点 $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 的直綫段。

显然，我們可以考虑輔助函数的增量

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)$$

以代替增量

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0),$$

因为二者相等。但 $F(t)$是一元函数且有$(n+1)$阶連續导数；因此对它可用上述戴劳公式而得：

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta),\quad(0<\theta<1)\qquad(7)$$

这里出現在右方各冪次中的微分 dt 就等于 $\Delta t=1-0=1$。

現在应用，在变元綫性变换下，高阶微分之形式也不变之理，就有

$$dF(0)=f'_x(x_0, y_0)\cdot dx+f'_y(x_0, y_0)\cdot dy=df(x_0, y_0),$$

$$d^2F(0)=f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot dx^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot dxdy+$$

$$+f''_{yy}(x_0, y_0)\cdot dy^2=d^2f(x_0, y_0),$$

等等。最后，对于$(n+1)$阶微分有：

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).$$

重要的是要注意，这里微分 dx, dy 与前面取的增量 $\Delta x, \Delta y$ 毫无差别。实际上，当 $dt=1$ 时有

$$dx=\Delta x\cdot dt=\Delta x,\quad dy=\Delta y\cdot dt=\Delta y.$$

把这些都代入展开式(7)，即得要証的展开式(5)。

讀者应該弄清楚，多元函数戴劳公式的微分形式虽然和一元函数的同样簡单，但其展开后的形式要复杂得很多很多。

§3. 极值、最大値与最小値

151. 多元函数的极値·必要条件 設函数

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

定义于区域$\mathscr{D}$中，而$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$是这区域的一个内点。

若对于点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$能有这样的一个邻域

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1; x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2; \cdots; x_m^0-\delta_m, x_m^0+\delta_m)$$

存在，使在域中一切点上都成立不等式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0),$$
$$(\geqslant)$$

則設此函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$在該点有一极大値（极小値）。

若此邻域可取得充分小，以致使上式中的等号可以取消，即在域中每点除去点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$本身外，都成立严格不等式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) < f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$$
$$(>)$$

就說函数在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$有一个眞正的极大値（极小値），否則极大値（极小値）就称为广义的。

极大値极小値統称为极値。

設函数在某点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$处有极値。

我們要证明，若在这点有有限偏导数

$$f'_{x_1}(x_1^0, \cdots, x_m^0), \cdots, f'_{x_m}(x_1^0, \cdots, x_m^0)$$

存在，則这些偏导数就都为零。于是一阶偏导数为零是极値存在之必要条件。

为此目的，設$x_2=x_2^0, \cdots, x_m=x_m^0$，只留下$x_1$变动，于是即得一元$x_1$的函数：

$$u=f(x_1, x_2^0, \cdots, x_m^0).$$

因为我們曾假定了在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$有极値（为确定起見，設

是极大値)存在，因此推得，特别是在点 $x_1=x_1^0$ 的某邻域 $(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1)$ 中必然成立不等式

$$f(x_1, x_2^0, \cdots, x_m^0) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0).$$

于是上述一元函数在点 $x_1=x_1^0$ 就有极大值，而由費馬定理[第 100 段]得

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)=0.$$

同样地可以证明在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 其余的偏导数也都为零。

因此，关于极値为"可疑"的点就是那些在其处一阶偏导数全取零値的点；它們的坐标可由解以下方程組

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_m)=0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_m)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m)=0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

求出。

正如在一元函数的情况一样，这类点叫做静止点。

152. 静止点的研究(二元函数的情况) 正如在一元函数时一样，在静止点不一定保证有极值存在。若以取簡单的函数 $z=xy$ 为

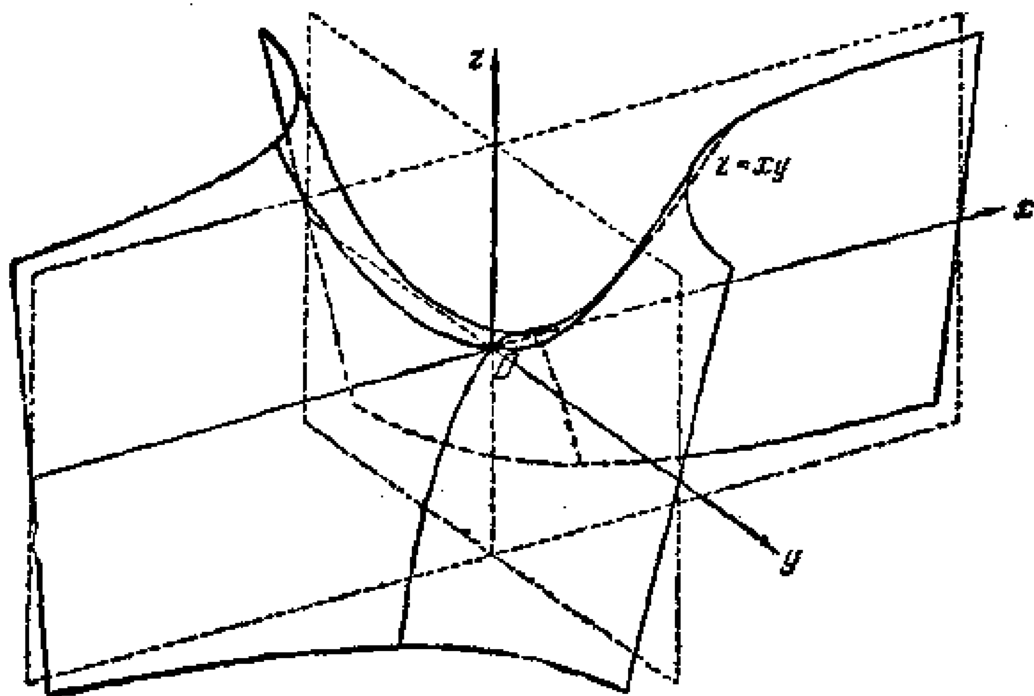


图 59.

例，则 $z'_x=y$ 与 $z'_y=x$ 只在唯一的一点——原点(0, 0)同时为零，在这点 $z=0$。但同时很明显，在这点的任一邻域中函数既取正值又取负值，因而沒有极值。图 59 画的就是 $z=xy$ 所表示的曲面(双曲抛物面)：在原点附近其形状是鞍形，而在一个垂直的平面上向上弯曲，而在另一个垂直的平面上向下弯曲。

于是就产生了极值存在(或不存在)的充分条件的問題，引起了对静止点所应加补充的探討。

我們限于二元函数 $f(x, y)$ 的情形。設在某点 (x_0, y_0) 的邻域中，这函数有定义，連續，且有連續的一阶及二阶偏导数，并設此点为静止点，即滿足条件

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \quad f'_y(x_0, y_0)=0. \tag{1a}$$

为要确定我們的函数是否在点 (x_0, y_0) 眞有极值，自然要来考虑差数

$$\Delta=f(x, y)-f(x_0, y_0).$$

按照具有拉格朗日型余項的戴劳公式[第 **150** 段，(5)]展开到第二項为止。然而由于假定 (x_0, y_0) 是静止点，故第一項消失而有

$$\Delta=\frac{1}{2!}\{f''_{x^2}\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}\Delta x\Delta y+f''_{y^2}\cdot\Delta y^2\}. \tag{2}$$

这里增量 Δx，Δy 就由差数 $x-x_0$，$y-y_0$ 充任，而一切导数是在某点：

$$(x_0+\theta\Delta x, \quad y_0+\theta\Delta y)$$

去算值的。

現在引入这些导数在被考察点处的值：

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12}=f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22}=f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{3}$$

并令

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f''_{xy}(\cdots)=a_{12}+\alpha_{12}; \quad f''_{y^2}(\cdots)=a_{22}+\alpha_{22},$$

则由二阶导数的連續性，有：

$$\text{当 } \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0 \text{ 时} \quad \text{一切 } \alpha \to 0. \tag{4}$$

差数 Δ 現可写为

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \\ + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}.$$

我們要证明，Δ 之状态根本有关于表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ 之符号。为便于論证，令 $\Delta x = \rho\cos\varphi$，$\Delta y = \rho\sin\varphi$，其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 是 (x, y) 与 (x_0, y_0) 的距离。于是，有

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + \\ + \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

1° 首先設 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$。

这时 $a_{11}a_{22} > 0$，故 $a_{11} \neq 0$，而括号 $\{\cdots\}$ 中的前一个二次三項式可写作

$$\frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi]. \tag{5}$$

由此明显地知括号 $[\cdots]$ 中之表达式恒为正，于是上述的二次三項式对一切 φ 之值皆不为零，而保持着与系数 a_{11} 相同之符号。其絕对值，由于 φ 是在 $[0, 2\pi]$ 上的連續函数，故有（显然为正的）最小值 m：

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geqslant m > 0.$$

另一方面，在考虑括号 $\{\cdots\}$ 中第二个二次三項式时，则由(4)，只要 ρ（同时 $\Delta x, \Delta y$）充分小，则对于一切 φ，就有

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |\alpha_{11}| + \\ + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m,$$

于是在括号 $\{\cdots\}$ 中整个表达式，也就是說差数 Δ，将保持着与第一个二次三項式相同的符号，亦即是 a_{11} 的符号。

于是，若 $a_{11} > 0$，则 $\Delta > 0$，而函数在被考察的点 (x_0, y_0) 有极小值，而当 $a_{11} < 0$ 时，就有 $\Delta < 0$，而有极大值。

2° 現在設 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$。

先討論 $a_{11}\neq 0$ 的情况，这时仍可应用变换(5)。当 $\varphi=\varphi_1=0$ 时，括号[…]中表达式成为 a_{11}^2，故为正值。反之，若由条件

$$a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0 \quad (\sin\varphi_2\neq 0)$$

确定 $\varphi=\varphi_2$，則括号[…]中之表达式成为$(a_{11}a_{12}-a_{12}^2)\sin^2\varphi_2$ 而为負。当 ρ 充分小时，括号 {…} 中的第二个二次三項式当 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2$ 时都可充分小，而使 Δ 之符号由第一个二次三項式的符号来决定。于是在被考察点(x_0, y_0)的任一个邻域中在幅角为 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2$ 的两条射綫上，差数 Δ 有异号的值。因此，在这点不可能有极值。

若 $a_{11}=0$，則括号{…}中的第一个二次三項式变为

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=\sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi).$$

这时一定有 $a_{12}\neq 0$，故可确定角 $\varphi_1\neq 0$ 使

$$|a_{22}|\,|\sin\varphi_1|<2|a_{12}|\,|\cos\varphi_1|.$$

故当 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2=-\varphi_1$ 时上述的二次三項式有相反的符号，于是再像前面一样来完成討論。

于是，若 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$，則函数 $f(x, y)$ 在所考察的靜止点 (x_0, y_0) 处有极值，即当 $a_{11}<0$ 时有极大值，而当 $a_{11}>0$ 时有极小值。若 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ 則沒有极值。

至于在 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ 的情况，要想解决这个問題就要牽涉到更高阶的导数；这个"可疑"情况我們暫置不論。

附注 欧拉最初注意到，条件

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0$$

对于函数 $f(x, y)$在(x_0, y_0)点有极值是必要的。然而他錯誤地以为，函数分別地对于每个变元皆有同型极值出現（例如当 f''_{x^2} 与 f''_{y^2} 同号时就是这样）就是充分条件。拉格朗日看出了欧拉的錯誤，并确定了不等式

$$f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-(f''_{xy})^2>0$$

为充分条件。也是他指出了，相反的不等式就可决定极值不出現。然而他沒有彻底地論证这点。

例 1）研究以下函数的极大与极小值：

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\quad(p>0,q>0).$$

計算偏导数:

$$z'_x=\frac{x}{p},\qquad z'_y=\frac{y}{q}.$$

故立刻可見唯一的靜止点即坐标原点(0, 0)。

計算 a_{11}, a_{12} 与 a_{22}, 得

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{q};$$

故 $a_{11}a_{12}-a_{12}^2>0$。因此，在点(0, 0)函数 z 有极小值。然而这也能直接看出。

这函数的几何图形是以坐标原点为頂点的椭圓拋物面(第 235 面上图 55)。

2)
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}\quad(p>0,q>0);$$

我們有
$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=-\frac{y}{q}.$$

这里也可看出，(0, 0)是靜止点。

我們算出

$$a_{11}=\frac{1}{p},\qquad a_{12}=0,\qquad a_{22}=-\frac{1}{q};$$

故 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$。于是沒有极值。

在几何上，我們遇到的是双曲拋物面，其頂点是坐标原点。

3)
$$z=y^2+x^4\quad 或\quad z=y^2+x^3;$$

在这两个情况下点(0, 0)都是靜止点，而在这点 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$。

我們的判别法不能給出答案；然而显而易見，在第一个情况有极小值出現；而在第二个情况則沒有极值。

153. 函数的最大值与最小值·例子 設函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 定义并連續于某个有界閉区域 $\mathscr{D}$ 中，并在这个区域中有有限的偏导数。由維尔斯德拉斯定理[第 **136** 段]，在这区域中一定可以找到一点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$；使在其处函数取得它一切值中的最大(最小)值。若此点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 在 $\mathscr{D}$ 的内部，則在其处函数显然有极大值(极小值)，于是在这一情况下，我們所注意到的点一定包含在对于极值为"可疑"的靜止点之中。然而函数 u 也可能在区域边界上达到其最大(最小)值。所以，为了求出函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,$

x_m)在区域$\mathscr{D}$中的最大(最小)值，必须要在区域的内点中找出一切静止点，即对于极值为"可疑"的点，算出在这些点的函数值，并把它們与区域界点上的函数值作比較：这些值中的最大(最小)值，就是函数在整个区域中的最大(最小)值。

我們举几个例子来說明。

1) 在由 x 軸，y 軸与直綫 $x+y=2\pi$ 所圍成的三角形区域(图 60)上求函数
$$u=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$
的最大值。我們有

$$u'_x=\cos x-\cos(x+y),\quad u'_y=\cos y-\cos(x+y).$$

在区域的内部导数只在唯一的点$\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$同时为零，而在这点 $u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。因为在区域边界上，即在直綫 $x=0$，$y=0$ 与 $x+y=2\pi$ 上此函数为零，因此，在上述点$\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$函数显然达到最大值。

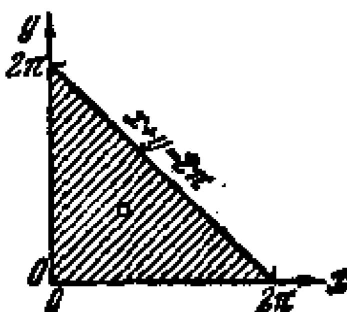


图 60.

2) 求非負数 x, y, z, t 之积
$$u=xyzt$$
之最大值，但此四数之和为常数
$$x+y+z+t=4c.$$

我們要证明，当这四个因子相等时：$x=y=z=t=c$①，u 达到最大值。

由所給之条件确定 t：$t=4c-x-y-z$，代入 u 之表达式，有
$$u=xyz(4c-x-y-z).$$
于是得到一个含三个自变量 x, y, z 的函数，它定义在三维区域
$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x+y+z\leqslant 4c$$
上。在几何上这区域是一个四面体，而由平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=4c$ 所圍成。

算出偏导数并令它們等于 0：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(4c-2x-y-z)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx(4c-x-2y-z)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy(4c-x-y-2z)=0.$$
在区域内部满足这些方程的只有一点 $x=y=z=c$，而在这点 $u=c^4$。因为

① 只是为确定起見才取因子数为四个；对任意多个因子結果仍是一样。

在边界上 $u=0$，故在所得点函数达到最大值。

于是我們的断言得证，因为当 $x=y=z=c$ 时也有 $t=c$①。

附注　在以上两个例中，在所考察的区域內部都只有一个靜止点。且已证明函数在这点有极大值。然而，与一元函数情况不同(見第 **118** 段附注)，这里，由这种只有一个极大值的事实，并不能作出結論，說这个极大值就是函数在整个区域中的最大值。

下面的簡單例子指明，这样的結論，实际上可能会得出不正确的結果。考虑定义在矩形$[-5,5;-1,1]$中的函数

$$u=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

其导数

$$u'_x=3x^2-8x+2y,\quad u'_y=2x-2y$$

在此区域中只在点$(0,0)$为零。用第 **152** 段的判別法容易证明，在該处函数有极大值(等于0)。然而这个数值并不是函数在这区域中的最大值，因为，例如在点$(5,0)$处函数值就是 25。

由此，在多元函数的情况，当求函数在一个区域中的最大值与最小值时，而去討論它的极大值与极小值，这在实用上是无必要的。

154. 問題　許多問題——既有数学領域中問題，也有其他科学和技术領域中的問題——都导致求某些函数最大值与最小值的問題。

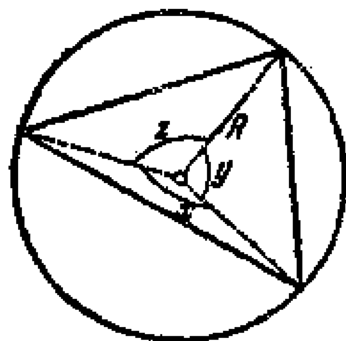


圖 61.

問題1)、2) 的解与上段考虑过的例子有关。

1) 在半徑为 R 的已知圓的一切內接三角形中求面积最大的一个(圖 61)。

若以 x, y, z 表三角形三边所張的圓心角，則其間有关系式 $x+y+z=2\pi$，由此 $z=2\pi-x-y$。三角形之面积 P 可用这三个角表示如次：

$$P=\frac{1}{2}R^2\sin x+\frac{1}{2}R^2\sin y+\frac{1}{2}R^2\sin z=\frac{1}{2}R^2\cdot[\sin x+\sin y-\sin(x+y)].$$

x 与 y 的变域可以条件 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 2\pi$ 来决定。現在需要求出使括号中的表达式取最大值的那些变元的值。

我們已知[第 **153** 段,1)]，这就是$x=y=\frac{2}{3}\pi$　故　$z=\frac{2}{3}\pi$：于是得到等边

① 由上述可知，总和为$4c$的四个正数之乘积 $xyzt$ 不会超过 c^4，故

$$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant c=\frac{x+y+z+t}{4},$$

即几何平均数不超过算术平均数。这結果对任意多个数字都正确。

三角形。

2) 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求面积 P 为最大的一个。

設 x, y, z，表三角形的边長，則由已知公式

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

可以令 $z=2p-x-y$ 將 P 化为

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

并求这函数在某个三角形区域(就是在第 123 段 5)中所讲过的那个区域)中的最大值。

我們現在另用他法：把問題轉化为求正数之积

$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

之最大値，但这三个正数之和为常数：

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-2p=p.$$

我們已經知道[第 **153** 段 2)]，只有在所有因子都相等，即 $x=y=z=\frac{2p}{3}$ 时才能达到最大値：于是又得等边三角形。

3) 現在考慮具有并联插头的供电网路。图 62 是綫路草图，而且 A

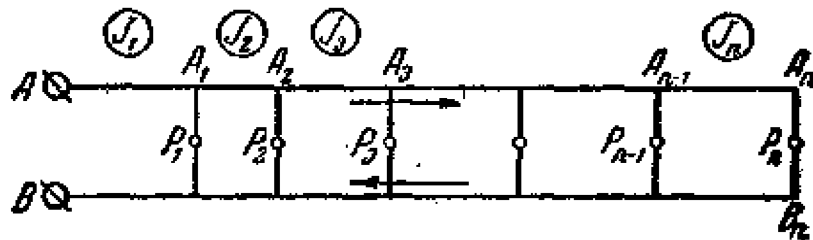


图 62.

与 B 联在电源上，而 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 各为需要电流 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的用电器，設規定了在整个綫路中电位降落为 $2e$，試求导綫的截面积使整个綫路耗銅最少。

显然，只須考察一条导綫 AA_n 即可，因为另一导綫处在类似的条件下。

以 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 表綫段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 之长(以米計)，以 $q_1, q_2\cdots, q_n$ 表其截面积(以毫米^{2}計)。于是表达式

$$u=l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n$$

正表示所需銅的体积(以立方厘米計)；并要使其达到最小値，而使在 AA_n 上之电位降落为 e。

很容易計算在綫段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 中所經过的电流：

$$J_1=i_1+i_2+\cdots+i_n,\quad J_2=i_2+i_3+\cdots+i_n,\quad \cdots,\quad J_n=i_n.$$

若以 ρ 表示长为 $1m$ 截面积为 $1mm^2$ 的銅导綫的电阻，则以上綫段的电阻为

$$r_1=\frac{\rho l_1}{q_2},\quad r_2=\frac{\rho l_2}{q_2},\ \cdots,\quad r_n=\frac{\rho l_n}{q_n},$$

于是在諸綫段上电位降落，由欧姆定律，为

$$e_1=r_1J_1=\frac{\rho l_1 J_1}{q_1},\quad e_2=r_2J_2=\frac{\rho l_2 J_2}{q_2},\ \cdots,\ e_n=r_nJ_n=\frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

为了避免复杂的計算，我們不用变量 $q_1, q_2, \cdots q_n$ 而引入 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，其間有簡单的关系式 $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$，由此 $e_n=e-e_1-e_2\cdots-e_{n-1}$，于是

$$q_1=\frac{\rho l_1 J_1}{e_1},\quad q_2=\frac{\rho l_2 J_2}{e_2},\ \cdots,\quad q_n=\frac{\rho l_n J_n}{e_n}=\frac{\rho l_n J_n}{e-e_1-e_2-\cdots-e_n},$$

而

$$u=\rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1}+\frac{\rho_2^2 J_2}{e_2}+\cdots+\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}}+\frac{l_n^2 J_n}{e-e_1-\cdots-e_{n-1}}\right],$$

而自变量 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 之变域由以下之不等式規定：

$$e_1>0,\quad e_2>0,\ \cdots,\quad e_{n-1}1>0,\quad e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}<e.$$

令 u 对各自变量之偏导数为零，即得方程組：

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,$$

$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,\ \cdots$$

$$\cdots,\quad -\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,$$

于是（再引入 e_n）即有

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2}=\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}=\cdots=\frac{l_n^2 J_n}{e_n^2},$$

为方便計，令公比为 $\frac{1}{\lambda^2}(\lambda>0)$。于是

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\quad e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2},\ \cdots,\quad e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n},$$

而 λ 可以很容易地由 $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$ 得出：

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\cdots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

最后，回到原来的变量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 即得

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1},\quad q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2},\ \cdots,\ q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

于是，最适合的截面面积与电流大小之平方根成正比。

附注 因为在这个情况变量 $e_1, e_2, \cdots e_{n-1}$ 之变域是开的，于是维尔斯德拉斯第二定理[第 136 段]不能直接适用，然而注意到区域的边界由以下的关系式来决定：

$$e_1 \geqslant 0,\quad e_2 \geqslant 0, \cdots,\quad e_{n-1} \geqslant 0,\quad e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} \leqslant e,$$

其中至少有一个式子中等号成立。 于是当点 $(e_1, e_2, \cdots e_{n-1})$ 逼近边界时，量 u 增长到无穷。由此可知，所得的 $e_1, e_2, \cdots e_{n-1}$ 之值能使函数 u 达到最小值。

第十章　原函数
（不定积分）

§1. 不定积分及其最簡单的計算法

155. 原函数概念（及不定积分概念）　在許多科学技术問題中，需要由已知导函数还原为原函数。

在78段里，我們假設了已知运动方程 $s=f(t)$，即路程随时間的变化而变化的規律，我們用微分法先找出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然后又找出了加速度 $a=\frac{dv}{dt}$。但事实上常常需要解决反面的問題：給出了加速度 a，为时間 t 的函数 $a=a(t)$，而要来决定速度 v 及所历路程 s 与 t 的关系。如此，这里就要由函数 $a=a(t)$ 来还原到那个以 a 为导函数的函数 $v=v(t)$，然后，知道了函数 v，来找那个导函数为 v 的函数 $s=s(t)$。

同样，在78段里，我們知道了沿 x 軸上直綫段 $[0, x]$ 連續分布的質量 $m=m(x)$，而用微分法找到了"綫性"密度 $\rho=\rho(x)$。但自然发生这样一个問題：如何由已知密度变化律 $\rho=\rho(x)$ 来寻找所分布的質量本身？这仍然就是要由已知函数 $\rho(x)$ 来求那个以 ρ 为导函数的原函数 $m=m(x)$。

一个已知区間 $\mathscr{X}$ 上的函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数[①] 或 $f(x)$ 的积分，如果在此整个区間上 $f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导函数，或者就是說，如果 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分：

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx\text{②}.$$

---

① "原函数"这个名称始于拉格朗日（參閱第一分册147頁底注）。

② 在这情形也說，函数 $F(x)$ 是微分式 $f(x)\,dx$ 的原函数（或积分）。

求一个函数的全体原函数叫做它的"积分"或"求积"，并且这是积分学里的問題之一；显然，这就是微分学基本問題的反面。

定理 如果在某一个(有限的或无限的，閉的或开的)区間$\mathscr{X}$上，函数$F(x)$是函数$f(x)$的原函数，則函数$F(x)+C$在C为任何常数时也为其原函数。反之，区間$\mathscr{X}$上$f(x)$的每个原函数都可以表成这个形式。

証 函数$F(x)+C$与$F(x)$同为$f(x)$的原函数，这一点是很明显的，因为$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。

现在設$\Phi(x)$是函数$f(x)$的任一原函数，而在区間$\mathscr{X}$上有

$$\Phi'(x)=f(x).$$

既然函数$F(x)$与$\Phi(x)$在該区間上有同一导函数，则它們相差一个常数[**110**段，推論]：

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

这就是所要証明的。

由此定理可見，只要知道函数$f(x)$的一个原函数$F(x)$，也就知道它的所有原函数了，因为它們彼此只差一常数項。

因此，$F(x)+C$这个含任意常数C的式子就是具有导函数$f(x)$或微分$f(x)dx$的函数的一般形式。这个式子就是函数$f(x)$的不定积分而表以符号

$$\int f(x)dx,$$

其中已經涵蓄有任意常数在內。乘积$f(x)dx$称为被积式，而函数$f(x)$称为被积函数。

例 設$f(x)=x^2$；于是不难看出，这个函数的不定积分就是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

这很容易用逆运算——微分法来核驗。

在此提醒讀者注意："积分"号$\int$下要写的是所求原函数的微

分，而不是导函数(在上例中要写的是 x^2dx，而不是 x^2)。下面 175 段将要說明，这种写法乃出于历史傳統；它表現許多优点，因此保持这种傳統是合理的。

由不定积分的定义可直接推出下列性質：

1. $$d\int f(x)dx=f(x)dx,$$

卽符号 d 与 $\int$ 当 d 在前时相互抵消。

2. 旣然 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，我們有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

这也可写成

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

由此可見，$F(x)$ 前的符号 d 与 $\int$ 当 d 居后时也可相互抵消，但須在 $F(x)$ 上添补一个任意常数。

回到开头那个力学問題，現在我們可以写

$$v=\int a(t)dt \quad 及 \quad s=\int v(t)dt.$$

为确定起見，假設所指乃等加速运动，例如在重力作用之下；于是 $a=g$(若鉛垂方向朝下算作正向)并且不难了解

$$v=\int gdt=gt+C.$$

我們得出了速度 v 的一个表出式，其中除时間 t 外还含有一个任意常数 C。在不同 C 値之下，在同一瞬間也可得出种种不同的速度之値，所以我們現有的資料还不足完全解决問題。要完全解决問題，只要知道任一瞬間的速度値就够了。例如，設我們知道在 $t=t_0$ 时速度 $v=v_0$；将这些値代入所得速度表达式

$$v_0=gt_0+C, \quad 由此得 \quad C=v_0-gt_0,$$

現在我們的解就成为完全确定的形式：

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

其次，我們来找路程 s 的式子。我們有

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(用微分法很容易驗証原函数可取这样的形式)。这个新的未知常数 C' 可以这样来决定：例如，給定在瞬間 $t=t_0$ 路程 $s=s_0$；如此找出了 $C'=s_0$，于是所求的解可写成这最后的形式：

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

t_0, s_0, v_0 諸值相約称为 t, s, v 諸变量的初值。

同样可以写

$$m=\int\rho(x)dx.$$

这里积分时出現常数 C；这回它可由"$x=0$ 时質量 m 也应化为 0"这个条件来决定。

156. 积分与求面积問題 旣然历史上原函数概念是密切联系着求面积問題的，那末我們在此就来講一講这个問題(采用的是平面图形面积的直覺概念，这問題的严密提法則留待第十二章再討論)。

設在区間 $[a, b]$ 上給定了一个連續函数 $y=f(x)$，只取正値(非負値)。我們来看这个图形 $ABCD$(图 63)，它由曲綫 $y=f(x)$，縱坐标綫 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 軸的一段所包圍；这种图形叫做曲綫梯形。要决定这个图形的面积 P，我們来考察变动图形 $AKLD$ 的面积的变化情况，这个图形是包圍在初縱标綫 $x=a$ 及相应于

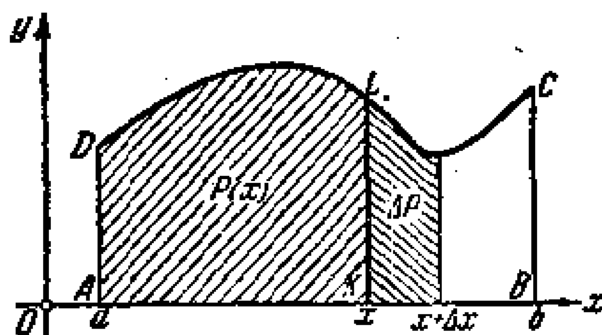


图 63.

区間 $[a, b]$ 上任一 x 值的縱标綫之間的。在 x 变化时該面积也隨着变化，而对每一 x 值都有其一个完全确定的相应值，如此曲綫梯形 $AKLD$ 的面积是 x 的一个函数；表之以 $P(x)$。

现在我們的問題是要来找这个函数的导数。因此我們給 x 一个增量 Δx（比方說是正的罢）；于是面积 $P(x)$ 也得一相应增量 ΔP。

設以 m 和 M 各表函数 $f(x)$ 在区間 $[x, x+\Delta x]$ 上的最小值和最大值[73 段]，然后将面积 ΔP 与以 Δx 为底 m 和 M 为高的矩形面积作比較。显然有

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

因此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

若 $\Delta x \to 0$，則由于連續性 m 和 M 将趋于 $f(x)$ 而此时也就

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

如此，我們导出了这个著名的定理——世称牛頓-萊卜尼茲定理[①]——变动面积 $P(x)$ 对有限横标的导数就等于有限縱标 $y = f(x)$。

换句話說，变动面积 $P(x)$ 就是所給函数 $y = f(x)$ 的一个原函数。这个原函数在一切其他原函数中具有这样的特征：它在 $x = a$ 时化为 0。所以，只要知道函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，并按前段的定理

$$P(x) = F(x) + C,$$

則常数 C 就容易决定，在此令 $x = a$：

---

① 事实上，这个命題已由牛頓的学生艾薩克·巴尔罗（1630—1677）所发表，虽然形式不同。

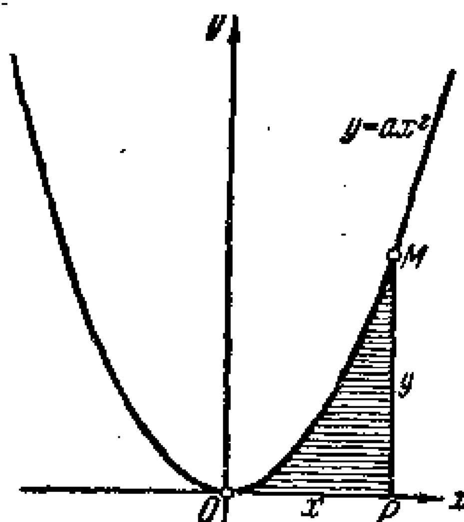


图 64.

$0=F(a)+C$, 如此得 $C=-F(a)$. 終于得出

$$P(x)=F(x)-F(a).$$

要得整个曲綫梯形 $ABCD$ 的面积 P 則只須取 $x=b$:

$$P=F(b)-F(a).$$

作为一个例子，我們来求这样一个图形的面积 $P(x)$: 它由抛物綫 $y=ax^2$, 相应于所給 x 值的縱标綫及 x 軸的一段所圍成（图 64）; 既然該抛物綫切 x 軸于坐标原点，則 x 的初值在此等于 0。函数 $f(x)=ax^2$ 的原函数容易找出: $F(x)=\frac{ax^3}{3}$。这函数恰好在 $x=0$ 时化为 0, 如此

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[参閱 43 段 3]。

有鉴于这种計算积分与求平面图形面积的关系，或者說与成方的关系①，通常也就称积分的計算为成方或求积。

要把以上所說的完全推广到函数也取負值的情形，只須約定将图形落在 x 軸下面部分的面积算作負的。

如此，不論 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上是一个怎样的函数，讀者总可以想象其原函数为該函数图象所圍的变动面积。但把这种几何說明当作原函数存在的証明当然是不行的，因为面积概念本身还沒有严格建立。

在下一章 **183** 段我們将能对这个重要事实給一严密的純解析的証明：每个在某区間里連續的函数在該区間里必有原函数。目前我們先承认这个事实。

① квадратура 一字原系"将图形化为方形"以便計算面积之意，通常也就意譯为求积分而与 интегрирование 沒有分別——譯者注。

在本章里凡称原函数都只对連續函数而言。如果一个函数具体給出而有不連續点，则我們只考慮使它連續的区間。因此，承認了上面所陈述的事实以后，我們就无需每次都声明积分的存在：我們所考慮的积分全是存在的。

157. 基本积分表 微分学里每个确定某函数 $F(x)$ 的导函数是 $f(x)$ 的公式都可以导出一个相应的积分公式

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

把 81 段的初等函数微分法公式搬过来，我們馬上就能做出下面这个积分表：

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$

3. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

关于公式 4 我們略作解釋：它适用于任何不包含 0 的区間。事实上，如果这个区間落在 0 的右边，所以 $x>0$，而由已知微分法公式 $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ 立即推知

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

如果該区間落在 0 的左边而 $x<0$，则由微分法容易看出 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$，因此

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

这两个公式合并起来就成公式 4。

上面这积分表的应用范圍可以由积分法則予以扩充。

158. 最簡单的积分法則 I. 若 a 为常数 $(a \neq 0)$，則

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

事实上，微分等式右边，得[91 段，I]

$$d\left[a \cdot \int f(x)dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x)dx\right] = a \cdot f(x)dx,$$

所以这个式子就是微分式 $a \cdot f(x)dx$ 的原函数，这就是所要証明的。

如此，常数因子可以提到积分号外面来。

II. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

微分等式右边[参閱 91 段，II]：

$$d\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx =$$

$$= [f(x) \pm g(x)]dx;$$

如此，該式卽最后这个微分式的原函数，这就是所要証明的。

諸微分之和(或差)的不定积分等于各微分的积分之和(或差)。

注 对这两个公式我們加注如下。公式里的不定积分每个都含有任意常数項。这样的等式应理解为两边差一常数。有时这种等式也可按表面理解为完全相等，但此时其中所出現的积分有一个就不是任意的原函数了：它的常数在其它积分的常数值选定后也就跟着确定。这个重要的箋注此后要記在心头。

Ⅲ. 若

$$\int f(t)dt=F(t)+C,$$

則

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C',$$

事实上，該关系式卽等价于：

$$\frac{d}{dt}F(t)=F'(t)=f(t).$$

于是

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=F'(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b),$$

所以

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

卽$\frac{1}{a}F(ax+b)$事实上为函数 $f(ax+b)$的原函数。

特別常見的是 $a=1$ 或 $b=0$ 时的情形：

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C_1,\quad \int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C_2.$$

(其实法則Ⅲ是不定积分变量替換法則的一个很特殊的情形，

关于一般法则后面 **160** 段里要講。)

159. 例 1) $\int(6x^2-3x+5)dx$.

应用法則 II 和 I (及公式 3、2), 我們有:

$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=6\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

一般多項式也容易积分。

2) $$\int(1+\sqrt{x})^4dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx=$$

$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int xdx+4\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^2dx=$$

$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C. \qquad (\text{II}, \text{I}; 3.2)$$

3) $$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C. \qquad (\text{II}; 3)$$

我們給几个法則 III 的应用实例:

4) (a) $$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C, \qquad (\text{III}; 4)$$

(6) $$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int(x-a)^{-k}dx=$$

$(k>1)$

$$=\frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+C=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C. \qquad (\text{III}; 3)$$

5) (a) $$\int\sin mxdx=-\frac{1}{m}\cos mx+C, \qquad (\text{III}; 8)$$

$(m\neq0)$

(6) $$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\sin mx+C. \qquad (\text{III}; 9)$$

$(m\neq0)$

6) (a) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$ (Ⅱ; 6)

$(a>0)$

(6) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$ (Ⅱ; 5)

分母較复杂的分式如果先把它分解为几个分母較簡单的分式之和再来积分，往往可以容易一些。例如，

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right);$$

所以

7) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

某些三角函数式經适当初等变換后也可以用最簡单的法則来积分。显然，例如

$$\cos^2 mx=\frac{1+\cos 2mx}{2},\quad \sin^2 mx=\frac{1-\cos 2mx}{2},$$

因此

8) (a) $\int\cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,$

(6) $\int\sin^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C.$ $(m\neq 0)$

160. 变量替換积分法 我們来講一种最强的积分法——变量替換法或置換法。它所根据的是下面这一簡单的事实：

如果知道了

$$\int g(t)dt=G(t)+C,$$

則有

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx=G(\omega(x))+C.$$

[所有在此出現的函数 $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ 都假設是連續的。]

这可直接由复合函数微分法則(見 84 段)

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x))=G'(\omega(x))\cdot\omega'(x)=g(\omega(x))\cdot\omega'(x)$$

推出，只要注意到在此 $G'(t)=g(t)$。这也可以用另一种方式来表出：我們說，

$$dG(t)=g(t)dt,$$

这关系式在自变数 t 代以函数 $\omega(x)$时也仍成立(參閱 **92** 段)。

設要計算积分

$$\int f(x)dx.$$

在許多情形下，新变数可以选 x 的这样的函数：$t=\omega(x)$，使被积式变成这样形状：

$$f(x)dx=g(\omega(x))\cdot\omega'(x)dx, \tag{1}$$

这里 $g(t)$是一个比 $f(x)$便于积分的函数。于是，按上面所說，只要来找积分

$$\int g(t)dt=G(t)+C,$$

使經 $t=\omega(x)$ 这个置換后可由它得出所求的积分。通常也就簡写成

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt, \tag{2}$$

而了解为在右边积分里的 t 的函数已做了上述替換。

例如，我們来求积分

$$\int \sin^3 x\cos x dx.$$

旣然 $d\sin x=\cos x dx$，則令 $t=\sin x$，被积式变为

$$\sin^3 x\cos x dx=\sin^3 x d\sin x=t^3dt.$$

最后一式的积分很容易算出：

$$\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C.$$

剩下只要以 $\sin x$ 代 t 而变回变量 x:

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

要注意的是，在选擇簡化被积式的置換 $t=\omega(x)$ 时要記得被积式中須有因子 $\omega'(x)dx$ 这个給出新变数 t 的微分的部分［参閱(1)］。在前例中置換 $t=\sin x$ 的成功是由于有 $\cos x dx=dt$ 这个因子。

关于这一点我們来看一个有教育意义的例子:

$$\int \sin^3 x dx.$$

这里置換 $t=\sin x$ 是不适用的，因为沒有所說那种因子。如果由被积式里試图分出因子 $\sin x dx$（或 $-\sin x dx$ 更好）作为新变数的微分，則置換应該是 $t=\cos x$；既然剩下部分

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

在这置換之下簡化，則所取置換是适当的。于是我們有

$$\int \sin^3 x dx = \int (t^2-1)\, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

有时置換法也以与所說不同的形式来应用。卽，在被积式 $f(x)dx$ 里逕以新变量 t 的函数 $x=\varphi(t)$ 来替換 x 而結果得出

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt.$$

显然，如果在这个式子里作置換 $t=\omega(x)$，这里 $\omega(x)$ 是 $\varphi(t)$ 的反函数，我們就回到了所求的被积式 $f(x)dx$。所以，等式(2)依然成立，而在此計算积分后右边应令 $t=\omega(x)$。

我們来求这个积分作为一个例子:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx.$$

根号下的平方差（第一个平方是常数）暗示我們三角置換 $x=a\sin t$.①

---

① 宜在此指出，x 看作是变化于 $-a$ 与 a 之間，而 t 变化于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間。所以 $t=\arcsin\frac{x}{a}$.

于是有

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt$$

并且

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 t\,dt.$$

但我們已經知道积分

$$a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]+C$$

[159 段, 8]。为了变回到x, 我們令$t=\arcsin\frac{x}{a}$; 第二項的变换这样做比較容易:

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

如此終于得出

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

找适当置换的本領可以凭練习来培养。虽然对此不能給什么一般的指示,但有助于寻找置换的个别特殊方針讀者可在下一段里找到一些。在典型的情形,置换法将在教程正文中指出。

161. 例 1) (а)$\int e^{x^2}\cdot x\,dx$, (б)$\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$.

а) 解 設 $t=x^2$, 我們有 $dt=2x\,dx$, 于是

$$\int e^{x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

б) 提示 用同一置换法。答案。$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. 在两种情形积分都有这样的形式:

$$\int g(x^2)\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int g(x^2)\,dx^2,$$

这里 g 是一个便于积分的函数; 对于这种积分自然宜采取置换 $t=x^2$.

2) (а)$\int\frac{\ln x}{x}dx$, (б)$\int\frac{dx}{x\ln x}$, (в)$\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

提示 所有这些积分都有这样的形式:

$$\int g(\ln x)\frac{dx}{x}=\int g(\ln x)\,d\ln x,$$

而用置换 $t=\ln x$.

答案 (a) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; (б) $\ln\ln x+C$; (в) $-\frac{1}{\ln x}+C$.

3) 象

$$\int g(\sin x)\cdot\cos x dx,\ \int g(\cos x)\cdot\sin x dx,\ \int g(\operatorname{tg}x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

这样形状的积分各采取置换

$$t=\sin x,\quad t=\cos x,\quad t=\operatorname{tg}x.$$

例如,

(a) $\int\frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}\sin x+C$;

(б) $\int\operatorname{tg}x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C$.

4) (a) $\int\frac{2xdx}{x^2+1}$, (б) $\int\operatorname{ctg}x dx$.

解 (a) 若令 $t=x^2+1$, 則分子 $2xdx$ 恰成 dt; 而該积分化为

$$\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(x^2+1)+C.$$

我們要注意, 只要被积式分子成分母的微分而所設积分有

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}$$

形式时, 总是用 $t=f(x)$ 这个置换就解决問題了:

$$\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

这样我們有

(б) $\int\operatorname{ctg}x dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$ [参閱3(б)].

5) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

置換: $x=a\cdot\operatorname{tg}t$①, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$, 如此 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=$

$$=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t dt=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C \text{ [参閱159段, 8)]}。$$

---

① 在此只要設 t 变化于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間。

現在令 $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ 并以 $\operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$ 表出 $\sin t$ 及 $\cos t$ 而变回变数 x, 如此最后有

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

6) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ $(\alpha\gtrless 0)$.

令 $\sqrt{x^2+\alpha}=t-x$ 而取 t 作新变数。平方起来，两边的 x^2 消去，結果得

$$x=\frac{t^2-\alpha}{2t},$$

如此

$$\sqrt{x^2+\alpha}=t-\frac{t^2-\alpha}{2t}=\frac{t^2+\alpha}{2t},\quad dx=\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt.$$

最后

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C.$$

162. 分部积分法 設 $u=f(x)$ 及 $v=g(x)$ 是两个 x 的函数，各具有連續导函数 $u'=f'(x)$ 及 $v'=g'(x)$。于是按乘积微分法則有 $d(uv)=udv+vdu$ 或 $udv=d(uv)-vdu$. 显然，$d(uv)$ 的原函数是 uv; 所以成立这个公式:

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{3}$$

这个公式就表出分部积分的法則。它把 $udv=uv'dx$ 一式的积分化为 $vdu=vu'dx$ 一式的积分.

例如，設要来求积分 $\int x\cos x dx$. 我們令

$$u=x,\quad dv=\cos x dx,\quad 如此\ du=dx,\quad v=\sin x\text{①}$$

而按公式(3)有

① 既然对于我們的目的只要有一种方式把 $\cos x dx$ 表为 dv 的形式就行了，故无必要写出 v 的含任意常数的一般形式。这話今后应記在心头。

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+C. \qquad (4)$$

如此，分部积分法能将复杂的被积函数 $x\cos x$ 化为简单的 $\sin x$。顺便积分 $\cos x dx$ 而得出 v，——这是“分部积分法”名称的来源。

用公式(3)来計算积分必須把被积式分解为两个因子：u 及 $dv=v'dx$，其中第一因子在渡向等式右边的积分时要予以微分，而第二因子要予以积分。必須尽量使微分 dv 积分起来沒有困难，并使以 du 替代 u，以 v 替代 dv 后**总起来**能使被积式化簡。如此，在前例中显然不宜(比方說)取 xdx 作 dv 而取 $\cos x$ 作 u。

稍經熟练后就不会对 u, v 的取法感覺困难而能立即运用公式了[参閱(4)]。

分部积分法适用范圍較变数替换法稍窄，但也有許多整类的积分是可以用这方法来計算的，例如

$$\int x^k\ln^m x dx,\ \int x^k\sin bx dx,\ \int x^k\cos bx dx,\ \int x^k e^{ax}dx, \text{等等。}$$

163. 例 1) $\int x^3\ln x dx$.

$\ln x$ 的微分能起簡化作用，所以我們設

$$u=\ln x,\quad dv=x^3dx,\quad \text{如此} du=\frac{dx}{x},\quad v=\frac{1}{4}x^4$$

而

$$\int x^3\ln x dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

2) (a) $\int \ln x dx$, (б) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

在两种情形都取 $dx=dv$，如此得：

(a) $\int \ln x dx=x\ln x-\int x d\ln x=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1)+C$;

(б) $\int \operatorname{arctg} x dx=x\operatorname{arctg} x-\int x d\operatorname{arctg} x=x\operatorname{arctg} x-\int \frac{x}{x^2+1}dx=$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C \qquad [161\text{段}, 4(\text{a})].$$

3) $\int x^2 \sin x dx$.

我們有

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

如此，我們把所求的积分化成了已知的积分 [162 段，(4)]；將該結果代入上式即得

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

在一般稍复杂的情形这里分部积分法需要施用两次。

同样，由重复施用此法可算出下列积分：

$$\int P(x) e^{ax} dx, \int P(x) \sin bx dx, \int P(x) \cos bx dx,$$

这里 $P(x)$ 是 x 的多項式。

4) 有趣的例子是积分

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

如果对它們施行分部积分法(在两例都取，比方說，$dv = e^{ax}dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$)，則得

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

如此，每个积分均由另一积分所表出①。

但如果以第二公式里的积分代入第一公式，則导出一个关于第一积分的方程，由此该积分定出为：

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

---

① 如果把积分理解为确定的原函数[参閱 158 段注]，則要在第二公式中有与第一公式中相同的函数时，严格說来，应該在右边还附加一个常数。当然，它在最后的式子里将被常数 C 及 C' 所吸收。

同样求出第二积分为:

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C'.$$

5) 作为分部积分法应用的最后一个例子，我們来推导計算这个积分的**递推公式**:

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad(n=1, 2, 3, \cdots).$$

应用公式(3)而令

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad dv=dx,\text{ 如此有 } du=-\frac{2nx\cdot dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\quad v=x.$$

我們得出

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

后一积分可变换如下:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=J_n-a^2J_{n+1}.$$

将此式代入前面的等式，我們得出这个关系:

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1},$$

由此有

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_n. \tag{5}$$

所得公式把积分 J_{n+1} 的計算化为 J_n 的計算，使指标值降1。知道了积分

$$J_1=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}$$

[159段，6)(6)；我們取其一个值]，按此公式 $n=1$ 时，得

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\text{arctg}\frac{x}{a}$$

[这結果我們前曾由别的方法得出，参閱161段，5)]。在公式(5)中令 $n=2$，更得

$$J_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}J_2=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\text{arctg}\frac{x}{a},$$

这样推下去。如此我們可以对任何自然数指标算出积分 J_n.

§2. 有理式的积分

164. 有限形式积分法問題的提出 我們已經熟悉了一些計算不定积分的初等方法。这些方法并不能确切預定計算一个积分时究应走什么途徑，而往往取决于計算者的技巧。在这一段及以下各段我們将細講一些重要的特殊类型的函数并且对其积分建立一种完全确定的計算程序。

現在我們来闡明，在积分上述类型的函数时究竟要注意的是什么，以及按照什么样的原則而把它們特别划分出来。

在 25 段里已經描述过数学分析首先应用到的函数的类别；这就是所謂初等函数及由初等函数有限次算术运算及迭置所表出的函数(未經极限过程)。

在第五章里我們已經看到，所有这种函数都是可微分的并且其导函数仍屬于同一类型。积分的情形就不同了：常常会屬于所說这类型的函数积分后不屬于該类了，也就是說，不能以有限次上述操作用初等函数表出了。屬于这种显然不能表为有限形式的积分的例子有

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x};$$

其他这类例子以后还要举出[169 段及 172 段以下]。所要注意的是，所有这些积分事实上都是存在的①，但它們只能表現为完全新型的函数，而不能化为所謂初等函数。

能以有限形式实現其积分的函数所知道的只有不多几种类型；这些类型我們将細加研究。其中尤其应将有理函数这个重要

① 参閱 156 段对此所說的話。后面 183 段我們还要談到这一点。

类型放在第一位。

165. 简单分数及其积分 既然假分式可以分出整式部分而其积分并无困难，我們只要从事眞分式(分子次数低于分母)的积分就行了。

就中我們在此先細論所謂簡单分式；这就是下列四种类型的分式：

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

$$(k=2, 3, \cdots\cdots) \qquad\qquad (m=2, 3, \cdots\cdots)$$

这里 A, M, N, a, p, q 都是实数；III 及 IV 两型的分式我們假設三項式 x^2+px+q 无实根而

$$q-\frac{p^2}{4}>0.$$

I 及 II 两型分式我們已經会积分[159段, 4)]：

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

至于 III 及 IV 两型分式則其积分用下列置換可以省力。我們由 x^2+px+q 一式里分出一个二項式的完全平方：

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

最后括弧里的式子按假設是正数，可令其等于 a^2，如果取

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

現在我們采取置換

$$x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

于是在Ⅲ型的情形我們有:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

变回 x 并以 a 的原值代入則有:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

对于Ⅳ型由同样的置換得:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.\tag{1}$$

右边的第一个积分容易用置換 $t^2+a^2=u, 2tdt=du$ 来計算:

$$\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{u^{m-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C.\tag{2}$$

右边第二个积分在任意的m之下可以用 163 段 (5) 的遞推公式来計算。然后只剩下在結果中令 $t=\frac{2x+p}{2}$而恢复原变数 x。

到此簡单分式的积分問題完全解决了。

166. 眞分式的积分 如此，簡单分式的积分我們已經会做了。至于任意的眞分式，則其积分要依据下面这个在代数課程里所証明的重要定理：

每个眞分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

都可以分解为有限个簡单分式之和。

这眞分式分解为簡分式問題密切联系着其分母的因子分解問題。大家知道，每个带实系数的多項式都可以分解为 $x-a$ 及 x^2+px+q 型的实因子；在此二次因子假設是沒有实根的，所以不能再分解为一次实因子。把相同的因子（如果有的話）合并在一起，并且为簡单起見假設多項式 $Q(x)$ 的最高次項系数等于 1，如此可以把这多項式的分解式簡略地写成

$$Q(x)=\cdots\cdots(x-a)^k\cdots\cdots(x^2+px+q)^m\cdots\cdots \qquad (3)$$

的形状，这里……k，……，m，……是自然数。

我們注意，如果多項式 Q 的次数是 n，則显然所有指数 k 的总和加上所有指数 m 的总和的两倍就恰恰得出 n：

$$\sum k+2\sum m=n. \qquad (4)$$

在代数里已經証明，对于眞分式分母分解式中每个象 $(x-a)^k$ 这样的因子，恒有这样一組 k 个簡单分式与之相应：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \qquad (5)$$

而对于每个象 $(x^2+px+q)^m$ 这样的因子，恒有这样一組 m 个簡单分式与之相应：

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \qquad (6)$$

这里 A, M, N 等都是数字系数。如此，知道了分解式(3)，則所給分式$\frac{P}{Q}$所要分解成的簡单分式的分母也就知道了。剩下的只是决定分子的問題，也卽决定 A, M, N 等系数的問題。旣然(5)組分式的分子有 k 个系数，而(6)組分式的分子有 $2m$ 个系数，则由(4)式其总数为 n。

要决定上述系数通常采用未定系数法，其法如下。知道了分式$\frac{P}{Q}$的分解式的形式，将它写在等式右边，分子里带着未定系数(用字母表出)。所有簡单分式的公分母显然应該是Q；把它們加起来而得一眞分式①。現在如果将两边的分母Q去掉，則得一个 x 的恒等式，其两边都是 $n-1$ 次的多項式。右边多項式各 x 方幂的系数都是未定系数的一次齐次式；将它們各与多項式P的相应数字系数对等起来，終于得出一組 n 个一次方程，由此定出諸未定系数。旣然預先知道該分式一定能分解为簡单分式，故所說这組方程也一定是可解的，卽不会是矛盾的。

况且，旣然所說这組方程无論其自由項(卽多項式P的系数)如何选擇总是有解的，則其行列式必不等于0。換句話說，这組方程总是有定解的。如此也就順便証明了眞分式分解为簡单分式的分解法是惟一的。

以上所說的現在举例说明如下。

設給了一分式$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. 按一般的定理，它应有这样的分解式：

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

我們来决定其系数 A, B, C, D, E，由这个恒等式出发：

$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$.

对等两边 x 同方幂的系数，我们得一組五个方程

① 有理眞分式之和恒为眞分式。

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & A+B=0, \\
x^3 & -2B+C=0, \\
x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\
x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\
x^0 & A-2C-2E=13,
\end{array}$$

由此解得

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

最后得出

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

剛才所建立的代数事实可直接应用于有理分式的积分。我們在上一段已經看到，簡分式可积分为有限的形式。現在我們对任意的有理分式也同样可以这样說。如果檢閱一遍用以表出多項式及真分式的积分的函数的类别，則可陈述出这个比較确切的結果：

任何有理函数的积分都能以有限的形式用有理函数、对数及反正切表出。

例如，回到剛才那个例子并記得前面所导出的公式(165 段)，我們有：

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

注　簡分式（部分分式）分解法导源于萊卜尼茲。他很輕松地克服了分母里的一次因子，那怕是相应于重根的。在虚根的情形则萊卜尼茲将每个这种根与其共軛根两两結合而得实二次式。但这他不是永远成功的：例如

$$x^4+a^4=(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2).$$

这个分解法他当时就不会，而是后来戴劳所指出的。决定簡分式分子的未定系数法属于約翰・貝努里。

167. 奧斯脫罗格拉德斯基的积分有理部分分出法　奧斯脫罗格拉德斯

基①指出了一种方法，使眞分式的积分大为簡化。这方法能把积分的有理部分以純代数方式分离出来。

我們已經看到（165 段），积分 II 与 IV 型簡分式时，在积分結果中得出有理項。在前一种情形积分立即可以写出：

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C \tag{7}$$

現在我們来确定，积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx \qquad \left(m>1,\quad q-\frac{p^2}{4}>0\right)$$

究竟有怎样的有理部分。

訴諸我們所熟悉的置换 $x+\frac{p}{2}=t$ 而利用等式 (1)、(2) 及 163 段的遞推公式(5)，在此 $n=m-1$。若回复为变数 x 則得

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

这里 M',N' 及 α 表示常数系数，按此公式，将 m 代以 $m-1$，若 $m>2$，則对其中后一积分我們有

$$\int\frac{\alpha dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}=\frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}}+\beta\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

如此遞推，直到右边积分中三項式 x^2+px+q 的指数降至 1 为止。所有逐次分出的有理項都是眞分式。归并起来得結果如下：

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}, \tag{8}$$

这里 $R(x)$ 是一个多項式，其次数低于分母②，而 λ 是一个常数。

設有一不可約眞分式 $\frac{P}{Q}$，并設其分母 Q 分解成簡单因子 [参閱(3)]。于是将此分式的积分表为 (5) 及(6)形式的分式的积分之和。若 k (或 m) 大于 1，則所有分式組(5)[或(6)]的积分除第一个外都可按公式(7) [或(8)] 来变换。把所有这些結果归并起来，終于导出这样一个公式：

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{9}$$

① 米·瓦·奥斯脫罗格拉德斯基院士 (1801—1861) 是俄罗斯一位杰出的数学家和力学家。

② 参閱 166 段底注。

这积分的有理部分$\frac{P_1}{Q_1}$是由上面所分出的有理部分相加而得的；因此它首先是一个眞分式，而其分母有分解式

$$Q_1(x)=\cdots(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$$

至于积分号下的分式$\frac{P_2}{Q_2}$，則它可由 I 及 II 型分式相加而得，如此它也是一个眞分式而

$$Q_2(x)=\cdots(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots.$$

显然［参閱(3)］，$Q=Q_1Q_2$.

公式(9)叫做奥斯脫罗格拉德斯基公式。

經过微分，該公式可变成这个等价的形式：

$$\frac{P}{Q}=\left[\frac{P_1}{Q_1}\right]'+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{10}$$

我們已經知道，如果已知多項式Q的因子分解为式(3)，則多項式Q_1及Q_2就容易找出。但它們不靠这因子分解式也能决定。事实上，旣然导数式Q'包含Q所分解成的全部因子，而指数降一，則Q_1就是Q和Q'的最大公因子，因此可以由这些多項式用輾轉相除之类的方法来决定。如果Q_1已知，則Q_2只要以Q_1除Q卽得。

現在再来决定公式(10)里的分子P_1和P_2。这也用未定系数法。

以n, n_1, n_2各表多項式Q, Q_1, Q_2的次数，而$n_1+n_2=n$；于是多項式P, P_1, P_2的次数将不高于$n-1, n_1-1, n_2-1$。我們把P_1及P_2設成带未定系数的n_1-1次及n_2-1次的多項式；系数的个数总共是n_1+n_2，卽n个。我們把(10)里的微分做出来：

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P}{Q}.$$

現在我們来証明，第一个分式恒可将其分母化为Q，而分子仍保持为整式。卽

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2}=\frac{P_1'Q_2-P_1H}{Q},$$

这里H表示$\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}$。但这个分式可表为整式。事实上，如果Q_1包含$(x-a)^k$而$k\geqslant 1$，則Q_1'包含$(x-a)^{k-1}$，而Q_2包含$x-a$；对$(x^2+px+q)^m (m\geqslant 1)$形式的多項式而言也可作同样的結論。所以分子$H$可被分母整除，而今后$H$可

理解为整多項式(次数为 n_2-1)。

解除公分母 Q,得恒等式

$$P_1'Q_2-P_1H+P_2Q_1=P,$$

其两端为 $n-1$ 次的多項式。于是,同上面一样,要決定所引入的 n 个未定系数我們得一組 n 个一次方程。

既然已經証明,无論 P 如何分解 (10) 总是可能的,則該一次方程組无論常数项(自由項)如何选取总是有解的。由此推知其行列式异于 0 而該方程組必有定解,并且(10)式在所指定分母 Q_1 及 Q_2 之下,其分解法是惟一的①。

例 設要分出积分

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$$

的有理部分。

我們有

$$Q_1=Q_2=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2}=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

由此有

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

对等两边同次項的系数而得一方程組,由此定出未知系数 $a, b, \cdots, f$:

x^5 | $d=0$(在以下方程中 d 已計入,不再明写)

x^4 | $-a+e=4$

x^3 | $-2b+e+f=4$ 　　　 $a=-1,\ \ b=1,$

x^2 | $a-b-3c+e+f=16$ 　　　 $c=-4,\ \ d=0,$

x^1 | $2a-2c+e+f=12$ 　　　 $e=3,\ \ f=3.$

x^0 | $b-c+f=8$

如此,所求积分为

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+$$
$$+3\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\operatorname{arctg}x+C.$$

---

① 参閱 332 頁关于眞分式分解为簡分式的类似的話。

在这个例子里后一积分很容易一下就算出来。在别的例子往往須重新分解为簡分式。但这方法也可与前面的方法結合起来。

§3. 某些根式的积分法

168. $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$[①] **型根式的积分法** 上面我們已講过怎样以有限的形式求有理微分式的积分。以下各种类型微分式的积分主要地就是要找这样的置换 $t=\omega(x)$ (这里 ω 就以初等函数表出)，将被积式化为有理形式。这种方法我們叫做被积式的有理化方法。

作为这种方法的第一个应用实例我們来看这样的积分:

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{1}$$

这里 R 表示双自变数有理函数，m 是自然数，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是常数。

令

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

該积分化为

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt;$$

这里微分式已經有了有理形式，因为 R, φ, φ' 都是有理函数。于是可以按前段的方法算出这个积分，并令 $t=\omega(x)$ 而变回原变数。

可化为(1)型积分的还有这些更一般的积分:

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \cdots\cdots\right)dx,$$

这里所有指数 $r, s, \cdots\cdots$ 都是有理数；只要把这些指数化为同分母 m 而使被积式成为 x 与 $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ 的有理函数就行了。

---

① 今后一律以 R 表示其自变数的有理函数。

例 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}.$

令

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2};$$

于是

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}=\int \frac{-3dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

这里 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

169. 二項式微分的积分法 所謂二項式微分就是

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

这样的式子，这里 a, b 是任意的常数，m, n, p 是有理数。我們来講这种式子积分成有限形式的情形。

这一个特殊情形是很明显的：如果 p 是整数(正、負或零)，則上式成为前段所討論的类型。这就是說，如果以 λ 表示分数 m 与 n 的分母的最小公倍数，則我們在此有 $R(\sqrt[\lambda]{x})dx$ 这样的式子，而其有理化只要采取置换 $t=\sqrt[\lambda]{x}$ 就行了。

現在我們用 $z=x^n$ 来把前面所給的式子予以变換。于是有

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

并且为簡单計令

$$\frac{m+1}{n}-1=q$$

而有

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q dz. \tag{2}$$

如果 q 是整数，則我們又将导至所討論过的那种类型的式子，

事实上，如果以ν表示分数p的分母，则经变换后的式子有$R(z,\sqrt[\nu]{a+bz})$的形式。被积式的有理化可以用

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$$

这个置换来实现。

最后，我们把(2)式第二积分写成这样：

$$\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz.$$

容易看出，在$p+q$为整数时我们也有所讨论过的情形：变换后的式子有$R\left(z,\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$的形式。在所给积分中被积式也可立即由下列置换来有理化：

$$t=\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}.$$

如此，若

$$p,q,p+q$$

诸数中或(同样)

$$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$$

诸数中有一个成整数则两个积分(2)都可表为有限的形式。

这些可积分情形其实牛顿也已经知道。但直到上世纪中叶车贝谢夫才确定这可注意的事实：二项式微分的其余情形是不能积分成有限形式的。

我们来看几个例子：

1) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx.$

这里$m=-\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{4}$，$p=\frac{1}{3}$；既然$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$，则我们有第二种可积情形。注意，$\nu=3$而(按一般法则)令

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\quad x=(t^3-1)^4,\quad dx=12t^2(t^3-1)^3dt,$$

于是

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C,\text{ 等等.}$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$

这回 $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$ 而属第三种可积情形，因为 $\frac{m+1}{n}+p=$ $=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$。这里 $\nu=4$；令

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x},\quad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$

$$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,$$

如此 $\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$ 而

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$$

等等。

170. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$**型根式的积分法・欧拉氏置换法** 现在我們来看另一重要类型的积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.\tag{3}$$

当然，我們假設这二次三项式沒有相等的根，如此其平方根不能以有理式来替代。我们来研究三种置换，叫做*欧拉置换*，由此这里的被积式总可以达成有理化。

*第一种置换*适用于 $a>0$ 的情形。此时設

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x\text{①}.$$

① 也可設 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x$.

把这等式平方起来,(对消两边的 ax^2 项)得 $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, 如此

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt.$$

欧拉置换的巧妙就在,得出一个一次方程来决定 x, 如此 x 以及根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 同时都能以 t 的有理式表出。

如果把所得諸式代入(3),則問題化为求一个 t 的有理函数的积分。最后須令

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x$$

而恢复到变数 x。

第二种置换适用于 $c>0$ 的情形。在这情形可以設

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\text{①}.$$

如果平方起来,两边对消 c 并約去 x, 則得 $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t$, 这又是一个 x 的一次方程。由此有

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}, \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\cdot dt.$$

将此代入(3)式,显然我們就达成被积式的有理化。于是积分以后,而令

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

注 I 上面所考虑的两种情形($a>0$ 及 $c>0$)一种可令 $x=\frac{1}{z}$

① 或設 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$.

而化为另一种。因此总可以避免利用第二种置换。

最后，第三种置换适合于二次三项式 ax^2+bx+c 有(相异)实根 λ 及 μ 的情形。于是这三项式，大家知道，可分解为一次因子

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

我們設

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

平方起来而約去 $x-\lambda$，在此又得出一个一次方程 $a(x-\mu)=$ $=t^2(x-\lambda)$，如此

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$$

等等。

注Ⅱ　在所作假設之下根式 $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ (为确定起見可认为，比方說，$x>\lambda$)可以变为

$$(x-\lambda)\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

的形式，如此在所考慮的情形

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R_1\left(x,\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right),$$

而我們事实上所处理的就是168段里所討論过的那种类型的微分。第三种欧拉置换可写成

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

的形式，这就与在 168 段所已指出的置换一样。

現在我們来证明，单是第一及第三两种欧拉置换已經足够在一切可能情形来实現(3)中被积式的有理化了。事实上，如果三項式 ax^2+bx+c 有实根，則我們已看出可适用第三种置换。如其沒

有实根，即如 $b^2-4ac<0$，則三項式

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

在变数 x 的一切数值之下恒有 a 的符号(正負号)。$a<0$ 的情形我們不感兴趣，因为此时根式完全沒有实数值。在 $a>0$ 的情形則适用第一种置換。

上面这些論証同时也就导出这个一般的結論：(3)型积分总可以取有限的形式，并且表出这种积分所需要的函数，除去用以表出有理微分式积分的函数以外，还只需要二次根式。

例 1) 在 **161** 段 6) 我們事实上应用了第一种置換来計算积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad (\alpha=\pm a^2).$$

虽然第二个基本积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

我們已經会用初等的方法来做，但为了練习起見，我們現在仍用欧拉置換。

(a) 如果先用第三种置換

$$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x),$$

則

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}$$

而

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arc\,tg}t+C=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

既然有恒等式

$$2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\quad(-a<x<a),$$

則这个結果只是在形式上与我們所已知的不同。

讀者今后須估計到积分的結果会因所采用算法不同而得出不同的形式。

(б) 如果对此积分施用第二种置換

$$\sqrt{a^2-x^2}=xt-a,$$

則同样得出

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C.$$

这里我們碰上另一种有趣的情况：这結果各别适合于区間 $(-a,0)$ 及区間 $(0,a)$，而在点 $x=0$

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

失去意义。此式在 $x\to-0$ 及 $x\to+0$ 时极限不同：它們各等于 π 及 $-\pi$；对上述两区間常数 C 各取不同数值，使第二值比第一值大 2π，如此能做成一个在全区間 $(-a,a)$ 上連續的函数，只要在 $x=0$ 时取左右共同极限作函数值就行了。

这回我們还是得出了以前的結果，只是形式不同，因为我們有这个恒等式

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}-\pi, & 0<x<a,\\ \arcsin\dfrac{x}{a}+\pi, & -a<x<0.\end{cases}$$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(a) 先采用第一种置换：$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$,

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C.$$

如果在此令 $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$，则最后得：

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|+C.$$

(б) 現在采用第二种置换：$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$,

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt,\quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C'.$$

剩下在此令 $t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$；經明显的化簡后得：

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+$$

$$+2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C'.$$

这式子虽形式上与前面所得的不同，但在 $C'=C+\frac{3}{2}$ 这关系之下与前式是恒等的。

§4. 含有三角函数及指数函数的式子的积分法

171. 微分式 $R(\sin x,\cos x)dx$ 的积分法 这样形式的微分可以用置换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ (-\pi<x<\pi)$ 来有理化。事实上，

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

而

$$R(\sin x,\cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}.$$

如此，象

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

这种类型的积分恒可积为有限的形式；其表出式，除有理微分式的积分結果中所见的各种函数以外，只还需要三角函数。

上述置换虽普遍适用于 (1) 型积分，但有时引起較复杂的計算。下面将指出一些可以用較簡单置换达成目的的情形。我們先讲一点初等代数的預备知識。

如果一个有理整函数或分式函数 $R(u, v)$ 在其一个自变数，比方說 u，变号时不变其值，即如果

$$R(-u, v)=R(u, v),$$

則它可以化为

$$R(u, v)=R_1(u^2, v)$$

的形式，其中只含 u 的偶数次方幂。

反之，如果函数 $R(u, v)$ 在 u 变号时变值，即如果

$$R(-u, v)=-R(u, v),$$

則它将化为

$$R(u, v)=R_2(u^2, v)\cdot u$$

的形式；这只要把上面的話应用到函数 $\frac{R(u, v)}{u}$ 上立即可以推出。

I. 現在設 $R(u, v)$ 随着 u 一同变号；于是

$$R(\sin x, \cos x)dx=R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx=$$

$$=-R_0(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x,$$

而有理化可由置换 $t=\cos x$ 达成。

II. 同样，如果 $R(u, v)$ 随着 v 一同变号，則

$$R(\sin x, \cos x)dx=R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx=$$

$$=R_0^*(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x,$$

如此这里宜取置换 $t=\sin x$.

Ⅲ. 最后，我們假設函数$R(u,v)$在u和v同时变号时不变其值：

$$R(-u,-v)=R(u,v).$$

在这情形，以$\frac{u}{v}v$替代u将有

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right).$$

按函数R的性质，如果u和v变号（此时比率$\frac{u}{v}$不变），

$$R^*\left(\frac{u}{v},-v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right),$$

于是我們知道

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R_1^*\left(\frac{u}{v},v^2\right).$$

所以

$$R(\sin x,\cos x)=R_1^*(\operatorname{tg}x,\cos^2 x)=R_1^*\left(\operatorname{tg}x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

写簡単一点，即

$$R(\sin x,\cos x)=\tilde{R}(\operatorname{tg}x).$$

这里可以由置换$t=\operatorname{tg}x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$达成目的，因为

$$R(\sin x,\cos x)dx=\tilde{R}(t)\frac{dt}{1+t^2},\cdots\cdots$$

注　应該在此提一下，不論$R(u,v)$是怎样的有理函数，总可表之为三个上述特殊类型的式子之和。例如，可以使

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+$$

$$+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

第一式在u变号时变号，第二式在v变号时变号，第三式則在u与

v 同时变号时不变其値。将 $R(\sin x, \cos x)$ 式分为相应諸项，则可在第一項上施用置换 $t=\cos x$，在第二項上施用置换 $t=\sin x$，在第三項上施用置换 $t=\operatorname{tg} x$。如此，对于(1)型积分的計算这三个置换就够了。

例 1) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$。被积式在 $\cos x$ 代以 $-\cos x$ 时变号。故取置换 $t=\sin x$:

$$\int \sin^2 x\cos^3 x dx=\int t^2(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$。被积式在 $\sin x$ 代以 $-\sin x$ 及 $\cos x$ 代以 $-\cos x$ 时不变其値。于是取置换 $t=\operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt=t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C=$$

$$=\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.$$

3) $\int\frac{dx}{\sin x\cos 2x}=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$。取置换 $t=\cos x$:

$$\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}=\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

4) $\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx$ $(0<r<1,\ -\pi<x<\pi)$。在此我們一律施用置换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$。如此有

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=(1-r^2)\int\frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

下面这样的积分也可化为这个积分:

$$\int\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

172. 其他情形概述 在**163**段我們已提到过，如何积分下列各种形式的式子：

$$P(x)e^{ax}dx,\quad P(x)\sin bxdx,\quad P(x)\cos bxdx.$$

这里P是一个整式。值得注意的是，分式(n为自然数)

$$\frac{e^x}{x^n}dx,\quad \frac{\sin x}{x^n}dx,\quad \frac{\cos x}{x^n}dx$$

就已經不能以有限的形式积分出来了。

用分部积分法容易給这些式子的积分建立起遞推公式并各归結为三种基本情形：

I. $\int\frac{e^x}{x}dx=\int\frac{dy}{\ln y}=\operatorname{li}y$①（"积分对数"）；

II. $\int\frac{\sin x}{x}dx=\operatorname{si}x$（"积分正弦"）；

III. $\int\frac{\cos x}{x}dx=\operatorname{ci}x$（"积分余弦"）②。

我們已經知道[**163**段，4)]这几个积分：

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

依据它們，能以有限形式来求积分

$$\int x^ne^{ax}\sin bxdx,\quad \int x^ne^{ax}\cos bxdx,$$

这里$n=1,2,3,\cdots\cdots$。也就是說，按分部积分法我們得：

$$\int x^ne^{ax}\sin bxdx=x^n\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}-$$

---

① 用置换$x=\ln y$.

② 但三种情形都还該决定其任意常数；这以后要做。

$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx+\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bx dx=x^n\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}-$$

$$-\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx.$$

这两个递推公式可以把我們所要考慮的积分归化为 $n=0$ 的情形。

§5. 椭圓积分

173. 定义 由 170 段所討論的象

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

这样永可积为有限形式的积分，我們自然联想到象

$$\int R(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx, \tag{1}$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx, \tag{2}$$

这种含有三次或四次多項式平方根的积分。这是一类很重要的积分，在实用上常会遇到。但要知道象(1)、(2)这样的积分一般已經不能以有限形式用初等函数表出了。所以我們放在最后一段来講，以免打断本章的主要路綫，旣然本章主要目的是討論各类能表为有限形式的积分。

根号下的多項式假設其有实系数。此外，我們永远認为它沒有重根，因为否則就可以由根号里提出一个一次因子，如此問題就变成前面所討論过的式子的积分，而能以有限形式表出了。最后的情形有时即使沒有重根也可以发生；例如，不难驗証

$$\int\frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}+C,$$

$$\int\frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}dx=x\sqrt{2x^3+1}+C.$$

象(1)及(2)类型的积分一般称为椭圓积分，因为这种积分最初是在解椭圓弧长問題[201 段, 4)]时遭遇到的。但这名称取严格意义时通常只指其中不能表为有限形式的那些积分而言；其他象剛才所举两例則称为伪椭圓积分。

(1)及(2)形式的积分在任意系数 $a, b, c, \cdots$ 之下研究或列表(即做数值表)当然都是相当困难的。因此自然希望把所有这些积分化为少数的典型，使其中所含任意系数(参变数)尽量减少。

174. 化为典式 我們首先指出，一般只要討論根号下是四次多項式的情形就够了，因为三次的情形也很容易化为四次的情形。事实上，带实系数的三次多項式 ax^3+bx^2+cx+d 必須有一实根 [69 段]，比方說，是λ吧，于是可以有这样的实因子分解式

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

置换 $x-\lambda=t^2$ 或 $x-\lambda=-t^2$ 就可实现所要求的变化:

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+\cdots})dx=\int R(t^2+\lambda, t\sqrt{at^4+\cdots})dt.$$

此后我們只来討論(2)型那种含有四次多項式平方根的积分。

用我們在此所不能細講的初等变换及置换，首先每个椭圆积分(2)——除去能表为有限形式的以外——都可化为象

$$\int\frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{3}$$

这样形式的所謂典式积分，这里 k 是一个正的真分数: $0<k<1$。

由有理函数 R 分离出整式部分之后，对于剩下的那个分解成簡分式的真分式終于可以有这样的一般結論: 所有椭圓积分——除能表为有限形式諸項外——都可以用初等置换化为下列三种标准积分:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

及

$$\int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.\qquad (0<k<1),$$

这里最后一个积分中 h 也可以是复数。这些积分經里烏維尔氏指出已不能成有限的形式。勒让德尔[①] 各称之为第一类、第二类、第三类椭圆积分。前两类只含一个参变数 k，而最后一类則除此以外还有一个参变数 h (复数的)。

勒让德尔还利用置换 $z=\sin\varphi\left(\varphi \text{ 由 } 0 \text{ 变至} \frac{\pi}{2}\right)$給这些积分带来了更进一步的化簡。如此第一类积分直接化为

① A. M. Legendre(1752—1833)及 J. Liouville (1809—1882) 都是法国的杰出数学家。

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\tag{4}$$

第二类这样变化:

$$\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

即化为一个前一类的积分及一个新的积分

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.\tag{5}$$

最后,第三类积分在該置换下化为

$$\int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\tag{6}$$

积分(4)、(5)及(6)也叫做勒让德尔式第一类、第二类及第三类橢圓积分。

其中特别重要的并常常用到的是前两种。如果認为这两个积分在 $\varphi=0$ 时等于 0，并由此定出其中任意常数之值，则得到两个完全确定的φ的函数，勒让德尔各表之以 $F(k,\varphi)$ 及 $E(k,\varphi)$。这里除独立变数 φ 外还指出了一个函数式中的参变数 k，叫做模。

勒让德尔給这些函数就种种 φ 及 k 值做出了大本的数值表。其中不仅是可解釋为角的自变数 φ 表成了度数，模 k (它是一个真分数)也看成了某一个角 θ 的正弦，而在表里也就替代模的地位給出了該角的度数。

此外，勒让德尔以及其他学者也深入地研究了这些函数的性質，建立了一系列关于它們的公式等等。因此，勒让德尔函数 F 及 E 在解析及其应用中取得与初等函数同等的地位。

我們目前所学的积分学初等部分固然只限于"有限形式的积分法"，但不要誤認为积分学问题一般也限于此。橢圓积分 F 及 E 正是这样的函数的例子：它們虽不能以有限形式用初等函数表出，但按其积分研究出丰富的結果并且有成功的应用。

第十一章　定积分

§1. 定积分定义及存在条件

175. 解决面积問題的另一途徑　我們回到156段所講过的曲綫梯形面积定义問題(图65)。現在来講这个問題的另一解法[①]。

把曲綫梯形 $ABCD$ 的底边 AB 任意分为若干段而在各分点上一一豎立相应縱坐标綫；如此該形被分成了一系列窄条(見附图)。

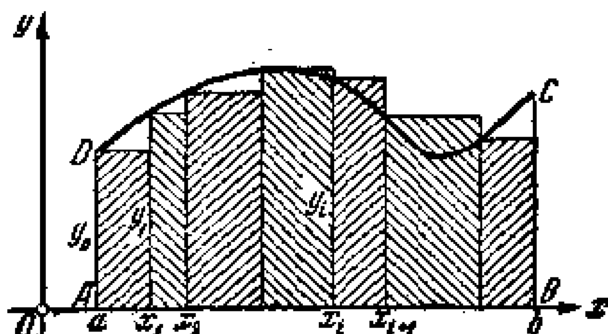


图 65.

現在每一窄条都以一个矩形作其近似代表，这矩形与該条同底，其高則等于該条的縱坐标綫之一，比方說，就取其最左边的縱坐标綫罢。如此，該曲綫梯形就被一个由矩形組成的阶梯样图形所替代。

各分点的横坐标表以

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots\cdots<x_n=b. \qquad (1)$$

第 i 个矩形的底显然等于 $x_{i+1}-x_i(i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-1)$，今后表以 Δx_i。至于其高，則按所說应等于 $y_i=f(x_i)$。所以第 i 个矩形的面积是 $y_i\Delta x_i=f(x_i)\cdot\Delta x_i$。

把所有这些矩形的面积加起来，我們就得出曲綫梯形的面积 P 的近似值：

$$P\doteq\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta x_i \text{ 或 } P\doteq\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i.$$

---

① 在此推广了一个曾一度应用于特例的概念[43段3)]。

这等式的誤差在所有 Δx_i 无限制变小时趨近于零。于是面积 P 的精确值就得出是这个极限:

$$P = \lim \sum y_i \Delta x_i = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i. \tag{2}$$

此时假設所有 Δx_i 之长同时趨近于零。

同此方法可适用于計算图形 $AKLD$(图 63) 的面积 $P(x)$, 只是在此要分段的是区間 AK。我們还再声明一下, 当 $y=f(x)$ 取負值的情形, 也如 **156** 段那样約定把 x 軸下面那部分面积看作是負的。

总和 $\Sigma y\Delta x$ 的表示法(严格地說, 这总和的极限值的表示法)萊卜尼茲也采用 $\int ydx$ 这样的符号, 这里 ydx 理解为該和的代表項, 而 $\int$ 是模写拉丁文 Summa 一字的第一个字母 S。① 既然表示这个极限值的面积同时也就是 $f(x)$ 的原函数, 則原函数也就用同一符号来表示。因此, 如果采用函数表示符号, 則变动面积就写成

$$\int f(x)dx,$$

而与 x 由 a 变至 b 相对应的固定图形 $ABCD$ 的面积, 就写成

$$\int_a^b f(x)dx.$$

为了能自然引出象(2)式那样的总和的极限, 我們利用了面积的直覺概念, 而該极限在历史上也正是連系着面积計算問題产生的。但是面积概念本身还有待严格建立; 并且, 如果对曲綫梯形而言, 也正是要靠上述极限来建立。当然, 我們应該先独立地研究极限(2), 而不联系几何概念。这就是本章所要講的。

象(2)那样的极限在数学分析及其种种应用中占非常重要的地位。并且这里所发展的概念, 将以种种形式在全教程中屡次重

① "积分"(源出拉丁文 integral, 即"整"的意思) 一辞乃萊卜尼茲的学生及同道約翰・伯努里(J. Bernoulli)所提出; 萊卜尼茲本来是說: "ydx 的总和"。

复提到。

176. 定义 設有一函数 $f(x)$ 給定在某一区間 $[a, b]$ 上。我們在 a 与 b 之間插入一些分点(1)，而將該区間任意分为若干段。今后以 λ 表示差数 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i=0, 1, \cdots\cdots, n-1)$ 中之最大者。

在每个分区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 里各取一个任意的点 $x = \xi_i$①。

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \quad (i=0, 1, \cdots\cdots, n-1)$$

而做成总和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

現在我們来建立这个总和的(有限)极限概念:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \tag{3}$$

我們想象把区間 $[a, b]$ 逐次进行分割，先按一种方法来分，然后按第二种方法来分，又按第三种方法来分，如此进行下去。这种分割法的序列，如果其相应序列 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots$ 趋于零，則称为主分割法序列。

等式(3)我們理解为这样的意义：相应于任何主分割法序列的 σ 值序列，不論此时 ξ_i 如何取法，恒趋于一个极限 I。

这里也可以用"ε-δ 言辞"来給該极限的定义。也就是說，如果对每个 $\varepsilon > 0$ 恒能找到这样一个 $\delta > 0$，使得不論 ξ 如何取法，在 $\lambda < \delta$ 时(即在主分割法中 $\Delta x_i < \delta$)恒有

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

則称总和 σ 在 $\lambda \to 0$ 时有一极限 I。

这两个定义的等价性可以用与 **33** 段中相同的想法来証明。第一个用"序列言辞"的定义可以把极限論基本概念及命題也搬到这种新型极限上来。

---

① 前面我們曾一律取最小值 x_i 作 ξ_i。

总和 σ 在 $\lambda\to 0$ 时的有限极限 I 就叫做函数 $f(x)$ 在由 a 至 b 这区間里的定积分，并表之以符号①)

$$I=\int_a^b f(x)\,dx; \tag{4}$$

如果这样的极限存在，则函数 $f(x)$ 称为在区間 $[a, b]$ 里可积分的。

a 与 b 二数各称为积分的下限与上限。在上下限均为常数时定积分也就是一个常数。

这个一般的定义属于黎曼，他最先以一般形式陈述出来并研究了其应用范圍。总和 σ 本身有时也就被称为黎曼和，虽然这样的和的极限早經哥西明白采用于連續函数的情形。我們为了强調其与积分的关系宁称之为积分和。

現在我們来闡明这个問題：在什么条件之下积分和 σ 有有限的极限，也就是說，在什么条件之下定积分(4)存在。

首先我們要注意，上述定义其实只能适用于有界的函数。事实上，如果一个函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 內是无界的，则在任何分割法之下总至少有一个分区間里該函数保持无界这个性质。于是在这分区間里凭 ξ 的选擇总可以使 $f(\xi)$ 連同总和 σ 大到任何所要的程度；在这情形之下显然 σ 的有限极限是不能存在的。所以，可积分的函数必須是有界的。

因此以后我們一律予先假設所研究的函数 $f(x)$ 是有界的：

如果 $a\leqslant x\leqslant b$ 则 $m\leqslant f(x)\leqslant M$。

177. 达布和 作为一种輔助的研究工具，我們除积分和以外

---

① 这个定积分写法是法国数学家和物理学家傅立叶(J. B. J. Fourier 1768—1830)所創拟的。欧拉(Euler)的写法则比較繁瑣：

$$\int P\,dx\left[\begin{array}{l}\text{由 } x=a\\ \text{至 } x=b\end{array}\right]。$$

还来考虑象达布[①]和以及其他类似而較簡单的和。

我們以 m_i 及 M_i 各表示函数 $f(x)$ 在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的下确界及上确界并且做成总和

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i;\quad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

这两个和就各称为下(积分)和及上(积分)和，或达布和。

在特例，当 $f(x)$ 連續时，这些和就直接是相应于任一分割法的积分和的最小者及最大者，因为在这情形函数 $f(x)$ 在每一区間里都达到其上下确界，而点 ξ_i 可以(按要求)取得使

$$f(\xi_i)=m_i \text{ 或 } f(\xi_i)=M_i。$$

轉到一般情形，由上下界定义本身我們有

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i.$$

将这些不等式逐項各乘以 Δx_i(Δx_i 是正数)并依 i 求其总和，我們得到

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

在固定的分割法之下总和 s 及 S 都成常数，而此时总和 σ 则仍保持为变数，因为 ξ_i 是任意的数。但容易看出，凭 ξ_i 的选擇，$f(\xi_i)$ 的值可使随意接近于 m_i，也可随意接近于 M_i，这就是說，总和 σ 可使随意接近于 s 或 S。于是上面的不等式导至下面这句已經很一般的話：在給定的分割法之下，达布氏总和 s 及 S 各可作为积分和的下确界及上确界。

达布氏总和具有下列簡单性质：

第一性质　如果在一組現有的分点上添加一些新的点子，則达布氏下和只能因此有增无减，其上和只能有减无增。

証明　要証明这个性质，只要在現有分点中再添加一个分点

---

① 达布(G. Darboux 1842—1917)是一位法国数学家。

x' 就够了。

設此点落在 x_k 与 x_{k+1} 之間:

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

如果以 S' 表示新的上和，則它与旧和 S 的差别只在这里：旧和 S 中相应于区間$[x_k, x_{k+1}]$的是

$$M_k(x_{k+1}-x_k)$$

这一項，而在新和 S' 中則相应于該区間的有两項

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x'),$$

这里 $\overline{M}_k$ 及 $\overline{\overline{M}}_k$ 各为函数 $f(x)$在区間$[x_k, x']$及$[x', x_{k+1}]$中的上确界。旣然这两个区間都是区間$[x_k, x_{k+1}]$的一部分，則

$$\overline{M}_k \leqslant M_k, \quad \overline{\overline{M}}_k \leqslant M_k,$$

从而

$$\overline{M}_k(x'-x_k) \leqslant M_k(x'-x_k), \quad \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x_{k+1}-x').$$

把这两个不等式两边加起来，得

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x_{k+1}-x_k).$$

由此就推出，$S' \leqslant S$。对于下和証明法与此相似。

第二性質 每个达布氏下和，无論其相应于怎样的分割法，都不大于每个上和。

証明 我們把区間 $[a, b]$ 任意分为一組分区間并对此分割法做出相应的达布氏和

$$s_1 \text{ 及 } S_1. \tag{I}$$

現在我們考虑区間 $[a, b]$ 的另一个与前面那个毫无联系的分割法。它也有其一个相应的达布氏和

$$s_2 \text{ 及 } S_2. \tag{II}$$

要来証明，$s_1 \leqslant S_2$。为此我們把两个分割法的分点合并在一起；于是得出第三个輔助的分割法，它相应于达布氏和

$$s_3 \text{ 及 } S_3. \tag{III}$$

这第三个分割法是由第一个添加新分点得出的；所以，根据所証明达布氏和的第一性質我們有

$$s_1 \leqslant s_3.$$

現在对比第二与第三分割法可同样得出結論：

$$S_3 \leqslant S_2.$$

但 $s_3 \leqslant S_3$，所以由剛才得到的不等式从而有

$$s_1 \leqslant S_2,$$

这就是所要証明的。

由所証明的推知，全体下和的集合$\{s\}$是上方有界的，例如任何上和 S 就是它的一个上界。在这种情形(參閱第 6 段)該集合有一个上确界

$$I_* = \sup\{s\}$$

并且不論对哪个上和 S 恒有

$$I_* \leqslant S,$$

如此，上和的集合既然下方被 I_* 一数所界，则它有一个下确界

$$I^* = \inf\{S\},$$

而显然

$$I_* \leqslant I^*.$$

总之，对任何达布下和及上和我們恒有

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S. \tag{5}$$

178. 积分存在条件 有了达布氏和的帮助，我們現在就容易陈述这个条件了。

定理 要定积分存在，必要且充分条件是

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0. \tag{6}$$

176 段所說的足以闡明这个极限的意义。例如，用"ε-δ 言辞"来說，条件(6)就表示，对任何 $\varepsilon > 0$ 恒可找到一个这样的 $\delta > 0$，使得在 $\lambda < \delta$ 时(即将区間分为长度 $\Delta x_i < \delta$ 的部分时)恒成立不等式

$$S-s<\varepsilon.$$

证明　必要性　我們假設积分(4)存在。于是依据任何給定的 $\varepsilon>0$ 来找一个这样的 $\delta>0$，只要所有 $\Delta x_i<\delta$，馬上就有

$$|\sigma-I|<\varepsilon \text{ 或 } I-\varepsilon<\sigma<I+\varepsilon,$$

不論 ξ_i 在相应分区間内怎样取法。但我們已經証明，总和 s 及 S 在給定的分割法之下各为积分和之下确界及上确界；所以我們有

$$I-\varepsilon\leqslant s\leqslant S\leqslant I+\varepsilon,$$

如此

$$\lim_{\lambda\to 0} s=I,\quad \lim_{\lambda\to 0} S=I, \tag{7}$$

由此从而有(6)。

充分性　我們假設条件(6)已实現；于是由(5)显然有 $I_*=I^*$，并且如果以 I 表其共同値則

$$s\leqslant I\leqslant S. \tag{5*}$$

如果 σ 理解为与 s 及 S 相应于同一分割法的积分和值之一，則我們知道有

$$s\leqslant\sigma\leqslant S.$$

按条件(6)，如令所有 Δx_i 充分地小，則 s 与 S 之差将小于任意取定的 $\varepsilon>0$。但在这情形这話对于介乎它們之間的数 σ 及 I 也是成立的：

$$|\sigma-I|<\varepsilon,$$

如此 I 是 σ 的极限，也即为定积分。

如果 ω_i 表示函数在第 i 分区間里的摆幅 M_i-m_i，則我們将有

$$S-s=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i,$$

而定积分存在条件可写成这样：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0. \tag{8}$$

这也就是通常所应用的形式。

179. 可积函数类别 应用所求得的检驗法，我們可以来确定几类可积分的函数。

I. 若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中連續，則該函数必可积分。

证明 既然函数 $f(x)$ 連續，則根据康托尔定理的推論[**75 段**]对任何給定的 $\varepsilon>0$ 总可以找到这样一个 $\delta>0$，使得在区間 $[a, b]$ 分为长度 $\Delta x_i<\delta$ 的小区間时，所以 $\omega_i<\varepsilon$。
由此有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=\varepsilon(b-a).$$

既然 $b-a$ 是常数而 ε 可任意地小，則条件(8)已实現，故积分存在。所证明的这句話还可稍加推广如下。

II. 一个在 $[a, b]$ 中有界的函数 $f(x)$ 若只有有限个断点，則必可积分。

证明 我們不妨限于 a 与 b 間只含一个断点 x' 的情形(图66)。取任一 $\varepsilon>0$。以邻域 $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ 将点 x' 圍起来。在其余两

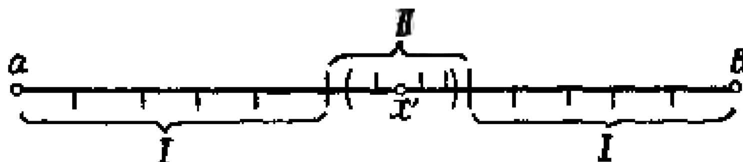


图 66.

閉区間里函数 $f(x)$ 就成連續的了，而我們可在每个里面各别应用康托尔定理的推論。依 ε 所得到的两个 δ 中我們取其較小的一个(不妨也就以 δ 表之)。于是它将同时适用于上述两个区間。我們当然不妨取 $\delta<\varepsilon$。于是将区間 $[a, b]$ 任意分为小区間，而使其长 Δx_i 全都小于 δ。所得分区間将成这样两类:

Ⅰ）整个区間都落在所分出的断点邻域之外。在这种区間里函数的摆幅 $\omega_i<\varepsilon$;

Ⅱ）整个区間都落在所分出邻域之内，或一部分进入該邻域。

既然函数 $f(x)$ 假設是有界的，則在任何分区間里其摆幅不会超过全区間 $[a,b]$ 中的摆幅 Ω。

我們将总和

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

分为两个:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \text{及} \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

每个各伸展在第一类及第二类区間上。

对于第一个和，也如在前定理中一样，我們将有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b-a).$$

至于第二个和，則我們注意第二类完全落在該邻域內的区間之长在总和中小于或等于 2ε; 部分进入該邻域的区間則至多只有两个，而其长度之和小于 2δ，也即远小于 2ε。所以，

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 4\varepsilon.$$

如此，我們終于在 $\Delta x_i < \delta$ 之下有:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon[(b-a)+4\Omega].$$

既然方括号內是个常数而 ε 可任意地小，这就证明了我們的命題。

最后我們指出一类简单的可积函数，未包含在前两类之內。

Ⅲ. 任何单調函数 $f(x)$ 必可积分。

证明　設 $f(x)$ 是一个单調增函数。于是它在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的摆幅为

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

給定任一 $\varepsilon > 0$ 而令

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

只要 $\Delta x_i < \delta$，我們就有

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

由此可見該函数是可积分的。

注　可积函数在有限个点（k 个点）上的函数值变化不影响积分的存在，也不影响积分的值。

旣然这种变化至多只牽涉到总和 $\sum \omega_i \Delta x_i$ 的 k 項，則在 $\lambda \to 0$ 时該和将仍然趋于 0。至于积分之值，則对于原来的函数及变化后的函数我們选擇点 ξ_i 时，总可避开那些函数值不同之点。

§2. 定积分性質

180. 依有向区間的积分　以前我們說"在由 a 至 b 区間上的定积分"时总指的是 $a < b$ 的情形。現在我們来消除这个限制。

因此我們先来建立有向区間的概念。所謂有向区間 $[a, b]$（这里可以 $a < b$ 也可以 $a > b$）我們指的是各滿足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ 或 } a \geqslant x \geqslant b$$

的 x 値的集合，而次序是由 a 至 b，即在 $a < b$ 时取增序或 $a > b$ 时取减序。如此区間 $[a, b]$ 与 $[b, a]$ 我們看作是有区別的：成分相同（看作数的集合）而方向有別。

在 **176** 段里所給的积分定义可以說只对有向区間 $[a, b]$ 在 $a < b$ 的情形而言。

現在我們来考慮在 $a > b$ 这假設之下有向区間 $[a, b]$ 上的积分定义。在这情形仍可重复尋常的区間分割手續而依 a 至 b 的方向插入分点：

$$x_0=a>x_1>x_2>\cdots\cdots>x_i>x_{i+1}>\cdots\cdots>x_n=b.$$

在每个分区間$[x_i, x_{i+1}]$里各取一点ξ_i,使$x_i\geqslant\xi_i\geqslant x_{i+1}$,而做成积分和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

这里这回所有$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i<0$。最后,这个和的极限导至这个积分的概念

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

如果对区間$[a,b]$和$[b,a]$(这里$a\gtrless b$)取相同的分点及相同的ξ点,則其相应积分和将只差一个正負号。由此取极限而得这样的命題:

1° 如果$f(x)$在区間$[a,b]$里可积分,則它在区間$[b,a]$里也可积分而

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

但是,这个等式也就可以取作$a>b$时积分$\int_a^b$的定义,只要此时积分$\int_b^a$存在。

我們还指出,作为定义設

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

181. 可用等式表出的性質 我們再列举一些可用等式表出的

定积分性質①。

2° 設 $f(x)$ 在$[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$②諸区間最大的一个里可积分，則它在其余两个区間里也就可积分，并成立等式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

不論 a, b, c 三点的相互位置如何。

証明　我們不妨先假設 $a<c<b$ 而函数在区間 $[a,b]$ 里可积分。

我們考慮区間$[a,b]$的一种分割法而点 c 看作其中分点之一。于是我們首先有

$$\sum_a^b \omega\Delta x=\sum_a^c \omega\Delta x+\sum_c^b \omega\Delta x③,$$

并且——有鉴于所有的項都是正的——由左边的和趋于 0 从而右边的和也趋于 0，如此函数 $f(x)$ 在区間$[a,c]$及$[c,b]$里的可积分性就証明了。現在显然

$$\sum_a^b f(\xi)\Delta x=\sum_a^c f(\xi)\Delta x+\sum_c^b f(\xi)\Delta x.$$

取 $\lambda\to 0$ 时的极限，我們就得出所要求的等式。

点a, b, c的其他布列情形都可化为这种情形。例如，設$b<a<c$而函数 $f(x)$ 在区間 $[c,b]$ 里可积分或(按 1° 这是一样的)在区間$[b,c]$里可积分。在这情形根据所証明的我們将有

---

① 今后(如无特别声明)凡积分 $\int_a^b$ 均认为可能有 $a<b$ 及 $a>b$ 两种情形。

② 这假設也可代之以"函数 $f(x)$ 在两个較小的区間里都可积分"。这时依它在較大的一个区間里也就可积分。

③ 这表示法的意义不待解釋当可自明。

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

由此将第一第二积分移至等式另一边而(根据性質1°)对調积分限卽仍化为前面那个关系式。

3° 如果函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 里可积分，則 $k \cdot f(x)$ 也在此区間里可积分，而

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

4° 如果 $f(x)$ 及 $g(x)$ 同在区間$[a, b]$内可积分，則$f(x) \pm g(x)$也在此区間內可积分，而

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

这两条性質的証明法相似，都只要在积分和里取极限就行了。例如我們来証明后一条。

将区間 $[a, b]$ 任意分为若干小区間并做出所有三个积分的积分和，此时点 ξ_i 在每个分区間里都是任意选取的，但对所有三个积分和都采取同一套 ξ_i；于是我們有

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\Delta x_i.$$

現在設 $\lambda \to 0$；旣然对右边两个和极限存在，則对左边的和极限也存在，这就証明了 $f(x) \pm g(x)$ 是可积分的。在該等式中取极限，就导出所要求的关系式。

182. 可用不等式表出的性質 至今为止我們考慮的都是可用等式表出的积分性質；現在来考慮用不等式表出的性質。

5° 如果函数 $f(x)$在区間$[a, b]$內可积分，并且无負值而 $a<b$，則

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

証明是明显不待言的。

由此(及 4°)可得出簡單的推論:

6° 如果两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内可积分,并且恒有 $f(x) \leqslant g(x)$,則在假設 $a<b$ 之下也有

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

只要应用前一性質于 $g(x)-f(x)$ 就行了。

7° 設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内可积分且 $a<b$;于是函数 $|f(x)|$ 在此区間内也可积分并且有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

我們首先来証明 $|f(x)|$ 的积分是存在的。如果在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 里取任意两点 x' 及 x'',則[第 8 段]

$$||f(x'')|-|f(x')|| \leqslant |f(x'')-f(x')|.$$

所以,如果用 ω_i^* 表示函数 $|f(x)|$ 在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的摆幅,則按摆幅的定义[第 73 段]我們将有 $\omega_i^* \leqslant \omega_i$,如此

$$0 \leqslant \sum \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i,$$ ①

而右边的和趋于 0 时左边的也就跟着趋于 0。

所要証明的不等式就容易这样得出:只要由积分和

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i)|\Delta x_i$$ ②

① 既然 $a<b$,則所有 $\Delta x_i>0$。

② 同上。

出发而令趋于极限就行了。

8° 如果 $f(x)$ 在区間$[a,b]$$(a<b)$内可积分，并且在这整个区間内成立不等式

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

則

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

可应用性質 6° 于函数 m, $f(x)$ 及 M，但更簡单是直接用这个明显的不等式

$$m\sum\Delta x_i\leqslant\sum f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant M\sum\Delta x_i$$

而令趋于极限。

所証明的不等式也可賦以适当的*等式*形式，同时还可免除 $a<b$ 的限制。

9° **中値定理** 設 $f(x)$ 在$[a,b]$$(a\lessgtr b)$内可积分并設在此全区間內 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，則

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a),$$

这里 $m\leqslant\mu\leqslant M$。

証明 如果 $a<b$，則按性質 8° 我們有

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

令

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\mu$$

即得所求等式。

对 $a>b$ 的情形我們可对 $\int_b^a$ 进行同样的演証，然后取极限而导至前面的公式。

剛才所証明的公式当函数 $f(x)$ 連續时可成特别簡單的形式。事实上，如果把 m 及 M 看作是該函数按維尔斯脫拉斯定理［第73段］所实現的最小值及最大值，则按波尔查諾-哥西定理［第70段］，函数 $f(x)$ 应在区間 $[a, b]$ 内某一点 c 上取得中間值 μ。如此

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c),$$

这里 c 屬于 $[a, b]$。

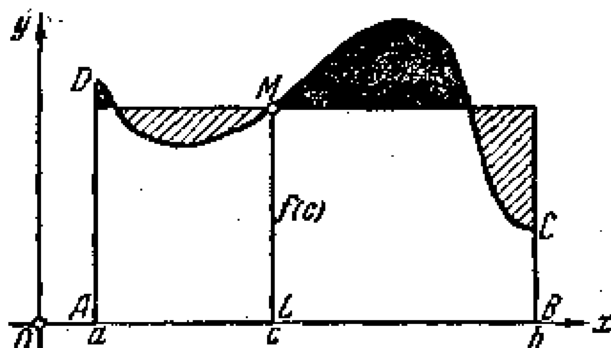


图 67.

这个公式的几何意义是明显的。設 $f(x)\geqslant 0$。我們来看曲綫 $y=f(x)$ 下的曲綫图形 $ABCD$（图 67）。此时曲綫图形的面积（可用定积分表出）等于这样一个矩形的面积，这矩形与曲綫图形同底而以某一中間縱标綫 LM 为高。

10° 中值定理的推广 設 1) $g(x)$ 及乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内可积分；2) $m\leqslant f(x)\leqslant M$；3) $g(x)$ 在全区間里不变正負号：$g(x)\geqslant 0\,[g(x)\leqslant 0]$。于是

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$

这里 $m\leqslant\mu\leqslant M$。

証明　先設 $g(x)\geqslant 0$ 并且 $a<b$；于是我們有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

由这不等式，我們根据性质 6° 及 3° 得到

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

由关于函数 $g(x)$ 的假設及性质 5° 我们有

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0.$$

如果这个积分等于 0，則由前面的不等式显然同时也有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

而本定理显然成立。如果該积分大于 0，則用它遍除上面所得的双重不等式而令

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu,$$

如此导至所求結果。

其实 $a<b$ 及 $g(x)\geqslant 0$ 这限制并不需要：对换积分限或改变 $g(x)$ 的正負号并不破坏等式。

如果 $f(x)$ 連續，則这个公式可以写成这样：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx,$$

这里 c 属于 $[a, b]$。

注　我們經常用字母 x 表示积分变量；但是，如果我們用任何别的字母替代 x，只要保持积分限 a 和 b 及被积函数 f，当然还是沒有影响。符号 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b f(t)dt$ 或 $\int_a^b f(z)dz$ 等等都表示同一个数。这个明显的箋注我們馬上就要用到。

183. 定积分作为上限的函数　如果函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ $(a\gtrless b)$ 內可积分，則[181 段 2°]它在区間 $[a, x]$ 內也可积分，这里

x 是$[a,b]$中的任一个值。以变量 x 替代定积分上限 b 我們得到

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\text{①} \tag{1}$$

它显然是 x 的函数。这函数具有下列性質:

11° 如果函数 $f(x)$在$[a,b]$内可积分，則 $\Phi(x)$ 在該区間内为 x 的連續函数。

証明 賦 x 以任一增量 $\Delta x=h$，只要 $x+h$ 不越出所考慮的区間之外，如此我們得到函数(1)的一个新值

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x+\int_x^{x+h}$$

[参閱 2°]而

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

对这个积分应用中値定理 9°:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h; \tag{2}$$

这里 μ 介乎函数 $f(x)$在区間$[x,x+h]$内的确界 m' 与 M' 之間，所以更不成問題也介乎它在区間$[a,b]$内的(常数)下界 m 与上界 M 之間②。

現在如果計 h 趋于 0，則显然

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0 \text{ 或 } \Phi(x+h)\to\Phi(x),$$

这就証明了函数 $\Phi(x)$是連續的。

12° 如果函数 $f(t)$ 在点 $t=x$ 連續，則在此点函数 $\Phi(x)$有导数，等于

---

① 我們在此以 t 表示积分变数，是为了避免与上限相混。

② 要記得可积分函数是有界的[第 176 段]。

$$\Phi'(x)=f(x)^{①}.$$

証明 事实上，由(2)我們有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu,\ 这里\ m'\leqslant\mu\leqslant M'.$$

但旣然函数 $f(t)$在 $t=x$ 时連續，則对任一 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$，使$|h|<\delta$ 时对区間$[x, x+h]$内一切 t 值恒有

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon.$$

在这情形，也成立不等式[6]

$$f(x)-\varepsilon\leqslant m'\leqslant M'\leqslant f(x)+\varepsilon,$$

如此也就有

$$f(x)-\varepsilon\leqslant\mu\leqslant f(x)+\varepsilon\ 或\ |\mu-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

現在显然

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\mu=f(x),$$

这就是所求証的。

我們得出了一个具有重大原則性及实用意义的結論。如果假設函数 $f(x)$在全区間$[a, b]$內連續，則它必可积分[179 段，I]并且前面的論断可适用于这区間的任何一点 x 上：积分(1)对上限 x 的导数处处都等于被积函数在該点上的函数值 $f(x)$。

換句話說，在区間$[a, b]$里連續的函数 $f(x)$ 总是有原函数的；它的一个例子就是具变上限的定积分(1)。

如此，我們終于建立了那个在 156 段已提到过的命題。

特別是，我們現在能把勒讓德尔函数F及E[174]写成定积分的形式：

① 这个重要命題——对在全区間內連續的函数——最先經哥西氏严密証明(1823 年)。

如果回忆一下定积分的面积几何解釋[175 段]，則定理 12° 可与所謂牛頓与萊卜尼茲定理等同[156 段]。

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

按剛才所証明的，这就各为函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

的原函数并且在 $\varphi=0$ 时等于 0。

注 本段所証明的論断容易推广到下限是变数的情形，因为由 1° 有

$$\int_x^b f(t)\,dt=-\int_b^x f(t)\,dt.$$

这个积分对 x 的导数显然等于 $-f(x)$，只要 x 是連續点。

§3. 定积分的計算及变换

184. 用积分和的計算 我們举例按定积分定义直接由积分和来計算定积分。預先知道連續函数的积分是存在的，于是我們可以专为便利着想来选擇分割法和点 ξ。

1) $\int_a^b \sin x\,dx$. 把区間 $[a,b]$ 分为相等的 n 段而設 $h=\frac{b-a}{n}$; 函数 $\sin x$ 的值在 $a<b$ 时我們算它在每分区間的右端之值，$a>b$ 时則算它在左端之值。于是

$$\sigma_n=h\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih).$$

我們来給右边的和找一个簡单的表出式。以 $2\sin\frac{h}{2}$ 乘除之，然后将每項都表为余弦之差，如此不难得出：

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}h\right)-\cos\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}h\right)\right]=$$

$$=\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}},\tag{1}$$

如此

$$\sigma_n=\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right].$$

既然 $n\to\infty$ 时 $h\to 0$，则

$$\int_a^b \sin x dx=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]=\cos a-\cos b.$$

2) $\int_a^b x^{\mu}dx$ ($b>a>0$, μ 为任意实数)。

这回我們把区間$[a,b]$分为不相等的部分，即在 a 与 b 之間插入 $n-1$ 个几何中項。換句話說，設

$$q=q_n=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

而来考虑这个几何級数

$$a, aq, \cdots, aq^i, \cdots, aq^n=b.$$

我們注意，在 $n\to\infty$ 时公比 $q=q_n\to 1$，差数 $aq^{i+1}-aq^i$ 則小于 $b(q-1)\to 0$.

就左端算出函数值，如此我們有

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{\mu}(aq^{i+1}-aq^i)=a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^{\mu+1})^i.$$

先假設 $\mu\neq -1$；于是

$$\sigma_n=a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1}=(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1},$$

并且利用已知的极限［65 段，3］，我们得出

$$\int_a^b x^\mu dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

在 $\mu=-1$ 的情形则

$$\sigma_n = n(q_n-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right),$$

并且根据另一已知结果[65 段, 2)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right) = \ln b - \ln a.$$

185. 积分学基本公式 我们在 **183** 段已经看到，对于在区间 $[a, b]$ 里连续的函数 $f(x)$，积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是它的一个原函数。如果 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个任意的原函数[例如用前章 §1—4 的方法所找到的]，则[**155** 段]

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

常数 C 只要在此让 $x=a$ 就容易定出，因为 $\Phi(a)=0$; 我们有

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \text{由此得 } C = -F(a).$$

终于得出

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

特例，在 $x=b$ 时我们得到

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{A}$$

这就是所谓积分学基本公式[①]。

如此，定积分之值可表为任一原函数在 $x=b$ 及 $x=a$ 时两值之差。

---

① 这里的演证完全与 156 段计算函数 $P(x)$ 及面积 P 时所用的相似。公式(A)本身也就容易由对比 153 段及 175 段的结果而得出。

公式(A)給我們一种有效的方法来計算連續函数 $f(x)$ 的定积分。要知道对于許多类这种簡单函数我們会将其原函数以有限形式用初等函数表出。在这些情形定积分就可直接用該基本公式算出。公式右边之差通常也以符号 $F(x)\Big|_a^b$ 来表示(所謂"由 a 至 b 的二次代入")而該公式可写成这样:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{A*}$$

例如,这样我們立即可以找出:

1) $\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$

2) $\int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$

3) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a>0, b>0).$

这些結果在前一段里是很費点力气才得出来的。

186. 定积分中变数替换公式 基本公式(A)还能給我們建立定积分号下变数替换的法則。

設要計算积分 $\int_a^b f(x)dx$, 这里 $f(x)$ 是在区間 $[a, b]$ 内連續的。

令 $x=\varphi(t)$, 这函数 $\varphi(t)$ 具备下列条件:

1) 函数 $\varphi(t)$ 在某一区間 $[\alpha, \beta]$ 内有定义且連續,而其值当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 内变化时恒不越出区間 $[a, b]$[①]的范圍;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

---

① 函数 $f(x)$ 有时可以在較 $[a, b]$ 大的区間 $[A, B]$ 里有定义并連續,在这时候只要 $\varphi(t)$ 的值不越出区間 $[A, B]$ 的范圍就行了。

3) 在区間$[\alpha,\beta]$有一連續导函数$\varphi'(t)$。

于是成立公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

由于被积函数假設是連續的，不但这些定积分存在，同时其相应不定积分也存在，并且在两情形都可以用基本公式。但如果$F(x)$是微分$f(x)dx$的原函数之一，則函数$\Phi(t)=F(\varphi(t))$，我們知道，就是微分$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$的原函数[参閱160段]。所以我們同时有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

及

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=$$

$$=F(b)-F(a),$$

由此得出所求証的等式。

注　我們指出公式(2)的一个重要特点。在用变数替換法計算不定积分时，得出所求的函数是以变数t表出的，我們还須还原为旧变数x，而在这里就不必这样了。如果定积分(2)中第二个(它是一个数)已經算出，則同时第一个也就算出来了。

例　1) 用置換$x=a\sin t$求积分$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$；$\alpha$与$\beta$在这里就是0与$\frac{\pi}{2}$。我們有

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

[参閱 160 段]。

2) 我們来看积分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

最后一积分由置換 $x=\pi-t$ $\left(t \text{ 由 } \frac{\pi}{2} \text{ 变至 } 0\right)$化为

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

并表为这样两积分之差的形式:

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

代入化簡后得:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

187. 定积分的分部积分法 我們在 162 段有了一个分部积分的公式

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du, \tag{3}$$

这里假設以 x 为自变数的函数 u, v 以及其导函数 u', v' 都是在所考慮区間$[a, b]$里連續的。現在我們利用同一基本公式(A)把公式(3)变为定积分中的类似公式,借可将一个定积分的計算化为另一个(一般較为簡單的)定积分的計算。

以 $\varphi(x)$表示公式(3)中后一个积分。于是按公式(A)有

$$\int_a^b u\,dv=[uv-\varphi(x)]\Big|_a^b=uv\Big|_a^b-\varphi(x)\Big|_a^b.$$

旣然由(A)同时也有

$$\int_a^b v du = \varphi(x)\Big|_a^b,$$

則我們終于得出这个公式:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{4}$$

这个表示数之間关系的公式(4)原則上要比里面有函数的公式(3)簡单些;它在二次代入等于0时尤为便利。

例 計算积分

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx, \quad J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx,$$

这里m是自然数。

分部积分,得

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

二次代入化为零。以$1-\sin^2 x$代$\cos^2 x$,得

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

由此导出这个递推公式:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

它把积分J_m逐步归結到J_0或J_1。即,在$m=2n$时我們有:

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$m=2n+1$时則

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}.$$

和J'_m也可得出完全相同的結果①。

---

① 用置換$x=\frac{\pi}{2}-t$可將J'_m化为J_m。

为了将所得諸式写得簡单一点，我們建議一个符号 $m!!$，它表示不超过 m 的自然数的"二进阶乘"(例如，$6!!=2\cdot4\cdot6$，而 $7!!=1\cdot3\cdot5\cdot7$)。于是可写

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x dx=\begin{cases}\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \text{此时} m \text{为偶数}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, \text{此时} m \text{为奇数}\end{cases} \quad (5)$$

188. 瓦里斯公式 由公式(5)容易推出著名的瓦里斯公式，它于1655年在其"无穷算术"中刊布。

設 $0<x<\frac{\pi}{2}$，我們有不等式

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

将此不等式由 0 至 $\frac{\pi}{2}$ 积分起来：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx.$$

由此按(5)得

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

或

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

旣然两端二式之差

$$\frac{1}{(2n+1)2n}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

显然，在 $n\to\infty$ 时趋于 0，则 $\frac{\pi}{2}$ 为其共同极限。如此，

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$$

或

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

这就是瓦里斯公式①。它具历史兴趣，第一个将 π 表为容易計算的有理式极

---

① 原来的公式是对 $\frac{4}{\pi}$ 給出的。

限的形式。在理論的研究上我們至今仍用到它。但对 π 值的近似計算現在已有快速得多的方法。

§ 4. 积分的近似計算

189. 梯形公式 設要計算定积分 $\int_a^b f(x)dx$，这里 $f(x)$ 是一个給定在区間 $[a, b]$ 里的連續函数。在 §3 我們借助原函数按公式 (A) 很輕便地計算过这类积分。但原函数只有在少数类型的函数是能表为有限形式的；此外通常就只好訴諸种种近似計算法了。这些方法将积分近似地用被积函数在一系列自变数値上的函数値表出。在簡单的情形要得出这种近似表出式可以借助几何想法較为省力；既然定积分可解釋为曲綫 $y=f(x)$ 所包的"曲綫梯形" $ABCD$ (图 68) 的面积[**175** 段]，我們的問題就化为这种面积的近似計算。

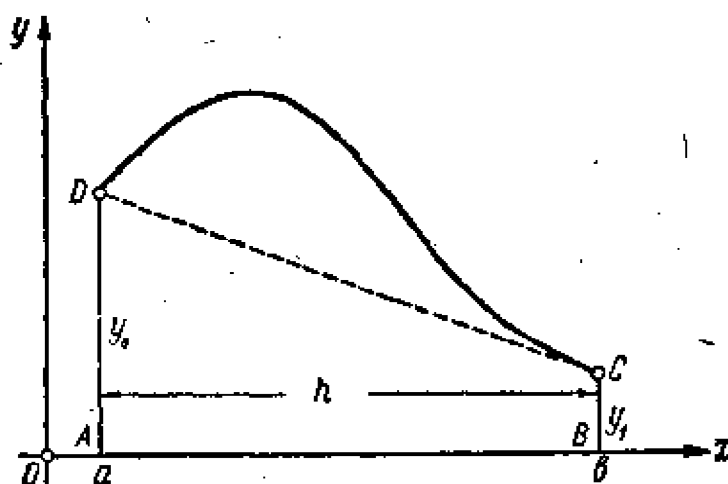


图 68.

首先是，我們自然想到把曲綫弧 CD 以其弦来替代，而曲綫梯形也就被尋常的梯形所替代。要决定这尋常梯形的面积只要知道起迄縦标綫

$$f(a)=y_0,\quad f(b)=y_1$$

及底 $b-a=h$ 就行了。如此我們得出近似公式

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{h}{2}(y_0+y_1). \qquad (1)$$

当然，这个公式只能給出很粗的近似值。要得出較精确公式，我們把区間$[a, b]$以 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 諸点分为 n 个**相等**的小区間

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots\cdots, [x_{n-1}, b], \qquad (2)$$

并通过所取各分点作相应縱标綫；它們把原图形分为 n 条，每条我們近似地代之以一个尋常的梯形，就如剛才对原图形所做的一样(图 69)。

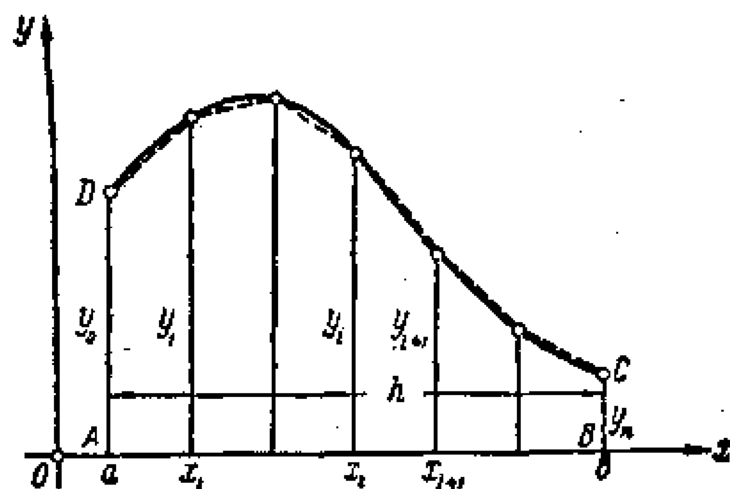


图 69.

既然所有梯形之高都等于$\frac{h}{n}$，則令

$$f(a)=y_0, f(x_1)=y_1, \cdots\cdots, f(x_{n-1})=y_{n-1}, f(b)=y_n,$$

而各梯形面积将依次为

$$\frac{h}{2n}(y_0+y_1),\ \frac{h}{2n}(y_1+y_2), \cdots\cdots,\ \frac{h}{2n}(y_{n-1}+y_n).$$

加起来就得出这个近似公式：

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{h}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots\cdots+y_{n-1}\right]. \qquad (3)$$

这就是所謂梯形公式。

在 n 无限增大时这梯形公式的誤差从而无限减少。如此，只要 n 充分大，由这个公式所产生的积分值可以达到任意的精确程度。

我們取这个已知的积分为例：

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0.785398\cdots$$

对它应用所导出的近似公式，取 $n=10$ 而計算到四位数字。

按梯形公式我們有

$$x_0=0.0 \qquad y_0=1.0000$$
$$x_{10}=1.0 \qquad y_{10}=0.5000$$
和 1.5000

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1.5000}{2}+7.0998\right)=0.78498$$

$x_1=0.1$	$y_1=0.9901$
$x_2=0.2$	$y_2=0.9615$
$x_3=0.3$	$y_3=0.9174$
$x_4=0.4$	$y_4=0.8621$
$x_5=0.5$	$y_5=0.8000$
$x_6=0.6$	$y_6=0.7353$
$x_7=0.7$	$y_7=0.6711$
$x_8=0.8$	$y_8=0.6098$
$x_9=0.9$	$y_9=0.5525$
	和 7.0998

所得近似結果較眞値小 0.0005。

讀者当然了解，我們在此能估計出誤差来只是因为預先知道了积分的精确数値。要我們的公式能事实上适用于近似計算，則須有方便的誤差表出式。它不但要能在已知的 n 値之下估計誤差，还要能在保証所要求的精确度之下选擇 n 値。这問題將在 191 段里再討論。

190. 抛物綫公式 我們仍回到曲綫形 $ABCD$ 而將其底边 AB 平分于点 E 幷作相应的縱标綫 EF(图 70)。縱标綫

$$AD=y_0,$$
$$EF=y_{\frac{1}{2}},$$
$$BC=y_1$$

及底边 $AB=h$ 都假設是已知的。这回弦 CF 及 FD 則近似地代以

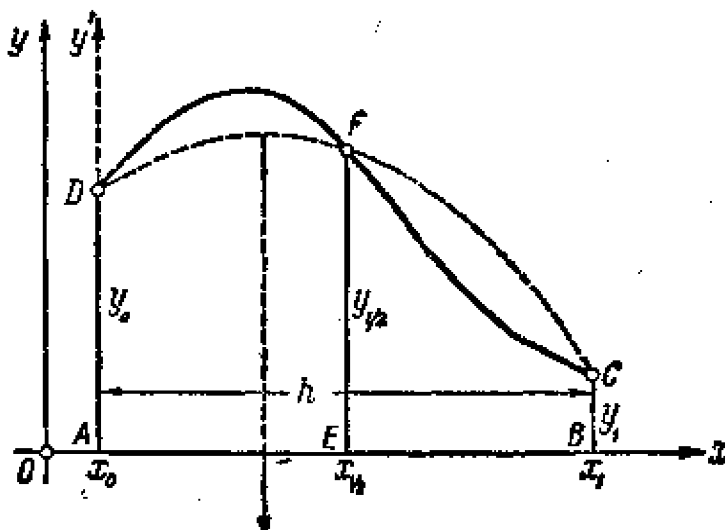


图 70.

抛物綫弧 CD(抛物綫軸成鉛垂方向)，通过三点 C, F, D——希望这抛物綫比折綫 CFD 能更近似地代表原曲綫。

当然，首先要明确通过平面上任意三点

$$(x_0, y_0),\ (x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}),\ (x_1, y_1). \quad (x_0 < x_{\frac{1}{2}} < x_1)$$

事实上总能画一条这样的抛物綫，并且只有一条。具有鉛垂軸的抛物綫的方程如下:

$$y = ax^2 + bx + c;$$

其系数可惟一地由三个条件

$$ax_0^2 + bx_0 + c = y_0,\quad ax_{\frac{1}{2}}^2 + bx_{\frac{1}{2}} + c = y_{\frac{1}{2}},$$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$

所决定，因为这組方程的行列式("梵德尔蒙特行列式")

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_{\frac{1}{2}}^2 & x_{\frac{1}{2}} & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

不等于零[①]。

① $a=0$ 时抛物綫退化为直綫。

现在我們来計算这个上面由抛物綫弧所圍的图形的面积 P。我們将証明，这个面积由公式

$$P=\frac{h}{6}(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1) \tag{4}$$

所表出；它通常称为辛普松公式[①]。

不致减弱一般性，可以認为 y 軸就通过点 A。于是

$$P=\int_0^h(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c).$$

如果算出

$$y_0=c,\quad y_{\frac{1}{2}}=a\frac{h^2}{4}+b\frac{h}{2}+c,\quad y_1=ah^2+bh+c,$$

則辛普松公式立即可以驗証。

那給出抛物綫下面积**精确**值的(4)式只**近似地**代表所求的曲綫 $y=f(x)$ 下面积：

$$\int_a^b f(x)dx\doteq\frac{h}{6}(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1). \tag{5}$$

为了提高精确性我們和前面一样做法：先把区間 $[a,b]$ 分为相等的 n 部分(1)，而該图形分为 n 条，对每条各施用(5)型的公式。既然这个公式，除两端外，还用到中間的縱标，于是我們必須把每一小区間(1)各用 $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}, \cdots\cdots, x_{n-\frac{1}{2}}$ 諸点平分为二（如此原区間总共分成了 $2n$ 部分）。既然 n 条（不是 $2n$ 条）的底边都等于 $\frac{h}{n}$，則其面积的近似式各为

$$\frac{h}{6n}(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1),$$

① Thomas Simpson (1710—1761)是英国数学家。这公式也許在他以前已經知道。

$$\frac{h}{6n}(y_1+4y_{\frac{3}{2}}+y_2),\ \cdots\cdots,\ \frac{h}{6n}(y_{n-1}+4y_{n-\frac{1}{2}}+y_n).$$

加在一起，得出这个新的近似公式：

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{h}{6n}[(y_0+y_n)+2(y_1+\cdots\cdots+y_{n-1})+$$

$$+4(y_{\frac{1}{2}}+\cdots\cdots+y_{n-\frac{1}{2}})], \tag{6}$$

它叫做抛物綫公式或辛普松公式；这公式在花費同样的力气之下往往可得出比梯形公式精确的結果，因此比較常被采用。

我們重新用辛普松公式再来計算一回积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 以作对比。取 $2n=4$，如此这回所用到的縱标值个数甚至比以前还少。我們有（計算至五位数字）：

$$x_0=0 \qquad x_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4} \qquad x_1=\frac{1}{2} \qquad x_{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4} \qquad x_2=1$$

$$y_0=1 \qquad 4y_{\frac{1}{2}}=3.76471 \qquad 2y_1=1.6 \qquad 4y_{\frac{3}{2}}=2.56 \qquad y_2=0.5$$

$$\frac{1}{12}(1+3.76471+1.6+2.56+0.5)=0.78539\cdots$$

——五位数字全都正确！

当然，前段末尾所作箋注在此可以重复一遍。現在我們馬上就來講近似公式的誤差估計。

191. 近似公式的余項 我們先来考虑梯形公式相应于 $n=1$ 时这一最簡单的特例，即公式(1)。用一个"余項" ρ 来恢复这个公式的精确性，如此可写：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\rho,$$

而問題就是要給 ρ 来找一个便于估值的表出式。

我們假設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内有头两阶的連續导函数。于是积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 經下面的初等变换——即重复三回分部积分法——立即导出所求的 ρ 的表出式。

我們有:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d(x-a)=f(b)(b-a)-\int_a^b f'(x)(x-a)dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-a)dx=\int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b)=-\int_a^b (x-b)d[f'(x)(x-a)]=$$

$$=-\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx-\int_a^b f'(x)(x-b)dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-b)dx=\int_a^b (x-b)df(x)=f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)dx.$$

对比这几个等式,我們得出

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx,$$

由此有

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx,$$

所以

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx.$$

既然函数 $f''(x)$是連續的而$(x-a)(x-b)$在区間 $[a, b]$ 内不变正負号,則按推广中值定理 [182 段10°] 有

$$\rho=\frac{1}{2}f''(\bar{\xi})\int_a^b (x-a)(x-b)dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\bar{\xi}),$$

这里 $a\leqslant\bar{\xi}\leqslant b$①。

如果把区間 $[a,b]$ 分为 $n>1$ 个相等的部分,則对每个小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 按所证明的將有**精确**公式

① 公式(1)余项表出式的这种推导法出于学生 Г. 蔡金(Цейтин)。

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_i+y_{i+1}}{2} - \frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(\xi_i) \quad (x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}).$$

將这些等式逐項加起来($i=0, 1, \cdots, n-1$)，得：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_n\right)+R_n,$$

$$(h=b-a)$$

这里

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}\cdot\frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

一式就是梯形公式(3)的余項。

以m及M各表示連續函数$f''(x)$在区間$[a, b]$內的最小値及最大値[73段]；于是算术平均数

$$\frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

也就介乎m与M之間。按連續函数的一个熟悉的性質[70段]，必可在$[a, b]$中找到这样一点ξ，使上式精确地等于$f''(\xi)$。所以我們終于有

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}f''(\xi) \quad (a\leqslant\xi\leqslant b). \tag{7}$$

在n增大时这个余項大概随$\frac{1}{n^2}$而变小①。

例如，我們又回来計算这个在189段做过的积分$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$。对于被积函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$我們有$f''(x)=2\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^3}$；这个导函数在区間$[0, 1]$內变正負号，但絕对値保持小于2。由此，按公式(7)，$|R_{10}|<0.0017$。我們算出了縱坐标的四位数字，精密度达0.00005；不难看出，由于縱坐标节取整値所生誤差可以包含在上面的估計式里。眞正的誤差事实上小于这个范圍。

对于辛普松公式(6)我們只写出其余項而不加推証。在函数$f(x)$有四阶連續导函数的假設之下这余項有这样的形式(如果区間分为$2n$部分)：

---

① 我們在此說"大概"是因为ξ也可以随n而变，这一点今后要記得。

$$R_{2n}=-\frac{h^5}{180\cdot(2n)^4}f^{(4)}(\eta)\quad(a\leqslant\eta\leqslant b).\tag{8}$$

重新回到积分$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$。为了避免用現于公式(8)中的四阶导函数的計算，我們注意函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$本身就是 $y=\operatorname{arctg}x$ 的导函数，如此我們可以利用 96 段 5)的公式。按它有

$$f^{(4)}(x)=y^{(5)}=24\cos^5 y\sin 5\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

由此得 $|f^{(4)}(x)|\leqslant 24$，所以按公式(7)有$|R_4|<\frac{1}{1920}<0.0006$。真正的誤差我們已看出显著地小于这个范圍。

192. 例 最后，为了給一个預先知道其数值的定积分的近似計算实例，我們用辛普松公式来計算第二类完全橢圓积分①。

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

精确度要达 0.001。

对于函数 $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}$ 在x由 0 变至$\frac{\pi}{2}$时我們有 $|f^{(4)}(x)|<$ $<12$②，所以［参閱(7)］

$$|R_{2n}|<\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180\cdot(2n)^4}\cdot 12<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2n)^4},\ \text{因为}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5<10.$$

我們取 $2n=6$，如此$|R_6|<0.00052$。于是

---

① 勒計德尔称函数 $F(k,\varphi)$及$E(k,\varphi)$在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时为完全的：在这情形其符号中可省略第二自变数而簡写为 $F(k)$, $E(k)$。对完全橢圓积分也有特别的表。

② 显然，$y=f(x)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$；微分恒等式

$$y^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 x,$$

不难逐步得出导函数 y', y'', y''', y'''' 的絕对值的上方估計式。

$x_0=0(0°)$ $y_0=1.0000$

$x_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}(15°)$ $4y_{\frac{1}{2}}=\sqrt{12+\sqrt{12}}=3.9324$

$x_1=\frac{\pi}{6}(30°)$ $2y_1=\frac{\sqrt{14}}{2}=1.8708$

$x_{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{4}(45°)$ $4y_{\frac{3}{2}}=\sqrt{12}=3.4641$ $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{15.4771}{18}=1.35063\cdots$

$x_2=\frac{\pi}{3}(60°)$ $2y_2=\frac{\sqrt{10}}{2}=1.5811$

$x_{\frac{5}{2}}=\frac{5\pi}{12}(75°)$ $4y_{\frac{5}{2}}=\sqrt{12-\sqrt{12}}=2.9216$

$x_6=\frac{\pi}{2}(90°)$ $y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7071$

总和 15.4771

对所得結果除校正数 R_6 以外 还須添加一个整取数值时所生誤差的校正数，它不超$\frac{0.0003\cdot\pi}{36}<0.00003$。

如此，

$$1.35011<E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<1.35118,$$

并可以肯定$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1.351_{\pm 0.001}$。

（事实上在所得結果中全部数字都是正确的！）

这个例子的兴趣在此：相应的原函数不能以有限形式表出，如此不可能利用它来計算定积分。

反之，如果在这个以及类似的情形原函数表为变上限定积分的形式，則可以計算这些积分相应于一系列上限值的积分值。由此在原則上闡明了；对于只由积分式給出的函数也如讀者所熟悉的初等函数一样可以造表。

第十二章　积分学的几何应用及力学应用

§1. 面积及体积

193. 面积概念的定义. 可求积[1] 区域　所謂多边形区域(或簡称多边形), 乃指由一条或几条折綫所圍成的任意有限平面图形而言(但可能是不連通的)。这种图形的面积在中学几何課本里已詳細討論过, 我們現在就以此为基础。

現在我們在平面上任意取一个有界閉区域的图形 (P)。它的边界或界綫(K)我們想象其为一条或几条閉曲綫。

我們来考慮所有可能的整个被包含在(P)內的多边形 (A) 及整个包含着(P)的多边形(B)(图 71)。如果A及B各表其面积, 則恒有 $A\leqslant B$。数集$\{A\}$上方既为任何B所囿, 則必有一上确界 P_* [6 段], 而$P_*\leqslant B$。同样, 数集$\{B\}$既下方被 P_* 所囿, 則必有一下确界 $P^*\geqslant P_*$。这两个界第一个可称为图形(P)的内面积, 第二个可称为外面积。

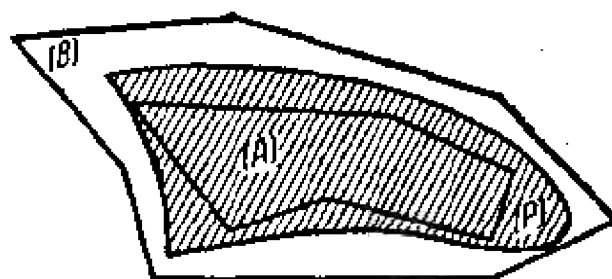


图 71.

如果两界

$$P_*=\sup\{A\} \text{ 及 } P^*=\inf\{B\}$$

重合为一, 則其共同値P称为图形 (P)的面积。在这情形图

① 原字是"可成方"或"可求方"之意——譯者注。

形 (P) 称为可求积的。

1°. 要面积存在，其必要而充分的条件是：对于任何一个 $\varepsilon>0$，总能找到这样两个多边形 (A) 及 (B)，使得 $B-A<\varepsilon$。

事实上，这条件的必要性可由确界的基本性质推出[6段]：如果面积 P 存在，则可找到一个 $A>P-\frac{\varepsilon}{2}$ 及一个 $B<P+\frac{\varepsilon}{2}$。充分性则可立即由下列不等式推出：

$$A\leqslant P_*\leqslant P^*\leqslant B.$$

同此意思也可以用另一方式来表出。

在区域 (P) 的可求积性問題中其边界曲綫 (K) 占重要的地位。

如果可求积，則如我們剛才所見，对給定的 $\varepsilon>0$ 曲綫 (K) 可以被包含在一个多边形区域 $(B-A)$ 內，这区域是被夹在两个多边形 (A) 及 (B) 的界綫之間而具有面积 $B-A<\varepsilon$ 的（参閱图 71）。

現在我們反过来假設界綫 (K) 可以包含在一个多边形区域 (C) 内，其面积为 $C<\varepsilon$，而 ε 是任一預先給定的正数。不致減弱一般性，在此可假設 (C) 不籠罩整个图形 P。于是由区域 (P) 中不落在 (C) 內的点子組成一个多边形区域 (A) 而被包含于 (P) 内；如果将 (C) 并入 (A)，則得一多边形区域 (B)，它已把 (P) 包括进去了。旣然 $B-A=C<\varepsilon$，則由此根据 1° 推出区域 (P) 是可求积的。

为了說話省力起見我們約定，一条曲綫 (K)（閉或非閉）如果可以被面积任意小的多边形区域所籠罩，就說它有零面积。于是由上面的論証可求积性条件可以陈述为这个新的形式：

2°. 要图形 (P) 可求积，其必要而充分的条件是：它的界綫 (K) 有面积 0。

因此，在曲綫中划分出零面积曲綫这一个大类型来，是一件有重要意义的事情。

容易証明，任何由

$$y=f(x) \text{ 或 } x=g(y) \tag{1}$$

$$(a\leqslant x\leqslant b)\quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

(f 及 g 为連續函数)，这样显式方程所表出的連續曲綫都是具有零面积这一性質的。

例如，我們来討論一下第一个方程吧。按任一給定的 $\varepsilon>0$ 可以把区間 $[a, b]$ 分为 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$ 等部分，使在每个分区間中函数 f 的摆幅 ω_i 少 $\frac{\varepsilon}{b-a}$ [75 段]。如果照常例 m_i 及 M_i 各表示 f 在第 i 分区間中的最小値及最大値，則我們的全曲綫可以由

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i]\quad (i=0, 1, \cdots, n-1)$$

等矩形所組成的图形所籠罩[图 72]，这些矩形总面积为

$$\sum_i (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_i \omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum \Delta x_i=\varepsilon,$$

这就是所求証的。也就是說，曲綫(1)有零面积。

由此推知:

3°. 如果一个图形 (P) 由几条連續曲綫所圍，每条各由一显式方程(1)(两类型中之一)所表出，則該形必可求积。

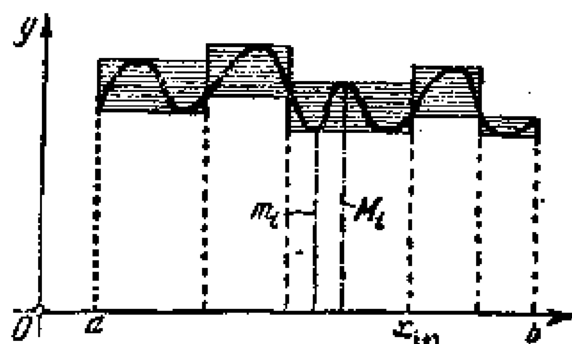


图 72.

事实上，既然每一上述曲綫都有零面积，則全界綫显然也有零面积。

194. 面积的可加性 我們想象有一个图形 (P) 被分成了两个图形 (P_1) 和 (P_2)①: 这可以，比方說，用一条連結界綫上两点的曲綫来分，或由一条完全落在 (P) 內的曲綫来分(图 73a 及 $б$)。于是成立这个定理:

---

① 它們可有一部分界限相重，但图形不相迭，即无共同內点。

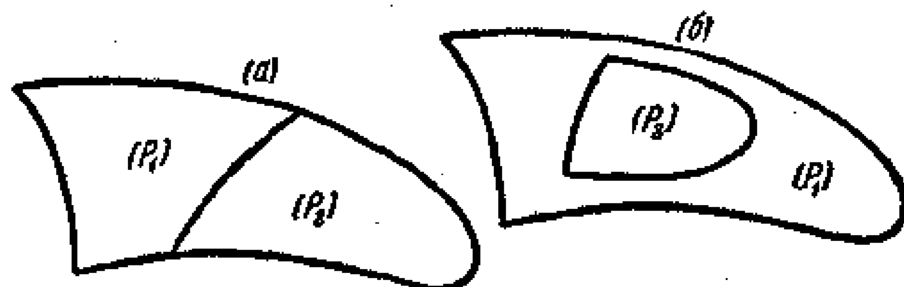


图 73.

4°. 这三个图形(P), (P_1), (P_2)中只要有两个可求积，則第三个也就可求积，并且恒有

$$P=P_1+P_2, \tag{2}$$

也就是說，面积具有可加性。

定理中可求积一节可立卽由条件 2° 推出。剩下只要証明等式(2)就行了。我們来考虑图形(P_1)及(P_2)的相应内外多边形(A_1), (B_1)及(A_2), (B_2)。互不重迭的多边形(A_1), (A_2)組成一个多边形区域(A)，其面积为$A=A_1+A_2$，而完全被包含在区域(P)里。多边形(B_1)与(B_2)——可能交迭——則組成一个区域(B)，其面积为$B\leqslant B_1+B_2$，而包含区域(P)。

我們同时有

$$A_1+A_2\leqslant P\leqslant B\leqslant B_1+B_2$$

及

$$A_1+A_2\leqslant P_1+P_2\leqslant B_1+B_2,$$

如此P及P_1+P_2二数包含在同一組可以任意接近的上下界A_1+A_2与B_1+B_2之間，所以該二数相等，这就是所要証明的。

特别是，由此有$P_1<P$，所以图形的一部分的面积小于全图形的面积。

195. 面积作为极限 前段所陈述的可求积条件 1° 可以改变說法如下：

5°. 要图形(P)可求积，则其必要而充分的条件是要存在这样两个多边形序列$\{(A_n)\}$及$\{(B_n)\}$，前一被包含于(P)，后一籠罩(P)，而其面积有一共同极限

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \tag{3}$$

这极限显然就是图形(P)的面积。

有时多边形利于用其他已知可求积的图形来替代：

6°. 如果对于图形(P)可以做出这样两个可求积图形序列$\{(Q_n)\}$及$\{(R_n)\}$，前一被包含于(P)，后一籠罩(P)，而其面积有一共同极限

$$\lim Q_n = \lim R_n = P,$$

则图形(P)也可求积，而上面那极限就是它的面积。

这可立即由前一条推出，只要每个图形(Q_n)代之以其中所包含的多边形(A_n)，而图形(R_n)代之以包含它的多边形(B_n)，而面积与它如此接近，使(3)也同时实现。

196. 以积分表出面积 现在我們借助积分来計算平面图形的面积。

在首要地位我們先以严格讲法来討論已遇到过的决定曲綫梯形面积問題(图形74)。这图形 $ABCD$ 上方由方程

$$y = f(x)$$

所表曲綫DC为界，这里$f(x)$是区間$[a, b]$内的一个正連續函数；它下方以x軸上綫段AB为界，而两侧以縱坐标綫AD及BC为界(也可縮为一点)。特别是，所考虑图形$ABCD$的面积P的存在可由3°推知，而問題只是如何計算它。

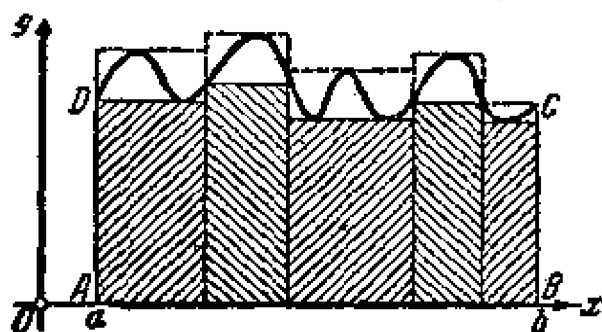


图 74.

因此我們把区間$[a, b]$按尋常方式分为小区間，即在a与b間

插入一系列点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b.$$

以 m_i 及 M_i 各表示函数 $f(x)$ 在第 i 个分区間中$(i=0, 1, \cdots n-1)$的最小值及最大值而做出达布氏和

$$s=\sum_i m_i\Delta x_i,\quad S=\sum_i M_i\Delta x_i.$$

它們显然就是各由內外矩形所組成的阶梯形的面积（参閱附图）。所以

$$s<P<S.$$

但当 Δx_i 中最大者趋于零时，两和有积分 $\int_a^b f(x)dx$[①] 为其极限，因此也就等于所求的面积

$$P=\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

如果曲綫梯形 $CDFE$ 下方上方均以曲綫为界，其界綫方程式为

$$y_1=f_1(x) \text{ 及 } y_2=f_2(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

則将它看作 $ABFE$ 及 $ABDC$ 两图形之差而得出該所求梯形面积如下[参閱 40]：

$$P=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \tag{5}$$

現在設給出了一个扇形 AOB（图 76），其边界为一条曲綫 AB 及两条矢徑 OA 与 OB（每条均可縮为一点）。在此曲綫 AB 由极坐标方程 $r=g(\theta)$ 所給出，而 $g(\theta)$ 是区間 $[\alpha, \beta]$ 里的一个正連續函数。

---

① 由 5° 这本身就証明曲綫梯形 $ABCD$ 的可求积；要得出那里所說的图形序列，可以，比方說，将区間分为 n 个相等的部分，而 n 增至无穷。

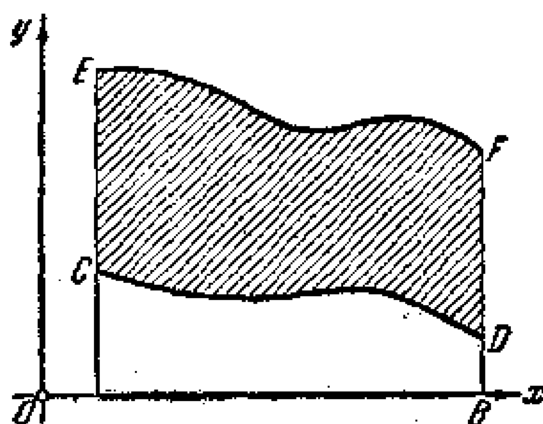


图 75.

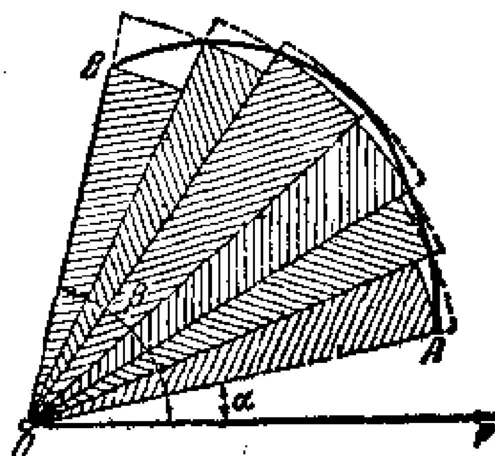


图 76.

在 α 与 β 間插入下列諸值(參閱附图):

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_i<\theta_{i+1}<\cdots<\theta_n=\beta,$$

幷作这些角的相应矢徑。如果在此也引入函数 $g(\theta)$ 在 $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ 里的最小値及最大値为 μ_i 及 M_i, 則由这些半徑所扫出的圓扇形将各为图形(P) 的內外形。我們各别由內扇形及外扇形組成两个图形，其面积为

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2\Delta\theta_i \text{ 及 } \sum=\frac{1}{2}\sum_i M_i^2\Delta\theta_i.$$

容易看出这两个和 σ 及 Σ 就是积分 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[g(\theta)]^2d\theta$ 的达布氏和；在差数 $\Delta\theta_i$ 中最大的趋于零时，則这个积分就是該两和的共同极限。于是由 6°① 图形(P)可求积而

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[g(\theta)]^2d\theta. \tag{6}$$

例 1) 給定了一个橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及它上面的一个点 $M(x, y)$ (图 77)。試求曲綫梯形 $BOKM$ 及曲綫扇形 OMB 的面积。

① 要得 6° 中所說的图形序列，在此就可以将区間分为 n 个相等的部分。

由橢圓方程我們有 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 如此按公式(4)有

$$P_1=\text{面积 } BOKM=\int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

$$=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{b}{2a}x\sqrt{a^2-x^2}=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{xy}{2}.$$

既然后一項表示 $\triangle OKM$ 的面积,則去掉它以后我們得出扇形面积的表出式为

$$P_2=\text{面积 } OMB=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

在 $x=a$ 时我們找到橢圓的四分之一的面积为$\frac{\pi ab}{4}$, 如此全橢圓面积 $P=\pi ab$, 对于圓則 $a=b=r$ 而得出熟悉的公式 $P=\pi r^2$。

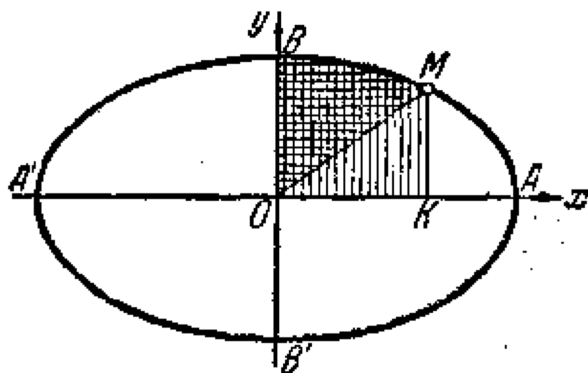


圖 77.

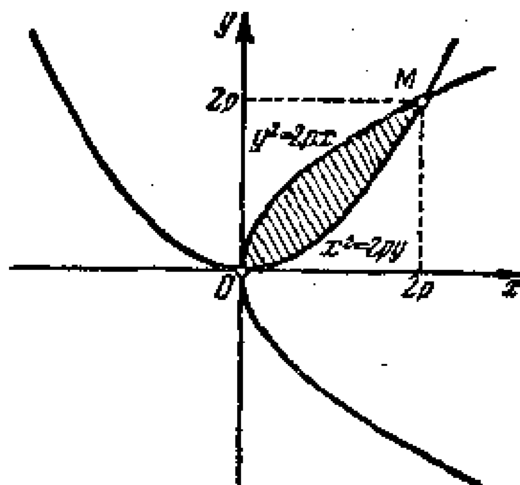


圖 78.

2) 試求两条可迭合拋物綫 $y^2=2px$ 与 $x^2=2py$ (圖 78) 間所圍图形的面积。

显然,这要用到公式(5)而在其中令

$$y_1=\frac{x^2}{2p},\qquad y_2=\sqrt{2px}.$$

要决定积分区間我們将所給两方程联立而解之,如此求得两拋物綫原点以外的交点 M 的横坐标,它就等于 $2p$。于是我們有

$$P=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\;x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right)\Big|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2.$$

3) 公式(4)也可用于曲綫梯形的边界曲綫由参变方程所給出的情形:

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t).$$
$$(t_0\leqslant t\leqslant T)$$

在积分(4)里进行变数替换而得(設 $t=t_0$ 时 $x=a$ 而 $t=T$ 时 $x=b$):

$$P=\int_{t_0}^{T} yx'_t dt=\int_{t_0}^{T}\psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{7}$$

例如,倘若要由参变表出法

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t$$

来計算橢圓面积而認为当 t 由 π 减至 0 时,x 由 $-a$ 增至 a,則我們得出

$$P=2\int_{\pi}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)dt=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\ dt=\pi ab.$$

这里我們是算出上半个橢圓的面积而二倍之。

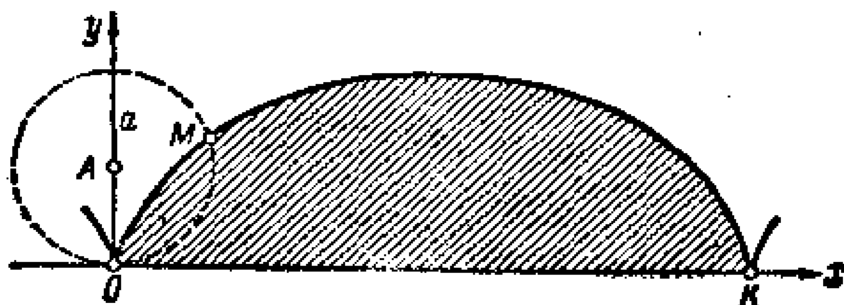


图 79.

4) 我們以同样方式来計算旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$所圍图形的面积(图 79)。我們按公式(7)有

$$P=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

如此,所求面积就等于半徑为 a 的圓的面积之三倍。

5) 求亚儿默德螺綫 $r=a\theta$ 的一匝所包面积(图 80)。按公式(6)我們有

$$P=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2d\theta=\frac{a^2}{6}\theta^3\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2,$$

同时半徑为 $2\pi a$ 的圓的面积則为 $4\pi^3a^2$。故螺綫一匝的面积就等于圓面积的三分之一(这結果亚儿默德当时也已經知道了)。

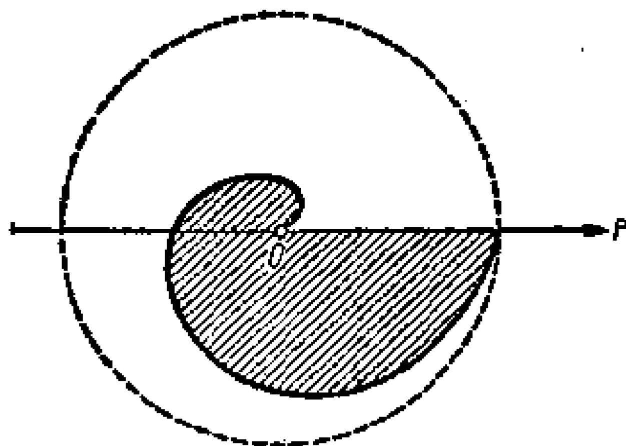


图 80.

197. 体积概念的定义及其性质 也如 193 段中那样，由矩形面积概念出发而建立任意平面图形的面积，现在我們依据多面体体积来給一般立体的体积定义。

如此，設給了一个任意形状的立体(V)，卽由三度空間中閉曲面所包圍的体。体的边界(S)設为一个閉曲面(或几个閉曲面)。

我們来考慮完全包含在我們这个体里面的体积为X的多面体(X)及能罩在外面的体积为Y的多面体(Y)。对于X总存在有一上确界V_*，对Y总存在有一下确界V^*，而$V_*\leqslant V^*$；它們各可称为該立体的内体积及外体积。

如果

$$V_*=\sup\{X\} \text{ 及 } V^*=\inf\{Y\}$$

二数重合为一，則其共同值V就称为立体(V)的体积。在这情形立体(V)有时也称为"可成立方的"(可求积的)。

在此也不难証明这个定理:

1°. 要体积存在的必要而充分的条件是: 对任一 $\varepsilon>0$ 总能找到这样两个多面体(X)及(Y)，使 $Y-X<\varepsilon$。

还可以另一形式表述如下:

2°. 要立体(V)有体积，其必要而充分的条件是要它的边界曲面(S)有体积 0，卽要該面能包含在一个体积任意小的多面体

內。

属于零体积曲面之数的首先有任一下列三型显式方程所表的曲面:

$$z=f(x,y),\quad y=g(z,x),\quad x=h(y,z),$$

这里 f,g,h 各为某有界区域内的二元連續函数。

設,比方說,給定了一个第一型的方程,其定义域为(P),被包含在一个矩形(R)内。按**137**段的定理,不論 $\varepsilon>0$ 如何,总可将此矩形分为任意小的矩形(R_i) $(i=1,2,\cdots,n)$,使函数 f 在区域(P)的被包含于(R_i)的部分(P_i)内的摆幅$<\frac{\varepsilon}{R}$。如果 m_i 及 M_i 各为函数 f 在(P_i)内的最小值及最大值,則我們这个曲面可以被包容在一个由底面积为 R_i 高为$\omega_i=M_i-m_i$ 的平行体所組成的多面体内。这个多面体的体积是

$$\sum_i \omega_i R_i<\frac{\varepsilon}{R}\sum_i R_i=\varepsilon,$$

这就是所要証明的。

所以:

3°. 如果一个体(V)由某些連續曲面所圍成,而每一曲面均由一个显式方程(該三型之一)所表出,則該体必有体积。

体积也如面积一样具有可加性:

4°. 如果一个体(V)分成两个体(V_1)和(V_2),則三体中每两个有体积时其余一个也就从而有体积,且

$$V=V_1+V_2.$$

195 段对面积所証明的命题 5°, 6° 也不难对体积轉述如下:

5°. 要体(V)有体积,其必要而充分的条件是:存在一个内多面体序列$\{(X_n)\}$及一个外多面体序列$\{(Y_n)\}$,其体积有一共同极限

$$\lim X_n=\lim Y_n=V.$$

这极限就是体(V)的体积。

上述命题中多面体也可代之以其他任何显然知有体积的体。如此我們有这样的命題:

6°. 如果对体(V)可以做出一个内体序列$\{(T_n)\}$及一个外体序列$\{(U_n)\}$，各体都有体积，而这些体积趋于一个共同极限

$$\lim T_n=\lim U_n=V,$$

則体(V)也就有体积，即等于該极限。

198. 以积分表出体积 我們先提一下这几乎明显不待言的事实：一个正柱形，若其高为H，其底为可求积平面形(P)，則其体积存在而等于底面积与高之乘积：$V=PH$。

我們取多边形(A_n)及(B_n)，前者包含于(P)，后者籠罩(P)，而其面积A_n及B_n同趋于极限P(195段5°)。如果在这些多边形上作高H的正角柱(X_n)及(Y_n)，則其体积

$$X_n=A_nH \text{ 及 } Y_n=B_nH$$

将趋于共同极限$V=PH$，它就是我們这柱形的体积(197段5°)。

现在我們来考慮一个体(V)，包含在$x=a$及$x=b$两平面之间，并以垂直于x軸的平面截割之(图81)。我們假設所有这些截

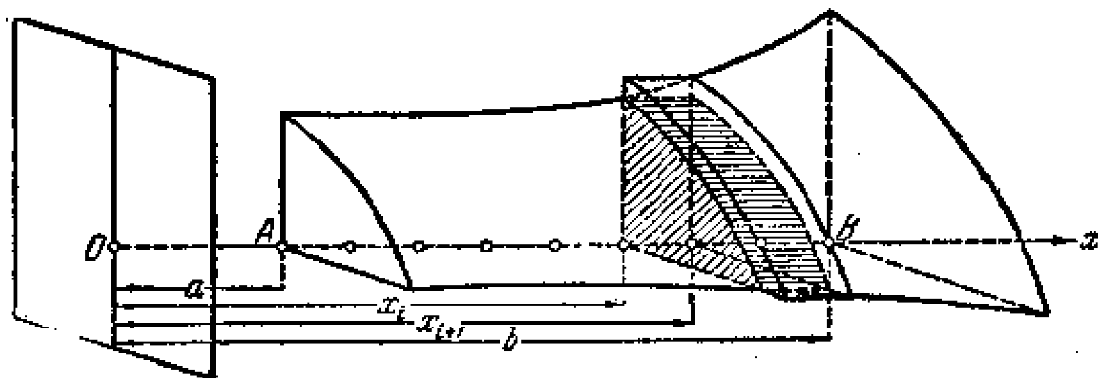


图 81.

面都是可求积的，并設相应于横坐标x的截面的面积$P(x)$是x的連續函数$(a\leqslant x\leqslant b)$。

如果将两个相似截面不經扭曲投射于任一垂直于x軸的平面



图 82.

上，則它們可以或者一个包含于另一个內（如图 82a），或者局部重迭（图 82$б$），或者一个在另一个之外（图 82$в$）。

我們要来討論的是第一种情形：两个不同的截面投射于一个垂直于 x 軸的平面上后其一恒包含另一之內。

在这种假設之下可以肯定該体必有体积，它由这个公式所表出：

$$V=\int_a^b P(x)dx \quad . \tag{8}$$

証明时我們将 x 軸上的区間 $[a, b]$ 用

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

諸点分为若干部分而以通过各分点 $x=x_i$ 的平面将整个体分成片片。我們試看包含在平面 $x=x_i$ 与 $x=x_{i+1}$ $(i=0, 1\cdots, n-1)$ 之間的这第 i 片。在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 內函数 $P(x)$ 有最大值 M_i 及最小值 m_i；如果相应于此区間中各不同值的截面都放在同一平面上，比方說，$x=x_i$ 这平面上，則它們在所作假設之下将全都包含在具有面积 M_i 的最大截面內，并包含着具有面积 m_i 的最小截面。如果在这两个最大与最小截面上各作一高 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ 的柱形，則較大的一个将包含該体所考慮的一片，而較小的一个将被該片所包含。根据本段开始所說，这两个柱形的体积将各为 $M_i\Delta x_i$ 及 $m_i\Delta x_i$。

由諸內柱形組成一体 (T)，由諸外柱形組成一体 (U)；其体积各等于

$$\sum_i m_i \Delta x_i \quad 及 \quad \sum_i M_i \Delta x_i$$

而当 $\lambda = \max\Delta x_i$ 趋于零时有一共同极限(8)。由 **197** 段 6°知道这就是体(V)的体积[①]。

分明满足上述截面相迭假設的重要特例就是迴轉体。我們設想在平面 xy 上有一条曲綫，由方程式 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$所給出，这里 $f(x)$ 連續而且非負；我們将其所圍曲綫梯形繞 x 軸迴轉之

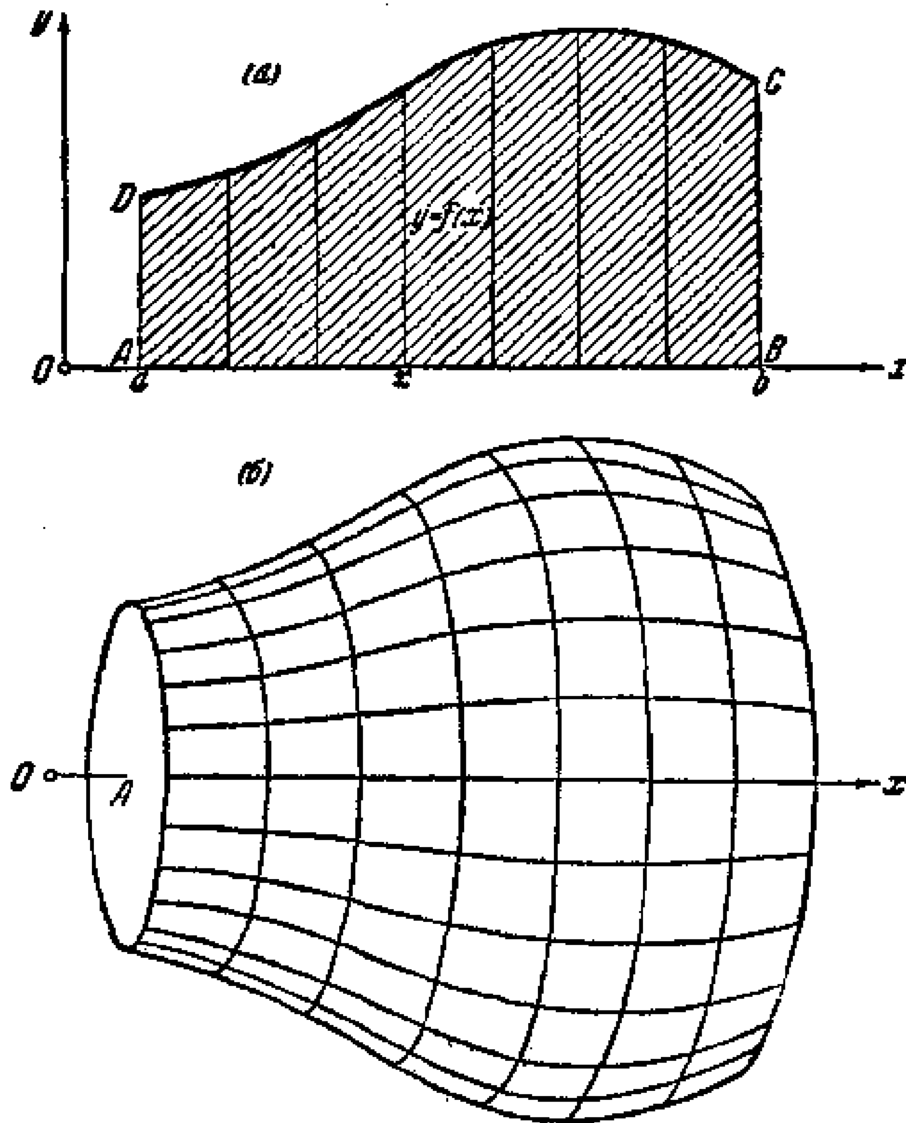


图 83.

① 例如将区間分为相等的部分，就容易分出該命題中所說到的那內体序列及外体序列。

(图83a 及 $б$)。所得到的体(V)显然属于当前的特例，因为它的截面投射到垂直于 x 軸的平面上时成一系列同心圓。这里

$$P(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2,$$

如此

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx. \tag{9}$$

如果一个曲綫梯形下方及上方由曲綫 $y=f_1(x)$ 及 $y_2=f_2(x)$ 所圍，則显然

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2-y_1^2]\,dx=\pi\int_a^b\{[f_2(x)]^2-[f_1(x)]^2\}dx, \tag{10}$$

虽然关于截面的假設在此也可以不实現。一般説来，所証明的結果不难推广到所有这种由滿足上述假設的体加减而得的体上。

在一般的情形只能肯定：如果体(V)有体积①，則它可由公式(9)表出。

例 1) 設椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸迴轉。既然

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

則我們求得迴轉椭圓体的体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2②.$$

同样我們可求得繞 y 軸迴轉所得之体的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^2b$。在这些公式里

① 例如一个体滿足定理 3° 的条件时就是如此。

② 容易看出，$\int_{-a}^{0}=\int_{0}^{a}$（置换 $x=-t$）。

設 $a=b=r$，則得出大家所熟悉的半徑为 r 之球的体积 $\frac{4}{3}\pi r^3$。

2) 对一枝旋輪綫 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ 求同样的迴轉体体积。

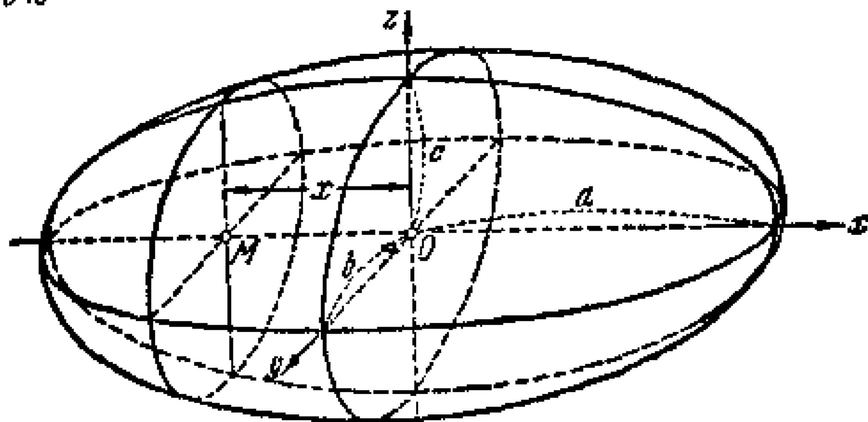


图 84.

曲綫的參变公式使公式

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

中作置換 $x=a(t-\sin t),\ dx=a(1-\cos t)$ 很为省力。即:

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=5\pi^2 a^3.$$

3) 試求由标准方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所給出的三軸橢圓体的体积(图 84)。

通过 x 軸上一点 $M(x)$ 而垂直于此軸的平面交橢圓体成一橢圓；其在 yz 平面上未經扭曲的投影的方程如此:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \qquad (x=\text{常数}).$$

由此知其半軸各为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ 及\ c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

而面积可表为[**196** 段 1)]:

$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

如此，按公式(8)所求体积为

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

4）我們考慮两个半徑为 r 的圓柱，其軸相交成直角；現在来求其所圍之体的体积。

图 85 上的体 $OABCD$ 即該体的八分之一。我們作 x 軸通过两圓柱軸的交点 O 并垂直于該二軸。于是作一平面与 O 成距离 x 并垂直于 x 軸，与体 $OABCD$ 相交，而截成一正方形 $KLMN$，其边 $MN=\sqrt{r^2-x^2}$，如此 $P(x)=r^2-x^2$。于是按公式(8)有

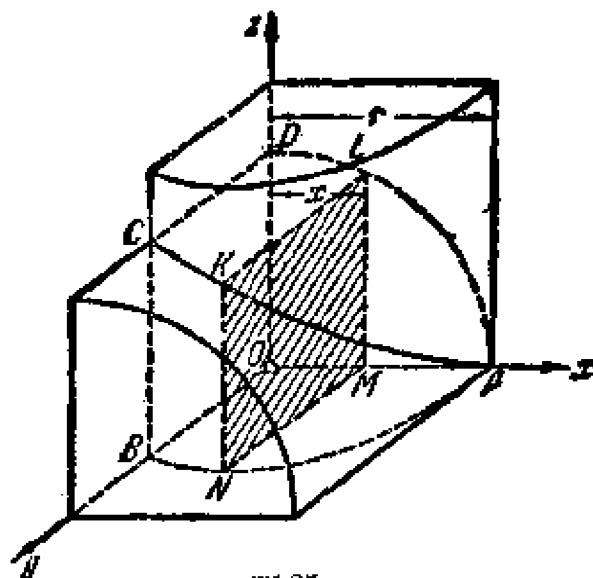


图 85.

$$V=8\int_0^r(r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}r^3.$$

5）最后我們来解同一問題，但假設两圓柱有不同半徑 r 及 $R(>r)$。

与前例的差別只在所截正方形 $KLMN$ 現在成矩形，其边为 $\sqrt{r^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}$。如此，在本例体积 V 已經要用

$$V=8\int_0^r\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}\,dx$$

这个**椭圓积分**来表出了，或者，作置换 $x=r\sin\varphi$ 而令 $k=\frac{r}{R}$，則

$$V=8Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=8Rr^2\cdot I.$$

現在我們来把积分 I 化为完全椭圓积分。[1] 首先是，

[1] 参閱 379 頁底注。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi-k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=I_1+I_2.$$

但是

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)F(k)+\frac{1}{k^2}E(k).$$

另一方面，由分部积分我們有:

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\, d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=E(k)-2I.$$

由此有

$$I=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)E(k)-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)F(k)\right].$$

如此，最后得出

$$V=\frac{8R^3}{3}[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)F(k)].$$

§2. 弧　　长

199. 弧长概念的定义　我們来考慮平面上一条曲綫 AB（先考慮非閉曲綫），由參变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad(1)$$
$$(t_0\leqslant t\leqslant T)$$

所給出，而函数 φ 及 ψ 假設是連續的。我們認为点 A 相应于 $t=t_0$，而点 B 相应于 $t=T$。在此假設曲綫上沒有重点，如此參变数 t 的

不同数值就相应于曲綫上不同的点。

如果把曲綫上的点按参变数 t 的增大排列成次序（两个点中相应于較大参变值者看作在后），則由此在曲綫上建立了一个一定的方向(图 86)。

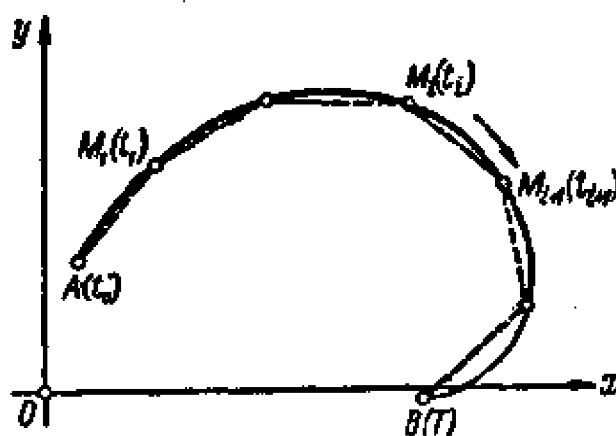


图 86.

現在我們在曲綫 AB 上取一系列的点

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_i,\ M_{i-1},\ \cdots,\ M_m=B,$$

按所指示方向一个跟着一个；它們相应于一系列遞增的参变值

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_m=T.$$

我們沿曲綫 AB 上作一折綫[①] $(p)=AM_1M_2\cdots B$ 而以 p 表其全长[②]。

当折綫(p)的边 M_iM_{i+1} 中最大的趋于零时，其全长 p 所趋有限极限 s 称为弧 AB 之长：

$$s=\overset{\frown}{AB}=\lim p.$$

如果这个极限存在，則該曲綫称为"可直化的"或有长的。

这个定义的涵义可以如此闡述：不論沿曲綫上取怎样一个折綫序列$\{(p_n)\}$，只要滿足折綫(p_n)的最大边随 n 的增大而趋于零这个条件，則全长 p_n 就趋于一个极限 s。

也可用"ε-δ 言辞"表之如下：对于每个 $\varepsilon>0$ 可以找到这样一个 $\delta>0$，使不等式

$$0\leqslant s-p<\varepsilon$$

①、② 对于任意的曲綫所謂"内接"(вписать)这种说法在此沒有意义，因其无内外可言也。同时 периметр 一字对非閉曲綫也不能説是"周长"。因此这两个字在这里都不便按通例直譯——譯者注。

在沿該曲綫上所作折綫每节

$$\overline{M_iM_{i+1}}<\delta$$

时恒成立。

这两个定义的等价性可以象寻常那样証明。

弧长的一个重要性質是它的可加性：

如果在弧 AB 上再取一点 C，则只要弧 AB 有长，则弧 AC 及 CB 也就有长，并且

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}.$$

这个事实我們承認它而不加証明。其实对于我們寻常要考慮的曲綫(参閱 **201** 段)，不仅弧长的存在可由弧长的积分表出式本身来保証，而且弧长的可加性也可由此推出。

現在轉向閉曲綫的情形，此时点 A 与 B 重合为一(但仍然沒有重点，即每个异于 $A\equiv B$ 的点只在参变数 t 的一个值上得到)。不难看出，在这情形上述弧长定义已經不能无条件地适用了：試看(图 87)卽使上述条件完全符合时也仍然无碍折綫挤成一点而其周长趋于零。問題在此：非閉曲綫的情形光是由于折綫 (p) 各节全都趋于零、已足保証使其越来越紧密靠攏于相应的弧段；所以自然可以取其全长 p 的极限作为全弧之长。对于閉曲綫，情形就已經不是这样了[①]。

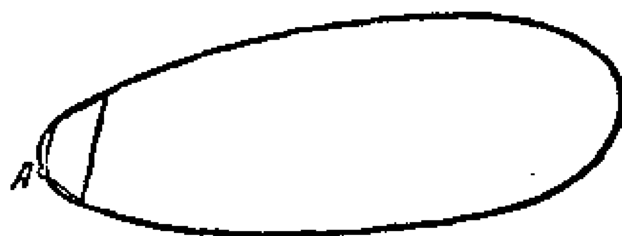


图 87.

固然可以把这个定义修改一下(不免复杂化)，使其也能包括

① 如果回忆一下初等几何教程中以內接正多边形周长极限作圓周长定义，則正多边形这一限制正可防止这里所說的可能性。

閉曲綫的情形。但我們为簡單計宁取另一途徑，卽：設想將閉曲綫用它上面一个任意取來的点 C 分成两段非閉曲綫，而称其长之和为全曲綫之长（如果两段弧都有长的話）。依据弧长的可加性不难証明，这个和事实上与点 A 及 C 的选擇法无关。

200. 輔助定理 我們重新來考慮沒有重点的非閉曲綫 (1)。对这种曲綫我們要証明下列两个輔助命題。

輔助定理 1. 如果点 M' 及 M'' 相应于参变值 t' 及 t'' $(t'<t'')$，則对任一 $\delta>0$ 必可找到这样一个 $\eta>0$，使在 $t''-t'<\eta$ 时弦长 $\overline{M'M''}<\delta$。

事实上，既然(1)中函数 φ 及 ψ 是一致連續的，則对于 $\delta>0$ 可找出这样一个 $\eta>0$，使 $|t''-t'|<\eta$ 时同时有

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},\quad |\psi(t'')-\psi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

从而也就有

$$\overline{M'M''}=\sqrt{[\varphi(t'')-\varphi(t')]^2+[\psi(t'')-\psi(t')]^2}<\delta.$$

輔助定理 2. 对于任何 $\eta>0$ 恒存在有这样的 $\delta>0$，使得只要弦 $\overline{M'M''}<\delta$，則此时相应于其两端的参变值之差 $t''-t'$ $(t'<t'')$ 就 $<\eta$。

我們假設其反面：此时对某一 $\eta>0$，在任何 $\delta>0$ 之下可找到这样两点 $M'(t')$ 及 $M''(t'')$，使 $\overline{M'M''}<\delta$ 而同时 $t''-t'\geqslant\eta$。取一个收歛于 0 的序列 $\{\delta_n\}$ 而依次設 $\delta=\delta_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，如此得出两个点序列 $\{M_n'(t_n')\}$ 及 $\{M_n''(t_n'')\}$，对它們

$$\overline{M_n'M_n''}<\delta_n,\ \text{但}\ t_n''-t_n'\geqslant\eta\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

不致減弱一般性，按波尔查諾-維尔斯脫拉斯輔助定理 [51 段]，在此可假設

$$t_n'\to t^*,\qquad t_n''\to t^{**}$$

（这只要必要时取子序列卽可达成）。显然，

$$t^{**}-t^*\geqslant\eta,$$

如此 $t^*\neq t^{**}$。同时对相应的点 M^* 及 M^{**} 我們有 $\overline{M^*M^{**}}=0$，卽两点应重合为一，但这是不可能的，因为所論曲綫沒有重点且非閉曲綫，这个矛盾完成了本輔助定理的証明。

由这两个輔助定理可見，在下非閉曲綫弧长定义时，由这两个条件出发是完全沒有区別的：或者要弦折綫的边 $\overline{M_iM_{i+1}}$ 最大的趋于 0 [按 199 段]，

或者要差数 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 最大的趋于 0; 因为这两个条件每个都能由另一个推出。目前对我們比較方便是，即由后一个条件来描述极限过程。

201. 以积分表出弧长 我們更假設非閉曲綫方程 (1) 中的函数 φ 及 ψ 有連續的导函数 φ' 及 ψ'。我們将証明，在这些条件之下曲綫是有长的并且弧长可由公式

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \tag{2}$$

表出。

我們首先将区間 $[t_0, T]$ 用

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T$$

諸点分为长 $\Delta t_n = t_{i+1} - t_i$ 的分区間。相应于这些 t 值有弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的折綫 $AM_1 \cdots M_{n-1}B$ 的頂点，而(如上面所說明)該弧之长 s 可下定义为折綫全长 p 在 $\lambda^* = \max \Delta t_i$ 趋于 0 时的极限。

令

$$\varphi(t_i) = x_i, \quad \psi(t_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

并且

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

弦折綫第 i 节 M_iM_{i+1} 之长可如此表出:

$$\overline{M_iM}_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

分别施用有限增量公式于函数(1)的增量 Δx_i 及 Δy_i，我們得:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i + \Delta t_i) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i + \Delta t_i) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_i^*)\Delta t_i,$$

这里的 τ_i 及 τ_i^* 則只知其介乎 t_i 与 t_{i+1} 之間。現在我們有

$$\overline{M_iM}_{i+1} = \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

如此对折綫全长得出下式:

$$p = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i.$$

如果根号下第二项里的 τ_i^* 也一律代之以 τ_i，則上式变为

$$\sigma=\sum_i\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\ \Delta t_i,$$

它显然恰好是积分(2)的积分和。在 λ^* 趋于0时这个和也就有上述积分为其极限①。要証明折綫全长 p 也趋于同一极限，只要証实差数 $p-\sigma$ 趋于0。

因此我們来做出这差数的估值式

$$|p-\sigma|\leqslant\sum_i\left|\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i^*)]^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\right|\Delta t_i.$$

如果在上面的总和中各項施用这个初等不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|\leqslant|b_1-b|②,$$

則得出

$$|p-\sigma|\leqslant\sum_i|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)|\Delta t_i.$$

由于函数 $\psi'(t)$ 的連續性，对于任何給定的 $\varepsilon>0$ 可以找到这样一个 $\delta>0$，使 $|\psi'(t^*)-\psi'(t)|<\varepsilon$ 只要 $|t^*-t|<\delta$。如果取所有 $\Delta t_i<\delta$，則也 $|\tau_i^*-\tau_i|<\delta$，如此 $|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)|<\varepsilon$，并且

$$|p-\sigma|\leqslant\varepsilon\sum_i\Delta t_i=\varepsilon(T-t_0).$$

这就証明了我們的断言。

如果曲綫由直角坐标显式方程

$$y=f(x)\quad(x_0\leqslant x\leqslant X)$$

---

① 它的存在是无疑的，因为被积式是連續函数[179 段，I]。

② 这不等式在 $a=0$ 时显然成立；在 $a\neq0$ 时則它可立即由恒等式

$$\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}=\frac{b_1+b}{\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b^2}}(b_1-b)$$

推出，因为括弧里的差数的絕对值小于1。

所給出，則取 x 作参变数时由公式(2)我們作为它的一个特例得出

$$s=\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{2a}$$

最后，曲綫由极坐标方程

$$r=g(\theta)\quad(\theta_0\leqslant\theta\leqslant\Theta)$$

給出的情形也可借助尋常轉換公式

$$x=r\cos\theta=g(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=g(\theta)\sin\theta$$

化为参变式；这里 θ 就占参变数的地位。对这情形

$$x_\theta'=r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta,\quad y_\theta'=r_\theta'\sin\theta+r\cos\theta,$$

如此

$$x_\theta'^2+y_\theta'^2=r^2+r_\theta'^2 \tag{3}$$

并且

$$s=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{r^2+r_\theta'^2}\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{[g(\theta)]^2+[g'(\theta)]^2}\,d\theta. \tag{2б}$$

注　公式(2)也直接可推广到閉曲綫的情形。在这情形我們取 t_0 与 T 間任意一个 t'，将所給曲綫(1)用相应点 $M'(t')$ 分为两段非閉曲綫 AM' 及 $M'B$，而对每段曲綫各施用(2)型公式：

$$s_1=\overset{\frown}{AM'}=\int_{t_0}^{t'},\quad s_2=\overset{\frown}{M'B}=\int_{t'}^{T}.$$

将两結果加起来，我們就得出全閉曲綫之長：

$$s=s_1+s_2=\int_{t_0}^{T}.$$

例　1) 拋物綫：$y=\dfrac{x^2}{2p}$.

取頂点 $O(x=0)$ 作計算弧長的起点，于是对橫坐标为 x 的任意一点 M 我們有：

$$s=\overset{\smile}{OM}=\frac{1}{p}\int_0^x\sqrt{x^2+p^2}\ dx=$$

$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+p^2})\right]_0^x=$$

$$=\frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}.$$

2) 旋輪綫: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

这里(在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 时)

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=2a\sin\frac{t}{2};$$

一枝旋輪綫之长按公式(2)为

$$S=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3) 亚儿默德螺綫: $r=a\theta$.

按公式(26),計算由极点 O 至任一点 M(相应于角 θ)的弧长得

$$s=\overset{\smile}{OM}=a\int_0^\theta\sqrt{1+\theta^2}\ d\theta=\frac{a}{2}[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})].$$

有趣的是,在此令 $\theta=\frac{r}{a}$,我們就得出形式与抛物綫弧长表出式相似的式子[参閱 1)]。

4) 椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

但在此取椭圆方程的参变形式比較方便: $x=a\sin t$, $y=b\cos t$。显然,

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=$$

$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

这里 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$是椭圆的离心率。

我們在第一象限中由椭圆小軸上端起至其任意一点計算其弧长,得

$$s=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\ dt=a\cdot E(\varepsilon,t).$$

如此,椭圆弧长表为第二类椭圆积分[174 段,再参閱 183 段]; 这也正是"椭

圆积分”命名之由来。

特例，椭圆周长四分之一可表为完全椭圆积分①

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=a\cdot E(\varepsilon).$$

全周长则为

$$S=4a\cdot E(\varepsilon).$$

202. 变弧及其微分 我們在弧 AB 上取一相应于任意参变值 t 的点 M。于是弧 $\overset{\frown}{AM}$ 之长按(2)式可表以公式

$$s=s(t)=\overset{\frown}{AM}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \tag{4}$$

并且显然是一个 t 的連續增函数。

此外，由于被积函数的連續性，这个变弧 $s=s(t)$ 将对 t 有导函数，即等于被积函数[**183** 段，12°]：

$$s_t'=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}. \tag{5}$$

如果将此等式平方起来并逐項乘以 dt^2，則得出这个簡单出奇的公式

$$ds^2=dx^2+dy^2, \tag{6}$$

它具有同样的几何直观。图 88 直角三角形 MNM_1 里“正边”作点 M 的坐标的增量：$MN=\Delta x$，$NM_1=\Delta y$，而“斜边”——弧 $\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$ 则为弧 $\overset{\frown}{AM}=s$ 的增量。如此我們对增量的主部——微分——(而不是对增量本身)有一个特殊的“毕达哥拉斯定理”。

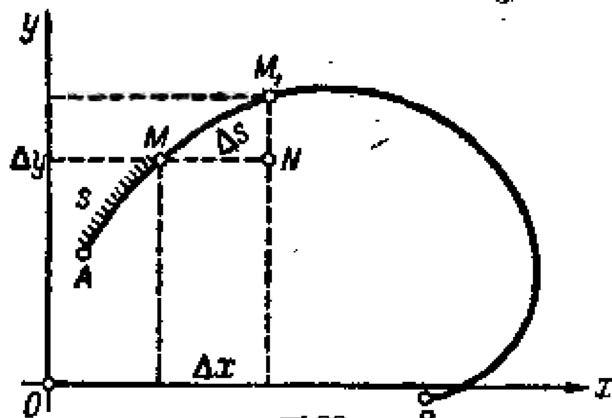


图 88.

宜特别指出的是重要公式 (5) 的一些相应于曲綫种

① 参閱 379 頁底注。

种特殊給出法的特例。如此，如果曲綫由笛卡尔显性方程 $y=f(x)$ 所給出，則 x 成参变数的地位，弧依凭着 x: $s=s(x)$，而公式(5)成这样的形式:

$$s'_x=\sqrt{1+y'^2_x}. \tag{5a}$$

如果曲綫由极坐标方程 $r=g(\theta)$ 所給出，而参变数是 θ，則弧这回是 θ 的函数: $s=s(\theta)$。由(3)，公式(5)可变成这样:

$$s'_\theta=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}. \tag{56}$$

計算弧長常常取弧中一个內点作为起点 A，而不是取其兩端点之一，这样較为便利。在这情形自然沿参变数增大方向截取的弧算作正的，沿相反的方向算作是負的，并且与此相应，在第一情形弧長賦以正号，在第二情形賦以負号。这里这个**带正負号的弧的大小**我們为簡单計就直称为弧。公式(4)、(5)、(5a)、(56)是对一切情形都成立的。

既然变弧 $s=\overset{\frown}{AM}$ 是参变数 t 的連續一致增函数，則反过来参变数 t 也就可以看作是 s 的单值連續函数[71 段]。把 t 的这个表出式代入方程(1)，我們得出流动坐标 x 及 y 表为 s 的函数:

$$x=\varphi(\omega(s))=\Phi(s),\quad y=\psi(\omega(s))=\Psi(s).$$

无疑，这个作点 M 曲綫坐标的弧 $s=\overset{\frown}{AM}$ 是决定其位置的最自然的参变数。

我們假設，在給定 t 值之下，两个导数 x'_t 及 y'_t 不同时为零(这話的几何意义将在 210 段闡明)，于是

$$s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}>0,$$

而对相应 s 值存在一个导数[80 段]

$$t'_s=\omega'(s)=\frac{1}{\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}},$$

因此也存在导数

$$x'_s=\Phi'(s),\quad y'_s=\Psi'(s).$$

203. 空間曲綫的弧长 关于空間曲綫(无重点)

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

弧长的定义也可以象平面曲綫那样給出[199—201]。这里也得出与(2)相似的弧长公式:

$$s=\overset{\frown}{AB}=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$$

等等。所有对平面曲綫所說过的都可搬到这里来，几乎沒有什么改变。我們不必再对此多講，就来举几个例子罢。

1) 螺旋綫: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ct.$

既然这里

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{a^2+c^2},$$

則曲綫由点 $A(t=0)$ 至点 $M(t$ 任意$)$的弧长为

$$s=\overset{\frown}{AM}=\int_0^t\sqrt{a^2+c^2}\,dt=\sqrt{a^2+c^2}\,t.$$

只要記得螺旋綫当其所附托的圓柱面摊平时隨着变成一条斜直綫，这个结果就成为明显的事情。

2) 曲綫: $x=R\sin^2t,\ y=R\sin t\cos t,\ z=R\cos t$, 而 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

我們有

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=R\sqrt{1+\sin^2t}.$$

在这情形全曲綫之长可表为第二类完全椭圓积分

$$S=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2t}\;dt=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2t}\;dt=$$

$$=\sqrt{2}\,R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2t}\;dt=\sqrt{2}\,R\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

§ 3. 力学及物理上的数量的計算

204. 定积分应用程式 講定积分在力学、物理及技术范圍的

应用之先，宜預先明了寻常应用問題中引到定积分的途徑。因此我們略述积分应用的一般程式，而以已經討論过的几何問題实例作說明。

我們設想要来决定一个常数 Q(几何的或其他的)，联系着一个区間 $[a, b]$。在此設对 $[a, b]$ 的每个分区間 $[\alpha, \beta]$ 都有常数 Q 的一部分与之相应，如此区間 $[a, b]$ 划分为分区間时常数 Q 也就跟着划分为相应部分。

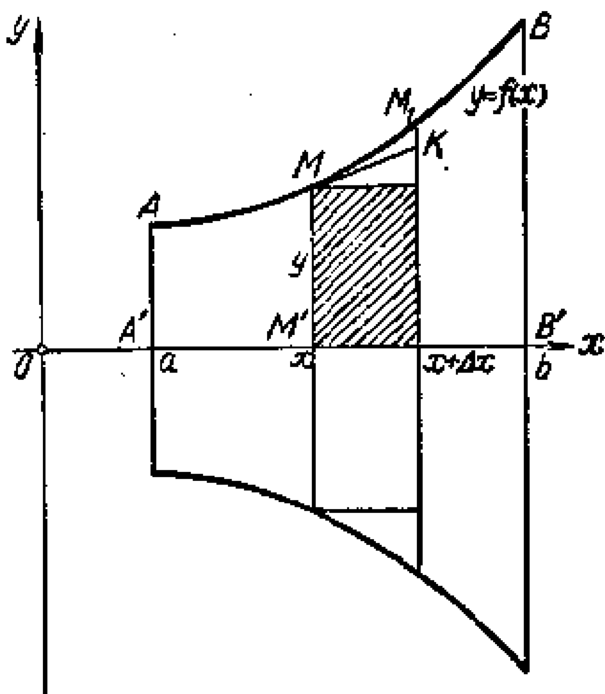


图 89.

說得精确一点，就是"区間函数" $Q\{[\alpha, \beta]\}$ 具有可加性，如此区間 $[\alpha, \beta]$ 如果由部分区間 $[\alpha, \gamma]$ 及 $[\gamma, \beta]$ 所組成，則

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

現在問題是要計算其相应于全区間 $[a, b]$ 的值。

我們取平面曲綫 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 为例 (图 89)。于是：1) 曲綫 AB 之长 S，2) 曲綫梯形 $AA'BB'$ 所圍面积 P 及 3) 这梯形繞 x 軸的迴轉体之体积 V，三者都是所說类型的数量。不难看出它們所引起的是些怎样的"区間函数"。

我們来考慮数量 Q 相应于"元素区間" $[x, x+\Delta x]$ 的"元素" ΔQ。由問題的条件出发我們試給 ΔQ 找一个象 $q(x)\Delta x$ 这样的近似式，是 Δx 的一次式，而它与 ΔQ 也許只差一比 Δx 高阶的无穷小。換句話說，由无穷小元素(在 $\Delta x \to 0$ 时)分出其主部。显然，此时近似式

$$\Delta Q \doteq q(x)\Delta x \tag{1}$$

的相对誤差将随 Δx 而趋于 0。

如此，在例 1)里弧 $\overset{\frown}{MM_1}$ 的元素可代之以 MK 这一段切綫，而由 ΔS 分出一次部分

$$\sqrt{1+y_x'^2}\,\Delta x=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x.$$

在例 2)里自然 ΔP 这窄条可代之以內矩形，其面积为

$$y\Delta x=f(x)\Delta x.$$

最后，在例 3)里由元素片 ΔV 分出其主部圓柱形，其体积为

$$\pi y^2\Delta x=\pi[f(x)]^2\Delta x.$$

在所有三种情形不难証明，由这样代換所生誤差恒为比 Δx 高阶的无穷小。

只要这样一做，就可以断言所求的数量 Q **精确地**由这个积分所表出：

$$Q=\int_a^b q(x)dx. \tag{2}$$

要說明这一点，我們将区間 $[a,\ b]$ 用 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n-1}$ 諸点分为元素区間

$$[a,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,\ [x_i,x_{i+1}],\ \cdots,\ [x_{n-1},b].$$

既然每一区間 $[x_i,x_{i+1}]$ 或 $[x_i,x_i+\Delta x_i]$ 有 Q 的一个元素部分与之相应，而这部分近似地等于 $q(x_i)\Delta x_i$，則整个所求的数量 Q 可近似地由

$$Q\doteq\sum_i q(x_i)\Delta x_i$$

这个总和所表出。所得之值其精确度将随区間的变小而增高，如此 Q 显然就是上面那总和的极限，卽事实上由定积分 $\int_a^b q(x)dx$ 所表出。

这完全概括了所考慮的三个例子。虽然上面我們是以稍稍两

样的方式得出了 S, P, V 諸量的公式，但这是因为我們的問題不仅在其計算，同时也在按早先所給定义証明其存在。

如此，整个問題就成了要建立近似等式(1)，它通常写成这样形状：

$$dQ = q(x)\,dx. \tag{3}$$

然后只剩下将这些“元素”“加起来”，而得公式(2)。

要注意的是，这里用积分而不用寻常的和，这一点是很重要的。和只能給出 Q 的近似式，因为它上面反映出个别的(3)型等式的誤差；借助由和得出积分的极限过程則免除了誤差而导至完全精确的結果。如此，先为了簡单起見在元素 dQ 表出式中舍弃了高阶无穷小而分出主部，然后为了精确起見以积分替代求和，而所得結果就簡直成为精确的了。

但是，也可以由另一种观点来处理这个問題。以 $Q(x)$ 表示 Q 的相应于区間 $[a, x]$ 的变动部分，而 $Q(a)$ 我們自然可設其等于 0。显然，上面所考慮的“区間函数”能以怎样方式用这“点函数” $Q(x)$ 表出：

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

在我們各例中点函数是：1)变弧 $\overset{\frown}{AM}$，2)梯形 $AA'M'M$ 的变面积，及 3)这梯形的迴轉体的变体积。

ΔQ 就是函数 $Q(x)$ 的增量，而其主部 $q(x)dx$ 无非就是这个函数的微分。如此，以微分符号写出的等式(3)现在事实上就不是近似的而是精确的。由此也就立即得出所求的結果：

$$\int_a^b q(x)\,dx = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q.$$

可是我們要指出，在应用上比較方便而有效的还是无穷小元素求和的观念(萊卜尼茲)——連同所指的极限过程。

205. 迴轉面面积 我們就第一个例来应用所說的程式以考慮

一个几何問題——迴轉面面积的計算。

我們在此还不能以一般形式来建立曲面(非平面)面积概念。这将在第二卷里講。目前我們只能学会計算迴轉面的面积，認为它是存在的并且是具有可加性的。以后我們将知道，所得到的公式可納入一般曲面面积公式成为一个特例。

如此，設我們在平面 xy 上（就在上半个平面上）有一条曲綫 AB，由

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{4}$$
$$(t_0\leqslant t\leqslant T)$$

这样的方程所給出。这里 φ 及 ψ 是参变函数，連同其导函数都是連續的。为簡单計設其为非閉曲綫并无重点。

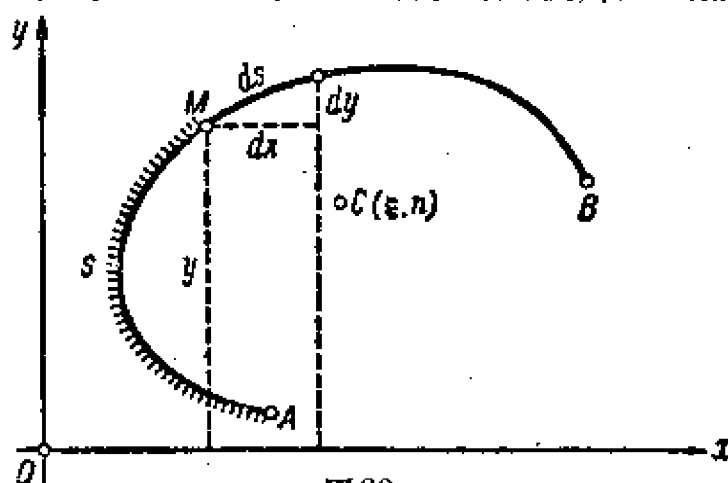


图 90.

在当前情形宜取弧 s 作参变数而以点 $A(t_0)$ 作計算弧长的起点，如此表出式化为

$$x=\Phi(s),\quad y=\Psi(s)$$
$$(0\leqslant s\leqslant S), \tag{5}$$

这在 **202** 段已經講到过。这里如以 S 表全曲綫 AB 之长，則参变数 s 由 0 变到 S。

問題就是要来决定由曲綫 AB 圍繞 x 軸迴轉所得曲面的面积 Q。讀者要注意，这里 s 就是自变数，其变化区間为 $[0, S]$。

如果分出曲綫的元素 ds(图 90)，則可将它近似地看作是直綫的并且算出其相应面积元素 dQ 为以 ds 为母綫以 y 及 $y+dy$ 为上下底半徑的截圓錐面积。于是按中学教程中的熟悉公式有

$$dQ=2\pi\frac{y+(y+dy)}{2}ds.$$

但这还不是我們所需要的公式——其两无穷小之积 $dy\cdot ds$ 須舍去。我們得出一个对 ds 成一次式的公式

$$dQ=2\pi y ds,$$

由此才可以求"总和"而終于得出

$$Q=2\pi\int_0^S y ds, \tag{6}$$

这里 y 要理解为出现于(5)式的函数 $\Psi(s)$.

如果回到我們这曲綫的一般参变式表出法(4)，则在上列积分中作变数替换[参閱186段，(2)]，将它变成

$$Q=2\pi\int_{t_0}^{T} y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2\pi\int_{t_0}^{T}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{6a}$$

特例，如果曲綫由显式方程 $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ 所給出，如此 x 成为参变数，则我們将有：

$$Q=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{6б}$$

例 1) 試求球带的面积。

設有一个以原点为中心、以 r 为半徑的半圓圍繞 x 軸旋轉，由圓的方程我們有 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，并且

$$y_x'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y_x'^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$y\sqrt{1+y_x'^2}=r.$$

在这情形，端点横坐标为 x_1 及 $x_2>x_1$ 的圓弧迴轉所成的球带面积按公式(6б)为

$$Q=2\pi\int_{x_1}^{x_2} r\,dx=2\pi r(x_2-x_1)=2\pi rh,$$

这里 h 是球带的寬(高)。如此，球带面积等于大圓周长与带寬之乘积。

特例，在 $x_1=-r$，$x_2=r$ 时，也即 $h=2r$ 时，我們得出整个球面的面积 $Q=4\pi r^2$。

2）試求旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$之弧迴轉所成的面积。

既然 $y=2a\sin^2\frac{t}{2}$，$ds=4a\sin\frac{t}{2}dt$，則

$$Q=2\pi\int_0^{2\pi}4a^2\sin^3\frac{t}{2}dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{\cos^3 u}{3}-\cos u\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

206. 曲綫的靜力矩及重心的求法 大家知道，一个質量为 m 的質点对一个軸的靜力矩 K 就等于質量 m 乘質点与軸的距离 d。一組 n 个質量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的同平面質点，其与軸的距离各为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，則其靜力矩由下面这个总和所給出：

$$K=\sum_i m_i d_i.$$

在此落在軸的一边的点的距离取正号，另一边的点的距离取負号。

如果質量不是集中在个別的点上而是連續地分布在綫上或平面图形上，則此时表出靜力矩的和要代之以积分。

我們来講沿某一平面曲綫 AB 分布的質量对 x 軸的靜力矩 K_x 的定义（图 90）。在此我們假設曲綫是均匀的，如此它的綫性密度 ρ（即单位長度上的質量）是常数；为簡单起見我們甚至就計 $\rho=1$（在相反情形只須将所得結果乘以 ρ）。在这些假設之下曲綫弧質量就直接以其長来量度，而靜力矩概念乃获得純几何的性質。今后我們説到曲綫的靜力矩（或重心）而不提其質量分布情况时，則一般总指的是在所說假設之下来定义靜力矩（或重心）。

我們重新分出曲綫的某一元素 ds（其質量也以 ds 一数来表出）。将这个元素近似地看作是一个質点，与軸成距离 y，如此得

出其静力矩表出式

$$dK_x = yds.$$

把这些元素静力矩都加起來，而取弧 s 作自变数，以点 A 作計算弧長的起点，如此我們得到

$$K_x = \int_0^S yds.$$

对 y 軸的矩也可以同样方式表出：

$$K_y = \int_0^S xds.$$

当然，这里假設 y(或 x)是以 s 表出的。实际上在这些公式里 s 則以曲綫表出式中的自变数 t, x, 或 θ 表出。

有了静力矩 K_x 及 K_y，我們就容易确定其重心 $C(\xi, \eta)$ 的位置。点 C 具有这样的性質：如果将曲綫的全"質量" S(此数也就表示曲綫之长)都集中于該点，則該質点对任何軸的矩与全曲綫对同軸的矩相等；特别是，如果考慮曲綫对坐标軸的矩，則我們求得

$$S\xi = K_y = \int_0^S xds, \quad S\eta = K_x = \int_0^S yds,$$

由此有

$$\xi = \frac{K_y}{S} = \frac{\int_0^S xds}{S}, \quad \eta = \frac{K_x}{S} = \frac{\int_0^S yds}{S}. \tag{7}$$

由重心縱坐标 η 的公式我們可得出一个奇妙的几何推論。事实上，我們有

$$\eta S = \int_0^S yds,$$

由此得

$$2\pi\eta\cdot S=2\pi\int_0^S y ds;$$

但这等式的右边是由曲綫 AB 繞 x 軸迴轉而得的曲面面积 Q[205段(6)]，等式左边的 $2\pi\eta$ 則表示該曲綫重心繞同軸迴轉时所描出的圓周之长，而 S 为該曲綫之长。如此，我們导致下面这个古尔丁氏定理[①]：

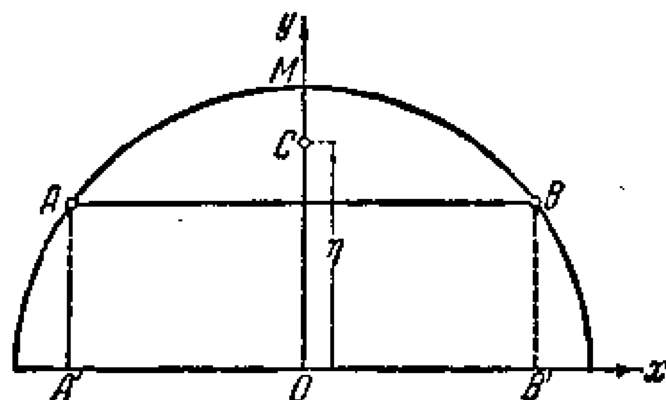


图 91.

一曲綫圍繞一与它不相交的軸迴轉，如此所得迴轉面的面积即等于該曲綫弧长乘以該曲綫重心 C 所描出的圓周之长(图90)。

由这个定理可以决定曲綫重心的坐标 η，只要知道其长 S 及其迴轉面面积 Q。这里是几个这种例子：

1) 利用古尔丁定理来决定半徑为 r 的圓弧 AB 的重心位置(图 91)。

既然这弧对称于通过其中点 M 的半徑 OM，則其重心 C 即在这半徑上，而要完全决定重心的位置只要求出它与中心 O 的距离 η 就行了。我們取定了軸，如图所示，并以 s 表弧 $\overset{\frown}{AB}$ 之長，而以 h 表其弦 $AB\ (=A'B')$。由該弧繞 x 軸迴轉得一球片，其面积 Q 我們知道[205 段，1)]等于 $2\pi rh$。按古尔丁定理則該面积也等于 $2\pi\eta s$，如此 $s\eta=rh$ 而 $\eta=\dfrac{rh}{s}$。

特例，对于半圓則 $h=2r$，$s=\pi r$ 而 $\eta=\dfrac{2}{\pi}r\doteq 0.637r$。

2) 試决定这一枝旋輪綫的重心(79 图)：

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由对称性，显然 $\xi=\pi a$。于是由 205 段，例 2)容易得出：$\eta=\dfrac{4}{3}a$。

---

① 保尔·古尔丁(P. Guldin, 1577—1643)是瑞士数学家，但他的两个定理(參閱下段)紀元后三世紀的杰出数学家巴普氏就已經知道了。

207. 平面图形的静力矩及重心的求法 我們来看平面图形 $AA'B'B$ (图 92)，它上方由曲綫 AB 所围，这曲綫則由显式方程

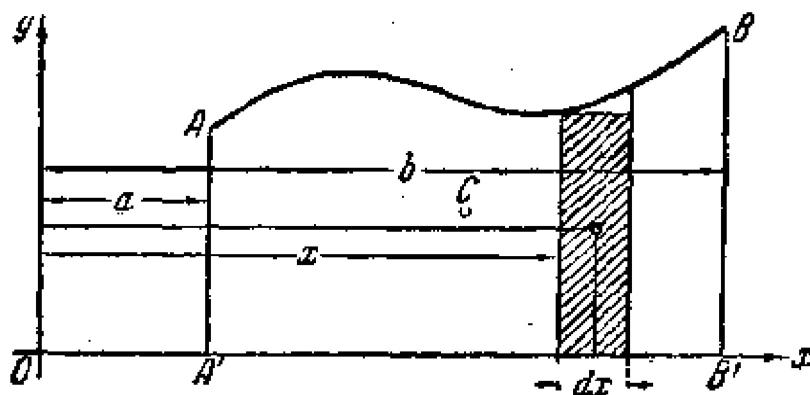


图 92.

$y=f(x)$所給出。我們假設沿此图形所分布的質量是均匀的，如此其表面密度 ρ (卽单位面积上的質量)是一个常数。不致太减弱一般性可認为 $\rho=1$，卽該图形任何部分的質量都可用其面积来量度。今后单說平面图形的静力矩(或重心)时恒作如此理解。

要决定这图形对坐标軸的静力矩 K_x, K_y，我們也按尋常方式分出这图形的一个无限窄的縱条面积元素(参閱附图)。把这窄条近似地看作矩形，如此我們看出它的質量是 ydx(可用与面积相同的数値表出)。要决定相应的元素矩 dK_x, dK_y 我們假設全条的質量都集中在它的重心上(卽矩形的中心上)，如此我們知道并不改变静力矩的大小。所得質点与 x 軸相距 $\frac{1}{2}y$，与 y 軸相距 $\left(x+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}dx\right)$；后一式可直代之以 x，因为 $\frac{1}{2}dx$ 乘以質量 ydx 后将成一个二阶无穷小。如此，我們有

$$dK_x=\frac{1}{2}y^2dx, \quad dK_y=xydx.$$

把这些元素矩加起来，結果得

$$K_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx, \quad K_y=\int_a^b xydx, \tag{8}$$

而 y 在此自然理解为一个出现于曲綫 AB 的方程中的函数 $f(x)$.

也如曲綫的情形一样，现在依据这图形对坐标軸的静力矩也就容易决定其重心的坐标 ξ, η。如果以 P 表示該图形的面积（所以也就是質量），則根据重心的性質我們得出

$$P\xi=K_y=\int_a^b xy\,dx,\quad P\eta=K_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

由此有

$$\xi=\frac{K_y}{P}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{P},\quad \eta=\frac{K_x}{P}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{P}.\tag{9}$$

在当前的情形我們也可以由重心縱坐标 η 的公式得出一个重要的几何推論。事实上，由这公式我們有

$$2\pi\eta P=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

这等式右边表示图形 $AA'B'B$ 繞 x 軸的迴轉体的体积 V [**198** 段(9)]，左边則表示此图形面积 P 与其重心所描出圓周长 $2\pi\eta$ 之乘积。由此得出这第二古尔丁定理：

平面图形繞与它不相交的軸綫所成迴轉体之体积即等于該形面积与其重心所历圓周长之积：

$$V=P\cdot 2\pi\eta.$$

要注意公式(8)、(9)可推广到上下都由曲綫所圍的图形的情形(参閱图 75)。例如，对这情形

$$K_x=\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx,\quad K_y=\int_a^b x(y_2-y_1)\,dx;\tag{8a}$$

由此已經可以明白如何变换公式(9)。如果回忆一下第 **196** 段的公式(5)，則不难看出古尔丁定理对这情形也成立。

例 1) 試求拋物綫 $y^2=2px$, x 軸及相应于横坐标 x 的縱坐标綫所包圍的图形的靜力矩 K_x, K_y 及重心坐标。

既然 $y=\sqrt{2px}$, 則按公式(8)

$$K_x=\frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}px^2,\quad K_y=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{\frac{5}{2}}.$$

另一方面[196 段, (4)], 面积

$$P=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2p}}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

在这情形, 按公式(9),

$$\xi=\frac{3}{5}x,\quad \eta=\frac{3}{8}\sqrt{2px}=\frac{3}{8}y.$$

利用 ξ 及 η 之值不难按古尔丁定理来求当前这个图形繞縱坐标軸或終坐标綫的迴轉体体积。例如, 就后一情形而言, 既然重心与迴轉軸的距离是 $\frac{2}{5}x$, 則所求体积为 $V=\frac{8}{15}\pi x^2y$。

2) 試求一枝旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 及 x 軸所包圍的图形的重心。

利用 196 段 4) 及 198 段 2) 不难按古尔丁定理来决定 $\eta=\frac{5}{6}a$。由对称性: $\xi=\pi a$。

208. 力功 設有一点 M 沿直綫运动(为簡单計暫限于这种情形), 在該点上施一个定力 F 而使沿同一直綫移动一段路程 s。由力学原理讀者知道, 此时該力之功 W 可表为乘积 $F\cdot s$。

但是常常有这样的情形: 力的大小并不保持常数而随点不断变化, 并且功的表出又要訴諸定积分。

設动点所經历路程 s 为自变数; 在此假設該点 M 的初始位置 A 相应于 $s=s_0$ 一値, 而終点 B 相应于 $s=S$ 一値 (图 93)。区間

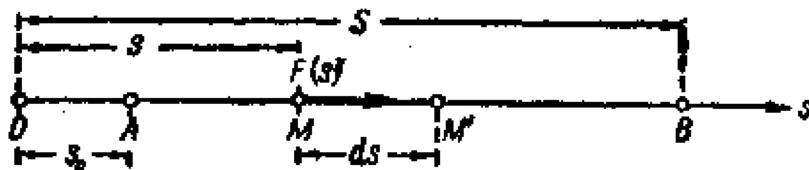


图 93.

$[s_0, S]$中每个值 s 都相应于动点的一个一定的位置及 F 的一个定值，如此，F 可以看作是 s 的函数。取点M处于某一由路程的 s 值所决定的位置，我們現在来求相应于路程由 s 至 $s+ds$ 的增量 ds 的功素的近似表出式，此时点 M 移到了临近位置 M'（参閱附图）。于位置 M 在該点上施以定力；既然，在 ds 很小时該点由 M 移至 M' 时 F 的变化也很小，則我們不妨将 F 近似地看作常数而求得位移 ds 的功素表出式

$$dW = F \cdot ds,$$

如此全功W可由这个积分表出：

$$W = \int_{s_0}^{S} F ds. \tag{10}$$

例 我們举例来应用公式(10)以計算一端固定的彈簧被拉长(或压縮)时的功(图 94)；例如在火車厢緩冲器的計算中就遇到这类問題。

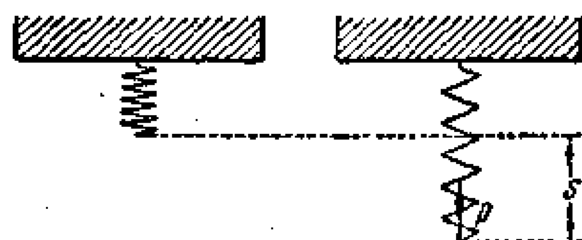


图 94.

大家知道，彈簧伸长 s（只要不拉扯过度）所成張力 p，其大小与伸长量成比例，如此有$p=cs$，这里 c 是一个常数，取决于彈簧的彈性（“剛性”）。拉彈簧的力应胜过此張力。如果只計算所施之力消耗于这上面的部分，則伸长量由 O 增至 S 时其功可如此表出：

$$W = \int_0^S p ds = c \int_0^S s ds = \frac{cS^2}{2}.$$

設以 P 表示相应于彈簧伸长量的張力或克服它的力的最大值（即等于 cS），則我們可以把功表成这样：

$$W = \frac{1}{2} PS.$$

如果力 P 一下子施于彈簧的自由端(例如悬一重物)，則其位移 S 产生两倍大的功 PS。我們知道，只有其一半耗費于彈簧的伸长，另一半則化为彈簧及所悬重物的动能。

第十三章　微分学的一些几何应用

§1. 切綫及切面

209. 平面曲綫的解析表出法　本章只举例稍講一些微分学的几何应用——并着重于平面上的情形。这类应用的系統研究属于微分几何学范圍，而自成一个独立的数学科目。

首先我們重提一下平面曲綫的各种解析表示法(讀者在解析几何里已学过)，在此假設以一个直角坐标系做基础①。

1°. 前面我們屡次提到过象

$$y=f(x) \qquad [\text{或}\quad x=g(y)] \tag{1}$$

这样的方程并討論过其相应的曲綫。这种一个流动坐标直接表为另一流动坐标的单值函数的曲綫給出法叫做曲綫的显式給出法(或表出法)，它特別簡单而明了。

例子可取抛物綫 $y=ax^2$。

2°. 但是，在解析几何里曲綫也常常用不对 x 或 y 解出的方程来給出：

$$F(x,y)=0, \tag{2}$$

这叫做曲綫的隐式方程。

例　椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$。有时我們能把方程(2)的一个变数以另一个表出，比方說 y 以 x 表出，而将曲綫(或其一部分)表为显式方程(1)。例如，在椭圓的情形：

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (-a\leqslant x\leqslant a).$$

① 我們在此作一次总的声明：凡本章所涉及的函数通例均假設其为連續的并对其自变数有連續导函数；必要时我們甚至要求其有高阶的連續导函数。

在别的情形，虽然 y 对 x（或 x 对 y）的相倚关系由方程(2)所决定，并在某些条件之下[①]存在有满足方程(2)的单值函数(1)，甚至可以說这"隐"函数連續且有連續导函数，但它的显式却写不出来。例如，笛卡尔叶形綫就是这样的情形：$x^3+y^3-3axy=0$（图 95）。

3°. 前面講过，象

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \tag{3}$$

这样确定点的流动坐标对某参变数 t 的相倚关系的方程也在平面上决定一条曲綫。这叫做参变方程；它們給出曲綫的参变表示法。

第一个例子是椭圓的参变表示法：

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,$$

在参变数 t（其几何意义看图 96 就可明白）由 O 变至 2π 时，椭圓循逆鐘針方向被描出，以大軸端点 $A(a, 0)$ 为起点。

第二个例子是我們屡次提到过的旋輪綫：

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t).$$

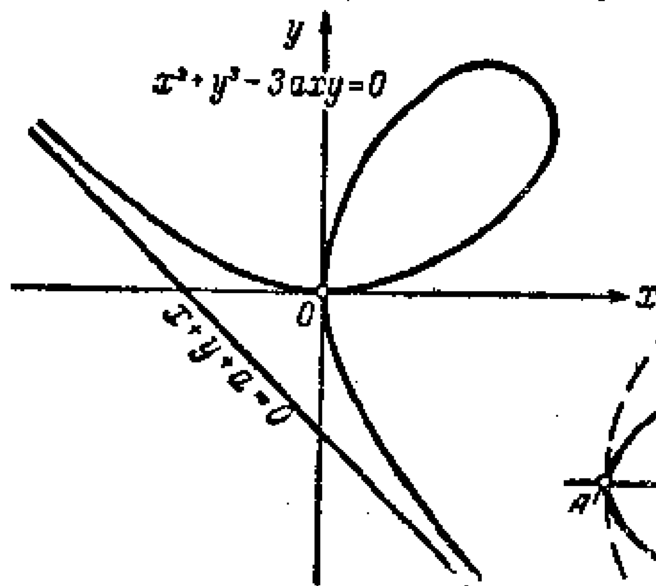


图 95.

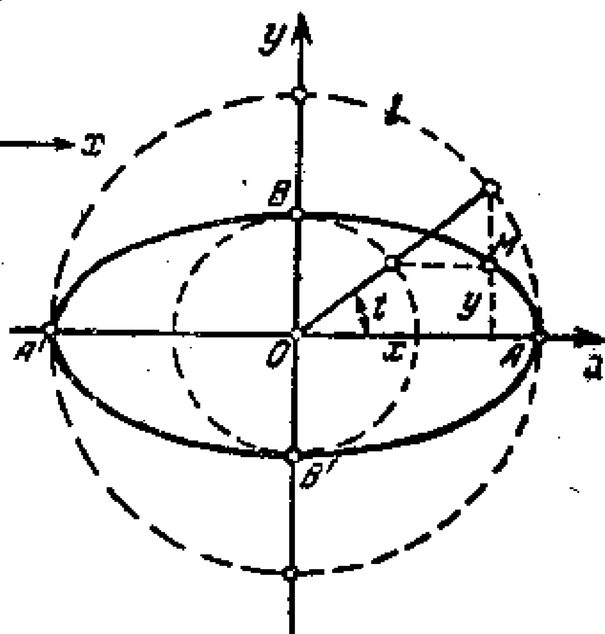


图 96.

① 参閱第二卷第十九章。

它就是一个圓沿一直綫滾动时圓上一点所經历的軌綫(图97)。这里做参变数的就是动半徑 DM 与其原始位置 OA 間的角 $t=\measuredangle NDM$。在 t 由 O 变至 2π 时該点描出一段弧，如图所示。相应于 t 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 的全曲綫則由无穷多段这种弧所組成。

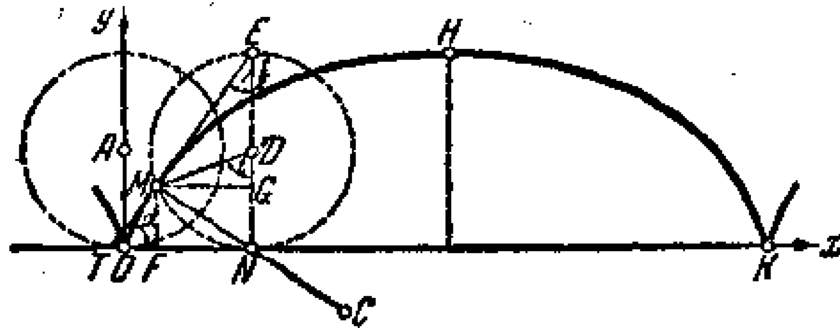


图 97.

210. 平面曲綫的切綫 切綫这个概念我們已經屡次提到过[例如見 **77** 段]。一条由显式方程

$$y=f(x)$$

所給出的曲綫在其每点(x, y)上都有一条切綫，其斜率 $\operatorname{tg}\alpha$ 由公式

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_x=f'(x)$$

給出。如此，切綫的方程有这样的形式：

$$Y-y=y'_x(X-x). \tag{4}$$

这里(及以下)X, Y 都表示流动坐标，而 x, y 表示切点的坐标。

通过切点与切綫垂直的所謂法綫，其方程也不难求得如下：

$$Y-y=-\frac{1}{y'_x}(X-x)$$

或

$$X-x+y'_x(Y-y)=0. \tag{5}$$

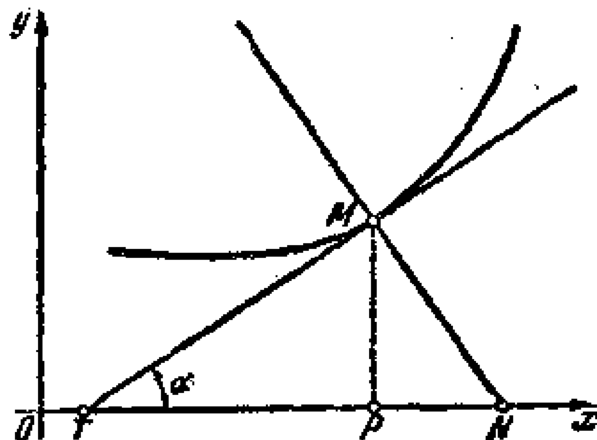


图 98.

我們来看几个与切綫及法綫相关的綫段——即綫段 TM 及 MN 以及其在 x 軸上的投影 TP 及 PN(图 98)。后两个各叫做次切綫及次法

綫而以 sbt(subtangens) 及 sbn (subnormal) 表之。在方程(4)及(5)中設 $Y=0$,不难算出

$$sbt=TP=\frac{y}{y'_x},\quad sbn=PN=yy'_x. \tag{6}$$

1) 例如，对于抛物綫 $y=ax^2$ 我們有:

$$sbt=\frac{y}{y'_x}=\frac{ax^2}{2ax}=\frac{x}{2},$$

这是一个我們已經知道的結果(参閱第一分册 146 頁底注)。

現在我們来看方程 (2) 所表的曲綫隱式表示法。如果假設这方程在我們所关心的点的邻近等价于一个象(1)[①] 那样的方程,则曲綫在这个点上显然有一条切綫(4)。在第 **141** 段 4) 我們已經会把"隐函数"(它是不直接知道的) 的导数 y'_x 以已知的导数 F'_x 及 F'_y 表出;即我們有

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},$$

这里假設 $F'_y\neq0$[顺便指出，这恰好就是使方程(2)在曲綫的所考慮的点邻近等价于(1)式方程的条件],将所求得 y'_x 的表出式代入切綫方程,經简单变化后就得到这个方程式:

$$F'_x(x,y)(X-x)+F'_y(x,y)(Y-y)=0. \tag{7}$$

既然这个方程对 x 和 y 是完全对称的，显然 x 与 y 变换后也得出同一个切綫方程，只是这回要假設 $F'_x\neq0$。只要在所考慮的点上两个导数 F'_x 及 F'_y 同时等于 0,等式(7)就成一恒等式,并且不复成一确定的直綫的方程了。在这情形点(x,y)叫做曲綫的奇点;在奇点上曲綫实际不能有确定的切綫。

例 2) 抛物綫: $y^2=2px$ (图 99)。把 y 看作 x 的函数而将此等式微分之,得 $yy'_x=p$。如此[参閱(6)]，抛物綫的次法綫是一个常数。由此我們有了一种求作抛物綫的法綫以及切綫的简单方法。

---

① 也参閱第二卷第十九章。

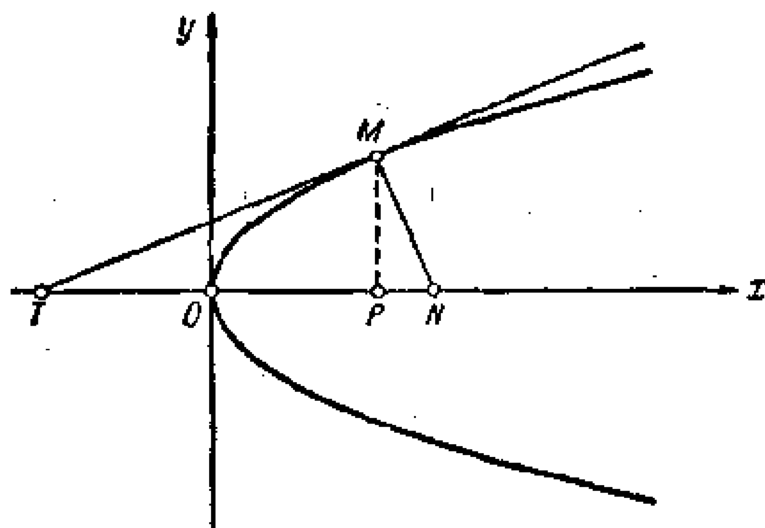


图 99.

但是，在这情形次切綫也可簡单地表出——只要将拋物綫方程两边以剛才所得等式除之，立即得出：

$$\frac{y}{y'_x}=2x \text{ 即 } sbt=2x.$$

3）橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（图 100）.

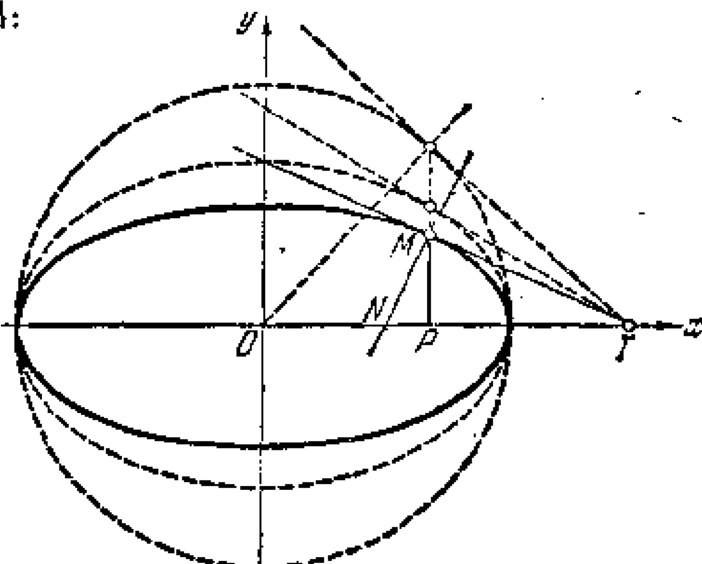


图 100.

按公式(7)我們有这样的切綫方程：

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0.$$

結合橢圓方程，我們可将此切綫方程化为更簡单的形式：

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

在此令 $Y=0$，我們求得 $X=\frac{a^2}{x}$. 如此，切綫与 x 軸的交点 T 与 y 无关，也与 b 无关。相应于种种 b 值的各橢圓，其在横坐标同为 x 的点上的切綫全都通过 x 軸上的同一个点 T。既然在 $b=a$ 时得一个圓，它的切綫是很容易画的，則点 T 立即可以定出，而由此导出橢圓切綫的一种簡单作法，看图 100 就可明白。

4）对于笛卡尔叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 方程左边两个偏导数

$$3(x^2-ay) \text{ 及 } 3(y^2-ax)$$

在坐标原点上同等于 0；由图 95 可看出，該曲綫在这个奇点上的确沒有确定的切綫。

最后，我們来討論由参变方程(3)所給出的曲綫。如果在所取的点上导数 $x'_t=\varphi'(t)$ 异于 0，比方說大于 0 罢，則它在这点邻近的值也是正的；这就是說，函数 $x=\varphi(t)$ 是单調上升的[111 段]，于是 t 也就是 x 的升函数：$t=t(x)$[71段]，其导函数为 $t'_x=\frac{1}{x'_t}$[80 段]。以这 x 的函数替代方程 $y=\psi(t)$ 中的 t，我們就得出在曲綫的某小区域内 y 成 x 的函数：

$$y=\psi(t(x))=f(x),$$

它也有导函数。如此可見，在接近所取那个点的地方，曲綫的一段也能以显式方程表出：在这情形該点上有切綫。

切綫的斜率可表出如下：

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

将此式代入切綫方程(4)，我們不难把它化为这比例形式：

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}. \tag{9}$$

但是，两边的分母常常乘以 dt 而将切綫方程写成这样：

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}. \tag{10}$$

如果我們在所取的点上导数 $y'_t=\psi'(t)$ 异于 0，則 x 和 y 交换后可得出同一个切綫方程。只有在所給点上两个导数 x'_t 及 y'_t 同时等于 0 时我們的論証才不适用。这种点也称为曲綫的奇点：在这种点上可以沒有切綫。恰好这时候方程(9)或(10)也就失去了意义：两个分母都成 0。

5) 举个例，我們来考察旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$（图 97）的切綫作法問題。在这情形我們有

$$x'_t=a(1-\cos t),\quad y'_t=a\sin t,$$

如此相应于 $t=2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 的都是奇点。除去这些点以外，按公式(8)，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

并且可以取 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$。

我們記得（图 97），$t=\measuredangle MDN$，如此 $\measuredangle MEN=\frac{t}{2}$。如果延长直綫 EM 使与 x 軸相交于 T，則 $\measuredangle ETx=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}=\alpha$。所以，連結旋輪綫上一点与相应位置滚动圓的最高点的直綫 ME 也就是切綫。由此显然，直綫 MN 就是法綫。

法綫被截于 x 軸的一段 n 的表出式今后对我們将有用处，它容易由直角三角形 MEN 得出。即

$$n=MN=2a\sin\frac{t}{2}.$$

这回在奇点上切綫也是存在的——它們平行于 y 軸；但是对于这些点的切綫而言曲綫的形态是不寻常的：有尖（"尖点"）。

211. 切綫的正方向 以前我們只凭斜率 $\operatorname{tg}\alpha$ 来决定曲綫的切綫位置，而不分辨切綫本身的两个相反的方向：$\operatorname{tg}\alpha$ 对这两个方向是一样的。但是，在某些研究中表現出有确定一种方向的必要。

我們想象有一条曲綫，由参变方程(3)所給出，并且来考虑它的一个"寻常"点，即非奇点。在这个点上，如我們在 202 段已看到，存在有导数

$$x'_s=\frac{dx}{ds},\quad y'_s=\frac{dy}{ds},$$

而

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \tag{11}$$

这不难由基本关系

$$dx^2+dy^2=ds^2$$

除以 ds^2 得出[**202** 段(6)]。

在渡向标题所列問題的本質之先，我們来建立一个輔助命題，它以后对我們将有用处。

輔助定理 設M是曲綫的一个尋常点(图 101)。如果以M_1表示同一曲綫的一个变动点，則在M_1趋于M时MM_1弦长与$\overset{\frown}{MM_1}$弧长之比将趋于1：

$$\lim_{M_1\to M}\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=1. \tag{12}$$

我們取弧作参变数，并設点M相应于弧值s，而M_1相应于$s+$ $+\Delta s$。更設該二点的坐标各为x, y及$x+\Delta x, y+\Delta y$。于是$\overset{\frown}{MM_1}=$ $=|\Delta s|$，而$MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，如此

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta s|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

右边取$\Delta s\to 0$时的极限，按(11)我們就可得出所求的結果。

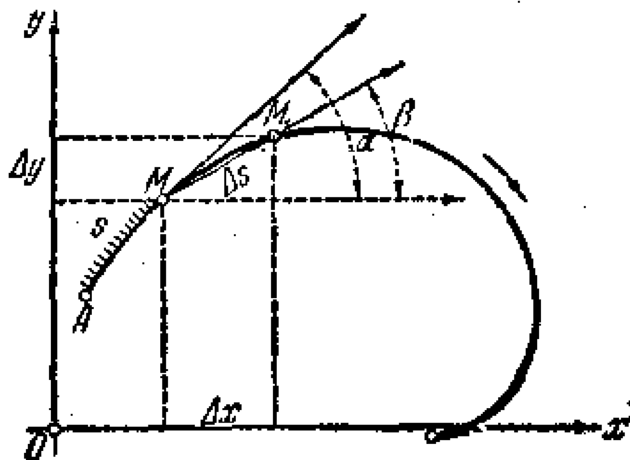


图 101.

如此，在所設条件下无穷小的弦和弧成为等价的。

現在設在所考慮的曲綫上取定了原点及計弧的一定方向；我們仍取弧作参变数，以決定曲綫上点的位置。

設所論的点M相应于弧s。如果賦s以正的增量Δs，則弧$s+\Delta s$決定一个新的点M_1，落在弧增大之側。我們賦割綫以M至M_1的方向并且以β表示割綫的这个方向与x軸正向所成的

角。将綫段 MM_1 投影到坐标軸上(图 101),按一个熟悉的投影定理我們得

投影 $_xMM_1=\Delta x=MM_1\cos\beta$, 投影 $_yMM_1=\Delta y=MM_1\sin\beta$,

由此有

$$\cos\beta=\frac{\Delta x}{MM_1},\quad \sin\beta=\frac{\Delta y}{MM_1}.$$

既然 $\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$, 則这些等式可以写成这样:

$$\cos\beta=\frac{\Delta x}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1},\quad \sin\beta=\frac{\Delta y}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}. \tag{13}$$

我們称切綫沿弧增大之側的方向为正向,說精确点,这正向的定义是:如前面所說那样规定了方向的射綫 MM_1 在 $\Delta s\to 0$ 时的极限位置就是切綫的正向。如果以 α 表示切綫正向与 x 軸正向間所成之角,則由(13)及(12)我們取极限得出

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds}. \tag{14}$$

这两个公式除 $2k\pi$ 不計外(k 为整数)已决定了角 α,所以的确由切綫的两个可能方向中定出其一,这就是正向。

212. 空間曲綫 这情形我們只簡略地提一提,因为与平面曲綫完全相似。

也如平面上一样,空间曲綫的变动点的坐标可以用一个参变数 t 的函数来給出:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t). \tag{15}$$

在 t 变化之下这些方程所給出的坐标上的点就描成該曲綫。

在空間曲线(15)的情形,切綫的决定法仍然与平面曲綫一样,我們除去导数 x'_t, y'_t, z'_t 同时为 0 时的曲綫奇点不予考慮,而取曲綫的任一个常点 $M(x,y,z)$,它相应于参变数值 t。賦 t 以增量 Δt,于是參变数增大后之值 $t+\Delta t$ 将相应于另一点 $M_1(x+\Delta x, y+$

$+\Delta y, z+\Delta z$)。割綫 MM' 的方程将成这个样子:

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z},$$

这里 X, Y, Z 是流动坐标。这些方程分母一律除以 Δt 后其几何意义仍不变:

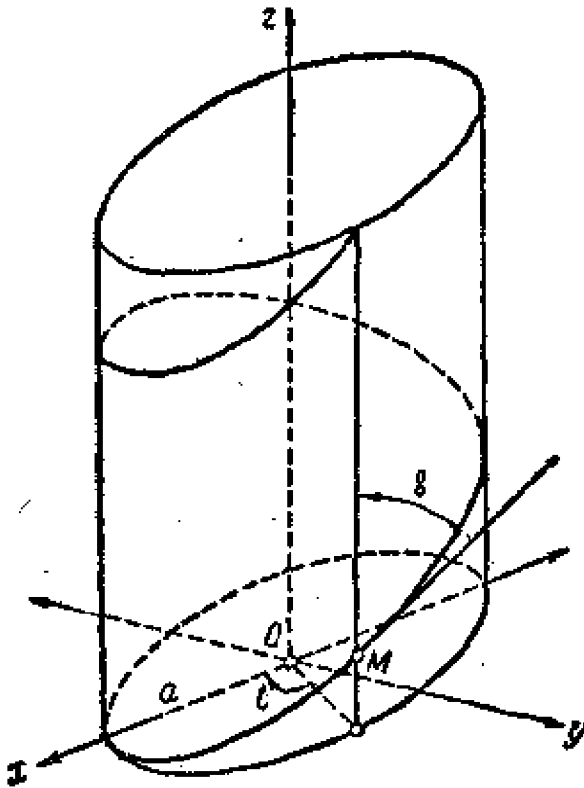


图 102.

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

如果这些方程在 $\Delta t\to 0$ 时的极限情形仍保持一定的意义，則由此确定了割綫的极限位置，即**切綫**。[①] 但取极限我們得

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{16}$$

而这些方程只要分母不全为 0 时，就的确表示一条直綫。如此，在每个**寻常**点上曲綫总有切綫，而由这些方程所表出。对于**奇**点則切綫倘成問題。

有时方程(16)便于写成

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{17}$$

它是由(16)分母遍乘 dt 而得。

如果以 α, β, γ 表示切綫与坐标軸間所成之角，則方向余弦可

---

① 我們取了 $\Delta t\to 0$ 时的极限，但可証明这就等价于所謂比較几何意味的命題 $MM_1\to 0$。

表成这样:

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}}.$$

根号前正負号的选擇就取决于切綫方向的选定。

举一个例,我們来看螺旋綫(图 102)

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct.$$

在这情形

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=a\cos t,\quad z'_t=c,$$

而切綫方程如下:

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}.$$

切綫的方向余弦是:

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

注意,这里 $\cos\gamma$ 是常数,所以 γ 也就是常数。如果设想螺旋线纏繞在直圓柱面上,則可以說,螺旋綫与圓柱的所有母綫都相交成一个定角。

对于空間曲綫,也如平面曲綫一样,可以取弧 s 作参变数以决定点的位置,而弧是由任意选定的原点沿一定的方向来計算的。切綫的正方向就选取弧增大之側的方向。对于寻常点而言則切綫正向的方向余弦可表出如下:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}\tag{18}$$

[参閱 211 段]。

213. 曲面的切面 我們已經处理过[124 段]由下列方程所給出的曲面:

$$z=f(x,y);\tag{19}$$

这就是曲面的显式給出法[1]。在解析几何里曲面常常以隐式方程来給出：

$$F(x, y, z)=0, \tag{20}$$

而不对任何一个变数解出。

例 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$（椭圆面），

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$（二次錐面）。

也如平面曲綫隐式給出法的情形一样，在某些条件之下[2]，这里方程(20)也成为等价于(19)式那样把一个坐标表为其余两个变数的函数的方程（这函数具有連續偏导函数），那怕这函数的显表出式我們并不能知道。

設 $M(x, y, z)$ 是曲面(20)上的任一点。通过M沿曲面作一条任意的曲綫而在所指定的点上作此曲綫的切綫；这种曲綫（及其切綫）有无穷之多。

通过点M沿曲面画种种曲綫，如果这些曲綫在点M的切綫全都落在一个平面上，則这个平面叫做該曲面在点M的切面，这里点M叫做切点。

沿曲面(20)所作曲綫一般可設想其能以(15)那样的方程解析地表出。既然該曲綫的全体点子都假設是落在曲面上的，則在方程(20)里的 x, y, z 各以函数 φ, ψ, χ 替代时該式必化为参变数 t 的恒等式。依 t 微分此恒等式[利用（一阶）微分不变式，第 **143** 段]，得：

$$F'_x \cdot dx+F'_y \cdot dy+F'_z \cdot dz=0, \tag{21}$$

这里可以特别取切点M的坐标 x, y, z 作为函数 F'_x, F'_y, F'_z 的自变

---

[1] 当然这里 z 的特殊地位是偶然的；曲面的显式給出也可以由这样的方程来表示：$x=g(y, z)$ 或 $y=h(z, x)$。

[2] 参閱第二卷第十九章。

数，而 dx, dy, dz 应理解为在相应 t 值上函数(15)的微分。另一方面，該曲綫在点 $M(x,y,z)$ 的切綫可用方程式(17)表出，其中 X, Y, Z 为流动坐标，而 dx, dy, dz 同剛才所說的一样。将(21)中的 dx, dy, dz 代之以(17)式中成比例的差数 $X-x, Y-y, Z-z$，我們終于得出等式

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \tag{22}$$

它对定义中所說任何切綫的所有点 z 都是成立的。如果在点 M 导数 F'_x, F'_y, F'_z 至少有一个是异于 0 的，则等式(22)就表示一个平面的方程，它就是切面。

当在所考虑的点上同时有

$$F'_x=F'_y=F'_z=0$$

的例外情形(这种点叫做奇点)，等式(22)就成一恒等式，而此时切面就不能存在了。

例 1) 椭圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

依据公式(22)及椭圓面方程本身得出切面方程如下：

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

2) 二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

其切面为

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

在錐面頂点(0, 0, 0)这个奇点上，此方程失去意义，而切面不存在。

曲面的法綫的方向余弦显然是（所謂法綫就是切面在切点上的垂直綫）：

$$\cos\lambda=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\mu=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\nu=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

显式方程(19)改写成了

$$z-f(x,y)=0$$

的形式则可看作方程(20)的一个特例。如果采用标准写法

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=q,$$

则对这情形切面方程(22)可写成这样：

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{23}$$

而法綫的方向余弦成为

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

§2. 平面曲綫的曲率

214. 凹向. 拐点 我們来考慮一条平面曲线及它上面的一个点、曲綫就算是由显式方程 $y=f(x)$ 所給出罢，如此該点可設为

$$M(x_0, f(x_0)).$$

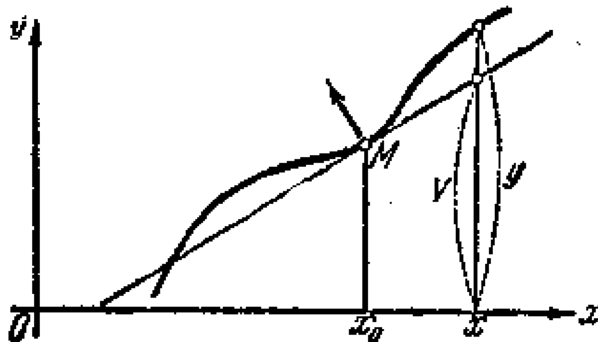


图 103.

如果在点M的充分小邻域内曲綫的所有点 z 都落在切綫的某一側，则我們說，在点M曲綫凹向切綫該側（图 103）。一个点如果在充分小邻域内横标 $x<x_0$ 时曲綫落在切綫一側，横标 $x>x_0$ 时落在另一側，则該点称为拐点。换句話說，如果在点 M 曲綫由切綫一側渡向另一側，或簡单点說，曲线

与切綫交叉(图 104)，則称該点为拐点。

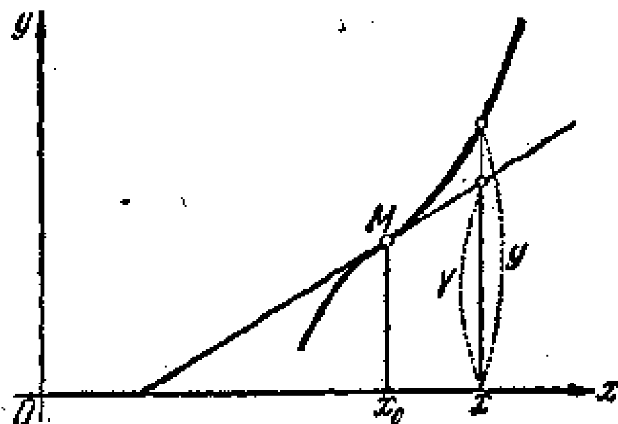


图 104.

既然在点 M 的切綫方程如此:

$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$①,

則为了解决凹向問題或拐点存在問題須考察差数

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-\\ -f'(x_0)(x-x_0)$$

在点 x_0 邻近的正負号，我們假設在这邻近存在有二阶連續导数 $f''(x)$。

先設 $f''(x_0)\neq 0$。应用带皮亚諾型余項的戴劳公式[107 段，(17)]而取 $n=2$ 我們得:

$$y-Y=\frac{f''(x_0)+\alpha}{2!}(x-x_0)^2,$$

这里 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to 0$。对充分接近 x_0 的 x 值这个差数保持 $f''(x_0)$ 的正負号，所以，在 $f''(x_0)>0$ 时曲綫在点 M 凹向上，而在 $f''(x_0)<0$ 时，凹向下。

如果 $f''(x_0)=0$，則右边只剩一項 $\frac{\alpha}{2}$，它与差数 $y-Y$ 同正負号。在这情形我們取拉格朗日形式的余項[106 段，(12)]并且也是取 $n=2$ 的情形:

$$y-Y=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,$$

这里或者 $x<c<x_0$，或者 $x_0<c<x$。如果在 x_0 近处二阶导数 $f''(x)$ (左边及右边都是)保持正号或負号，則差数 $y-Y$ 也就保持同一符

① 我們在此采用了与 210 段不同的表示法[参閱(4)]。但以前我們用 Y 表示切綫上流动点纵坐标是为了与曲綫上同横标 x 的点子的纵坐标 $y=f(x)$ 有所区别。

号，并且在点 M 各凹向上或向下。

反之，如果 $f''(x)$ 在通过点 x_0 时变号，则差数 $y-Y$ 也变号，而在点 M 有一拐点。在这情形点 M 就其充分小邻域而言看来把那些曲線凹向上的点与凹向下的点分开。①

例如我們来看这正弦綫：$y=\sin x$；这里 $y''=-\sin x=-y$。所以，在 $\sin x$ 保持正号(負号)的区間內正弦綫凹向下(上)。对 $x=k\pi$ (k 为整数)这样的值 y'' 等于 0，而在此变号；其相应点即正弦綫的拐点。反之，对于函数 $y=x^4$ 我們有 $y''=12x^2$，并且虽然在 $x=0$ 时二阶导数等于 0，但在其他 x 值它却保持正号，而曲綫到处是凹向上的。

对于拐点的存在(如果假設二阶导数存在) $y''=0$ 这一条件是必要的但不充分。

在这一点不难看出其与极值理論相似之处[参閱 112 段及后面]。

最后我們說，对于拐点也可以不考察二阶导函数 $f''(x)$ 在点 x_0 邻近的正負号而考察在点 x_0 本身的逐阶导数值 $f'''(x_0)$，$f^{(4)}(x_0)$，…。既然这里有关的論証完全与 117 段相似，故留給讀者自己去考慮。

注　拐点上曲綫的考察能使函数的作图比 115 段所說更为精密化。

215. 曲率概念　我們来考察由参变方程

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t) \tag{1}$$

所給出的无重点、无奇点的曲綫弧。如果在其每点上作一条切綫(比方說是正向的)，则由于曲綫的“弯曲”这切綫将随切点的变动而旋轉；这正是曲綫与切綫处处保持同一方向的直綫(与切綫重合)的差别所在。

---

① 有时这个性質被取作拐点定义的基础。这种定义不完全等价于本书所給的定义。

表現曲綫变化特征的重要因素就是这个在其各点上的“弯曲度”或“曲率”；这曲率可以用数表出。

設 $\overset{\frown}{MM_1}$（图 105）是曲綫弧；我們来看弧两端所作切綫 MT 及 M_1T_1（正向的），这是比較自然的，曲线的曲率以其单位弧长上切綫的迴轉角来表出，即以比率 $\frac{\omega}{\sigma}$ 来表出，这里角 ω 以弳为量度单位，而 σ 以选定的长度为单位。这个比率叫做曲綫弧的平均曲率。

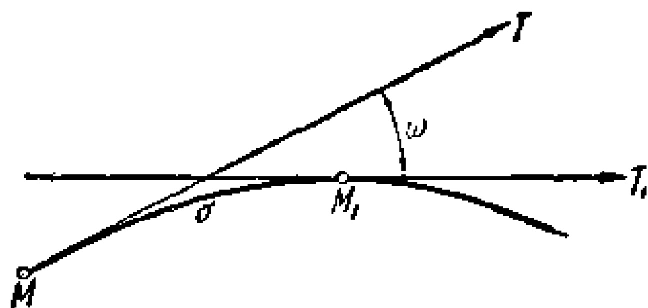


图 105.

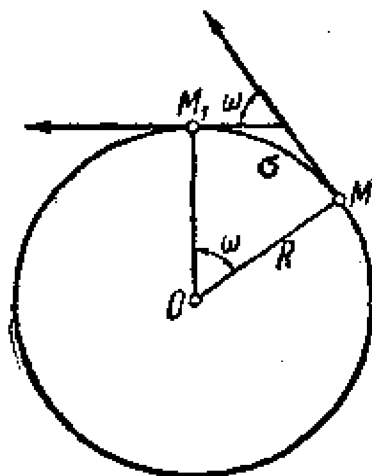


图 106.

在曲綫的不同部分其平均曲率一般是不同的。但是有一种惟一的曲綫，它的曲率却到处都一样：这就是圓[①]。事实上，对它我們恒有（图 106）

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R\omega}=\frac{1}{R},$$

不論是指哪一段圓弧而言。

由弧 $\overset{\frown}{MM_1}$ 的平均曲率概念我們可导致在一点的曲率。

所謂曲綫在点 M 的曲率乃指点 M_1 沿曲綫趋于 M 时弧 $\overset{\frown}{MM_1}$ 的平均曲率的极限。

以字母 k 表示曲綫在某定点的曲率，我們有

① 自然不算直綫，它的曲率到处是零。

$$k=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\omega}{\sigma}.$$

对于圓显然有 $k=\frac{1}{R}$，即圓的曲率是其半徑的倒数。

注　平均曲率概念和定点曲率概念完全与运动点的平均速度和瞬間速度概念相类似。我們可以說，平均曲率表示某一段弧上切綫方向变化的平均速度，而点上曲率則表示切綫方向在某定点的眞正变化速度。

現在我們来推导曲率的解析表出式，借可計算其值。在此由曲綫的参变式給出法出发。

我們先把弧长当作参变数。在曲綫上取一常点 M，并設其相应于弧值 s。賦 s 一任意增量 Δs 而得另一点 $M_1(s+\Delta s)$（图 107）。由 M 变至 M_1 时切綫傾斜角的增量 $\Delta\alpha$ 就是两切綫間的角 $\omega=\Delta\alpha$，旣然 $\sigma=\Delta s$，則平均曲率等于 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$。

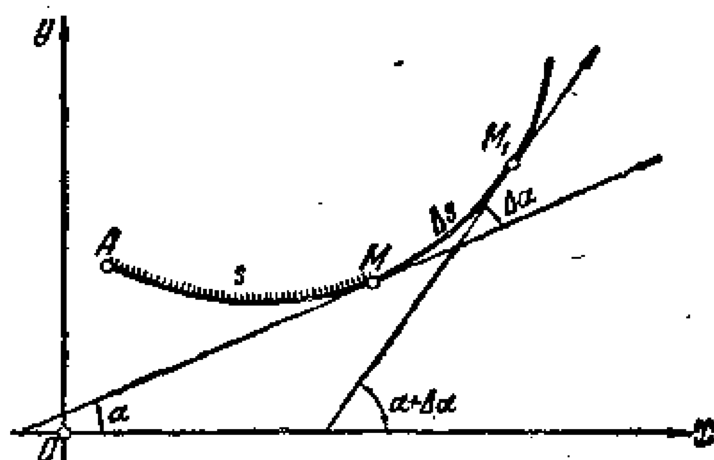


图 107.

註 $\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$ 趋于 0，我們得出曲綫在点 M 的曲率的解析表出式

$$k=\frac{d\alpha}{ds}. \qquad (2)$$

要注意的是这个公式的精确性还差一个正负号。因为曲率按

我們所下定义应为非負之数，而上式右端則可得負值。問題就在 $\Delta\alpha$ 及 Δs 都可以是負的。因此严格說来我們应該写 $\omega=|\Delta\alpha|$，$\sigma=$ $=|\Delta s|$ 而終于有

$$k=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

这几句話此后要記在心里。

为了使公式(2)成一便于直接进行計算的形式(同时也可确定曲率本身的存在)，这回我們假設曲綫参变給出式(1)的函数 φ 及 ψ 有头二阶的連續导函数。

如果所考慮的点 $M(t)$ 是尋常点，則不減一般性可認为卽 $x'_t=$ $=\varphi'(t)\neq 0$。

現在公式(2)可有另一写法如下:

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'_t}{s'_t}. \tag{3}$$

但 $s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}$ [202 段(5)]，故只剩下来求 α'_t。旣然[211 段,(8)]

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t} \quad 而 \quad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{y'_t}{x'_t},$$

則

$$\alpha'_t=\frac{1}{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{x'^2_t}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{x'^2_t+y'^2_t}. \tag{4}$$

以 s'_t 及 α'_t 值代入(3)式得此最后公式:

$$k=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{(x'^2_t+y'^2_t)^{3/2}}. \tag{5}$$

这公式完全适于計算，因为其中导数都容易按曲綫的参变方程算出。

如果曲綫是由显式方程 $y=f(x)$ 給出的，則此公式成这样形

状:

$$k=\frac{y''_{x^2}}{(1+y'^2_x)^{3/2}}.\qquad(5a)$$

最后,如果曲綫是由极坐标方程所給出的: $r=g(\theta)$,则可如寻常方式取 θ 作参变数而变为直角坐标的参变表出式。于是由(5)得出

$$k=\frac{r^2+2r'^2_\theta-rr''_{\theta^2}}{(r^2+r'^2_\theta)^{3/2}}.\qquad(5б)$$

216. 曲率圓及曲率半徑 在許多研究中我們便于将曲綫所考慮之点邻近部分近似地代之以圓,而与原曲綫該点有相同的曲率。

所謂曲綫在其一点 M 的**曲率圓**乃指这样的一个圓[①]:

1)它切該曲綫于点 M;

2)在此点它与原曲綫凹向同一側;

3)它与原曲綫点 M 有相同的曲率(图 108)。

曲率圓的中心 C 簡称为**曲率中心**,而此圓半徑則称为(曲綫在該点的)**曲率半徑**。

由曲率圓定义可以看出,曲率中心恒在曲綫該点的法綫凹側上。如果曲綫在該点的曲率表以 k,则既然对于圓我們有 $k=\frac{1}{R}$ [215段],現在对于曲率半徑我們显然就有

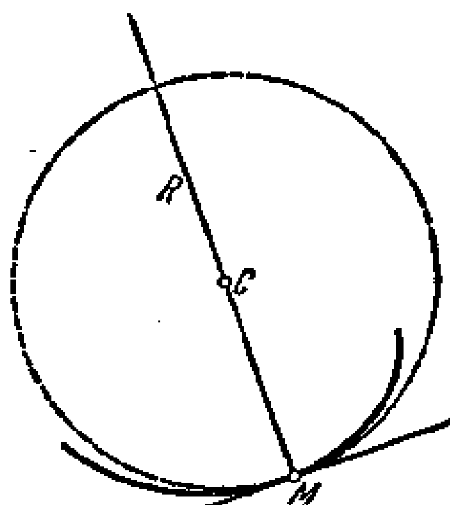


图 108.

$$R=\frac{1}{k}.$$

利用前段所导出的曲率公式,我們立即可写出一系列曲率半徑公式如下:

$$R=\frac{ds}{d\alpha},\qquad(6)$$

① 本书按习慣"圓"字也用作与"圓周"同义。

$$R=\frac{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}{x_t'y_{t^2}''-x_{t^2}''y_t'},\tag{7}$$

$$R=\frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y_{x^2}''},\tag{7a}$$

$$R=\frac{(r^2+r_\theta'^2)^{3/2}}{r^2+2r_\theta'^2-rr_{\theta^2}''},\tag{7б}$$

各可应用于相应的情形。

这里也适用 215 段关于曲率表出式所說正負号的話。

但是，正負号問題也可以用几何方式来作解釋，就看曲率半徑应在(照 211 段为正向的)切綫的哪一側沿法綫截取。也就是，在坐标軸的寻常布置法之下曲率半徑的正号就表示它指向切綫的左边，負号就表示指向右边①。这在曲綫以显式給出时特别容易驗証，因为这时候[参閱(7a)]曲率半徑的正負号与 y_{x^2}'' 的正負号一致，而后者我們知道[214段]正足以决定曲綫应凹向切綫的哪一側(同时也就决定曲率半徑的指向)。

例　試决定这旋輪綫的曲率半徑：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$(图 97)。

既然[210 段, 5)] $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$，則 $d\alpha=-\frac{1}{2}dt$；另一方面[201 段，2)]，$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=2a\sin\frac{t}{2}$，即 $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$。在这情形要計算 R 可以利用基本公式(6)：

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{2a\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt}=-4a\sin\frac{t}{2}.$$

由 210 段 5) 所导出法綫截于 x 軸一段 n 的表出式，我們看出

$$R=-2n.$$

由此曲率中心 C 的作法就可由图一目了然。

2) 最后我們来談一談一个实际問題，这里面所用到的正好本質上就是

① 在此要記得，弧的正方向是相应于参变数(t, x 或 θ)的增长来計算的。

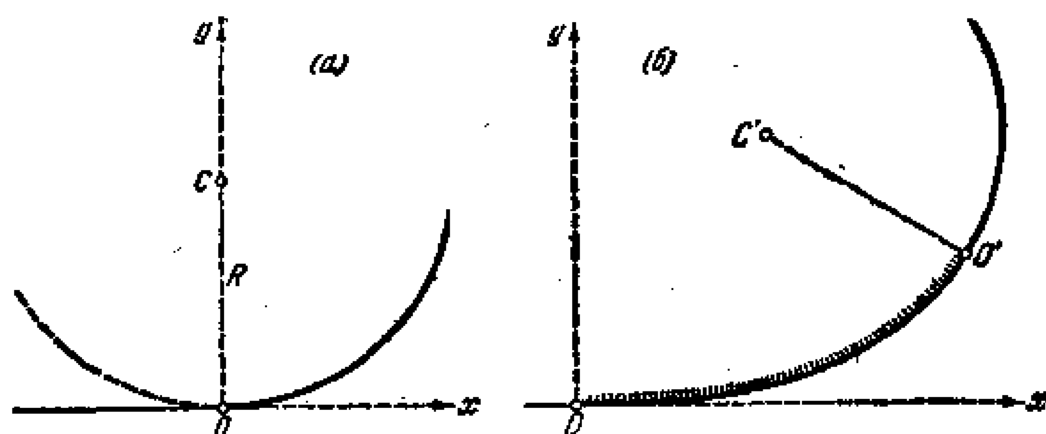


图 109.

沿曲綫的曲率变化：所指的是在鋪設鉄路弯道时所用的所謂过渡曲綫。

如力学上所建立，一个質点沿曲綫运动时产生离心力，其大小由公式

$$F=\frac{mv^2}{R}$$

所决定，这里 m 是質点的質量，v 是它的速度，而 R 是曲綫在該点的曲率半徑。

如果鉄路的直綫部分直接連接到成圓弧的弯道（图 109a），則在过渡到这弯道上时将瞬息間一下子发生了离心力，而引起急剧强烈的冲撞，这对于車厢及道路上层結构都是有伤害的。为了避免这种情形，路的直綫部分与圓弯道之間借助某种过渡曲綫来联結（图 109б）。沿着該曲綫曲率半徑由（与直綫部分銜接之处的）无穷大逐漸減至（与圓弧銜接之处的）該圓半徑的大小，而离心力也就相应地逐漸慢慢增长起来。

过渡曲綫，例如，可采用三次拋物綫 $y=\frac{x^3}{6q}$。在这情形我們显然有

$$y'=\frac{x^2}{2q},\quad y''=\frac{x}{q},$$

如此得出曲率半徑的表示式

$$R=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

在 $x=0$ 时我們有 $y'=0$ 而 $R=\infty$，故該曲綫在坐标原点与 x 軸相切而其曲率为 0。

第十四章　数学分析基本观念发生簡史

§1.　微积分前史

217. 十七世紀与无穷小分析　这是一个由中世紀过渡到新时代的时期，資本主义开始发展，而它在其与封建制度的斗爭中代表了进步的力量。精确科学由当时的生活得到了迅速发展的动力。航海学引起了对天文学及光学的高度兴趣。造船学、堤埧及运河的建修、机器制造和建筑、彈道学問題及一般的軍事方面的问题等等，促进了力学的发展。而天文学、光学、力学以及直接地工业技术本身，又要求对当时的数学作彻底的革新。

这种革新的标帜是变量的引入，恩格斯很恰当地称它为"数学中的轉折点"（参閱第一分册 26—27 頁所引证）。只有变量的数学才能适应数理自然科学的需要。新的問題导向新的"无穷小"量研究法（或"无限小"方法）的建立。接近該世紀之末，形成为一門独立的学科的数学分析，也就因此而得到"无穷小分析"的名称，至今都还沿用。

起初在这領域內大半可以說是"手工业生产"：建立每种个别的事实都要研究者采取特殊办法。但情况隨着时間漸漸改变了。終于出現了一般的方法来解同类型的問題，建立了各类問題間的联系，逐漸闡明了作为这些問題求解的基础的一般概念，而所有这些乃輝煌地在牛頓和萊卜尼茲手中由微积分学的創立所完成。

在第一节里我們来綜述一下，在五十来年时間內給这項发明作了准备的，至少是两代数学家的成就。

218. 不可分素方法　我們由积分学的前史开始，这实际上要回溯到遙远的古代；至于講到面积和体积的計算以及图形重心的定位，則这方面十七世紀数学家的眞正祖师是亚几默德（紀元前三世紀）。

在保有到現代的"亚几默德致依拉托斯芬书"① 里說到，他以特殊方法得

① 有俄文譯本"Новое сочинение Архимеда"（亚几默德新築）(Одесса, Mathesis, 1909)。

出了他自己的結果(屬初級)，其中形式上利用了杠杆平衡理論，但本質上含有由綫組成平面图形、由平面組成立体的思想。由这种"原子論"方法所找到的眞理后来連同其严格的、当时慣用的反証法发表了出来。但这"书信"十七世紀的数学家是不知道的——两千年間該信被認为散佚，直到本世紀初才完全偶然地被发現。如此，在十七世紀时，对于亚几默德曾用来发現他的結果的方法只能由其文集中其他保留下来的部分来猜度。在集中别处沒有遺留得出他的結果时实际所用方法的任何痕迹。但在某些作品中运用反証法时，亚几默德仍然把平面图形(或立体)分解为元素，不过，取成有限的个数并且有限的寬度；在此他也考慮了內接及外接阶梯状图形(或立体)，这就是我們的积分和的几何原形。

第一个試图来闡明亚几默德方法并推广其应用范圍的是德国天文学家兼数学家开普勒(Johann Kepler 1571—1630)。他在1615年出了一本书叫做"酒桶的新立体几何"①。虽然这著作是以偶然的理由并且以看来非常实际的題材写的，但其中含有当时对求方及求立方(求面积及体积)問題的新門径：将平面图形分解为无限多无穷小元素，然后由这些元素——必要时予以变形——組成面积已知的新图形(对立体也一样)。

我們指出，剛才說的开普勒氏的元素不是完全沒有寬度的：他說到了所謂"纖細的小圈"或"寬度极小如綫的部分"等等。

开普勒以这样的方法先得出了亚几默德的一系列結果的直接推导(不是反証法)，然后在其标題为"对亚几默德的补充"的部分标出了87种新的迴轉体的体积。

开普勒观念的承繼者及"不可分素方法"本身的奠基者是卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri 1598—1647)，他是伽利略(Galileo)的学生，一位意大利学者兼牧师。这种方法的傳布也成了他的終身事业。1635年出版了他的主要著作"几何学的不可分連續新講法"，后来在1647年又补充了"几何六試"②。在这两种著作里本質上复活了亚几默德的原子論观点。

"要决定平面图形的大小，卡瓦列里說，可应用一系列平行綫，我們設想其在这些图形上画了无穷之多"(图110)。他以同样方式处理了立体，只是在那里不画直綫而代之以平面。这些直綫(平面)就是声名远播的"不可分素"；

---

① 有俄文譯本(ГТТИ, 1935)。

② 两书均有俄譯本："Геометрии"(几何)及"Опыта"(尝試 IV)(ГТТИ, 1940)。

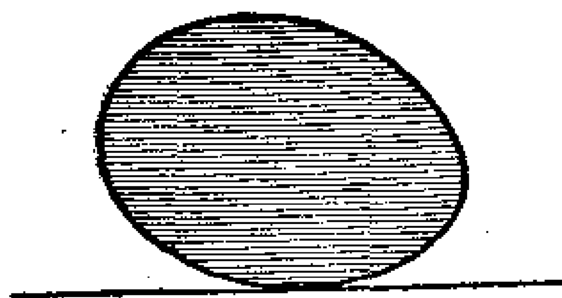


图 110.

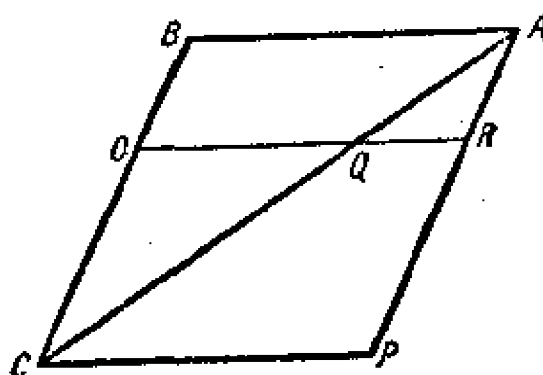


图 111

它們"为数无穷并且沒有一点實度"(在这一点卡瓦列里与开普勒相反)。但卡瓦列里沒有断然肯定图形或体是由这些无寬度的不可分的元素所組成的。他的主要原則陈述得比較审愼:"平面图形(或立体)与其全体不可分素成比例"。例如,倘若平行四边形 $ABCD$(图 111)以其对角綫 AC 分为两个三角形,并且設想其中有一些平行于底边 CD 的直綫,則"平行四边形的所有(OR)綫"与"三角形的所有(QR)綫"成 2:1 的比例,因为这是平行四边形面积与三角形面积之比。

所謂图形的"所有的綫"可以想到卡瓦列里理解为这些綫的总和,是无穷数量("无限"),如此只有两个这样的和之比才能成为有限的。看来(虽然卡瓦列里在哪几也未曾明白地說过)不可分素是彼此成等距离的,但这些距离在任何地方也不出現。如果試图将卡瓦列里的思想用我們通行的辞句来傳达,則可以說他采用了纵坐标之和(或函数值之和)但未乘以横坐标(自变数)的增量。如此,如果为簡单計取边为 a 的正方形作为平行四边形而恢复乘以不可分素間的距离 h,則上面所陈述的話可用(当然是要有很多条件的)这一串等式来說明:

$$\frac{\sum OR}{\sum QR}=\frac{\sum a}{\sum x}=\frac{\sum ah}{\sum xh}=\frac{\int_0^a a\,dx}{\int_0^a x\,dx}=2.$$

卡瓦列里在其"几何学"中所建立的另一重要步驟是"平行四边形的所有綫 OR 的平方"与"三角形的所有綫 QR 的平方"之比。經一长串推理的結果得出該比等于三。在"尝試 IV"里他更将平行四边形与三角形的"所有綫的立方"及"所有綫的四次方"予以对比:这里得出比率等于四及五。由此卡瓦列

里下結論說类此規律对任何自然数方冪m也都是正确的。这个規律也可用我們的符号写成这样:

$$\frac{\int_0^a a^m dx}{\int_0^a x^m dx}=m+1,$$

如此,这里所說的其实就是这个积分的計算:

$$\int_0^a x^m dx=\frac{1}{m+1}\int_0^a a^m dx=\frac{1}{m+1}a^{m+1}.$$

卡瓦列里立即应用其結果于种种求面积及求体积的問題,但完全是不依靠应用而得出的。这一問題(正象和計算定积分的問題一样)提法的一般性,比起开普勒是前进了一步,因为开普勒每次只能計算具体的体积。

219. 不可分素学說的进一步发展 借助与$\int_0^a a^m dx=a^{m+1}$的对比来計算积分$\int_0^a x^m dx$这是別的学者也做过的。由法国数学家費尔馬(Pierre Fermat 1601—1665)的通信中可以看到,他得出了卡瓦列里的一般結果,比卡氏还要早一些。然后应該提到法国数学家、物理家兼哲学家帕斯卡(Blaise Pascal 1623—1662)及其著作“数冪之和”(1654);也該提到英国学者瓦里斯(John Wallis 1616—1703)和我們已說到过的他的书“无穷数量的算术”(1655)。他們全都是由算术的想法出发并且將其計算連系到自然数序列m次方冪之和的問題。以我們通行的辞句来說,問題实質可表成这样:如果將区間$[0, a]$分为n个等长部分,其長各为$h=\frac{a}{n}$,則积分和之比

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^m h}{\sum_{i=1}^{n}a^m h}=\frac{\sum_{i=1}^{n}i^m}{n^{m+1}}\to\frac{1}{m+1},\quad \text{如果 } n\to\infty.$$

但是极限过程,只在瓦里斯的著作中明白地提出来。全部論証都以归納法推理为基础。

在費尔馬較晚的作品里①，当他从事非二次的“抛物綫”$y^m=cx^n$ 及“双曲綫”$y^mx^n=c$ 之际已直接将曲綫下图形分为条子(如我們所做)，但小到使能“看作”与矩形一样。在此横坐标甚至可不成算术級数而成几何級数[参閱184, 2)]。用这样的办法費尔馬能算出方冪 x^r 在有理指数 $r=\pm\frac{n}{m}$ 情形的积分(只有 $r=-1$ 这一古典双曲綫的情形除外)。

更接近于定积分的現代理解法并闡发(尚未建立起来的)积分学的力量的是帕斯卡。我們所指的乃是他的那些作品，它們合起来解决了他在1658年所提出的关于旋輪綫的問題以及需要計算种种面积、体积、弧长并决定重心位置的一系列問題。这些作品他当初是以如“A·德东維勒在几何学中的种种創发”这样的假名方式发表的。

帕斯卡継續采用了“不可分素语言，但詳密地預見到并仔細地闡明了这語言应如何理解。例如，如果半圓直徑(图112)在点 Z 分为“无限数”相等部分，并作縱坐标綫 ZM，则所谓“纵坐标线之和”应理解为“无限多个矩形之和，每个矩形由每条纵坐标线与每个很小的直徑等分所組成”，而这和与“半圓面积之差小于任何給定的数”。在图113上圓弧 BC 用諸 D 点分成了“无穷多”段相等的弧，由各分点所作垂綫 DE 等可称为“正弦”。在这情形，“如果簡单地說諸正弦之和 DE，则应理解为由每一正弦 DE 与每一段改直了的小弧 DD 所組成的矩形之和，因为这些正弦是由弧的均分所产生的”。在所举諸例中，所考慮的縱坐标綫或正弦綫应該乘以什么綫分是显然的。在别的情

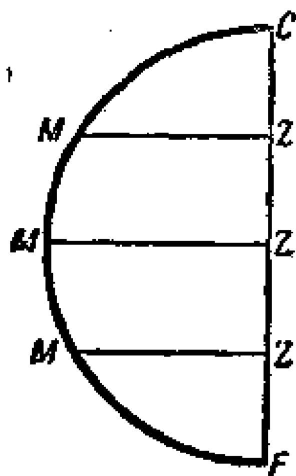


图112.

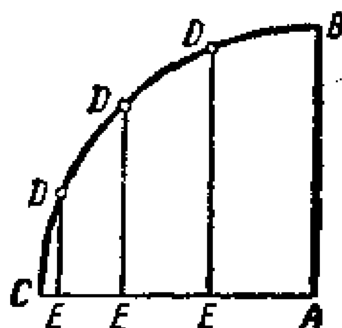


图113.

① 可在維萊脫納(Вилейтнер), “Хрестоматии по истории математики”(数学史文选)(ГТТИ 1932)第IV集，70頁上找到其摘录。

形这綫分应該明白提到。如此，卡瓦列里——他只考虑函数值——所含糊过去的自变数在此完全明白地规定出来了：函数值乘以自变数增量。

为了对帕斯卡用来計算他所需积分的論証給出一个榜样，我們举其"論四分圓的正弦"一文中的一个命题①。首先建立了一个明显的輔助定理（参閱图 114，由它还可以明白記号）：

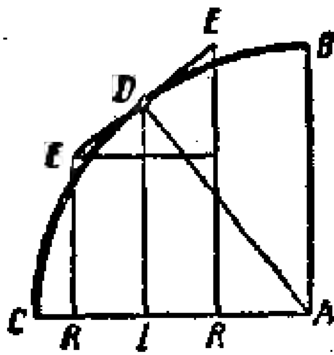


图 114.

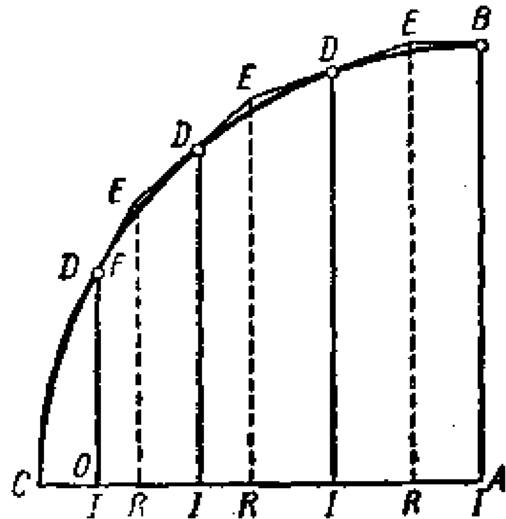


图 115.

$$DI \times EE = RR \times AB \tag{1}$$

所說命题本身內容如下：弧 BF 的正弦綫之和(图 115)等于綫段 AO，乘以半徑 AB。

在(1)中将每段切綫 EE 代之以弧 DD 并把所有这样的等式都加起来，左边得出我們所需的"正弦和"，而右边则得所有 RR 之和，也即 AO，乘以 AB。这就完成了証明。

在它后面跟着有趣的"注釋"，其中帕斯卡請讀者不要惊訝："所有距离 RR 总起来等于 AO，而且每段切綫 EE 等于每段小弧 DD，因为只要知道，虽然在正弦綫总数有限时这等式不眞确，但无限时却是眞确的"。

用我們的語言来解释所証明的話，我們設 $AB=1$ 并引入角 $\varphi = \measuredangle BAD$，于是它就等价于等式

$$\int_0^{\varphi} \cos\varphi d\varphi = \sin\varphi.$$

帕斯卡解决所提这个問題的办法也是很有教育意义的。他預先以一般的形式精确地枚举了为此需要哪些类型的积分("和")。然后他指出如何按他

① 在已提过的維萊脫納，"数学史文选"第 IV 集，81 頁有此文的摘录。

所感兴趣的情形将它們算出并由此完成其解。我們还提一提把一些积分（"和"）变成另一些积分的各种相当复杂的积分公式；帕斯卡由立体几何的想法得出了这些公式，并且应用得很巧妙。

220. 求最大及最小（极大极小）．切綫作法 現在我們轉向微分学的前史。这个部門的創始者应該算是費尔馬，他恰好研究了寻常屬于微分学的两个問題：求最大最小值及画切綫，并且最先应用了本質上具有微分性质的方法来解他的問題。

費尔馬的作品"最大最小研究法"[1]由其书信而为世人所知，这些书信起自1629年在1642—44年局部发表，至1679年才完全出版，这已經是他死后的事情了。

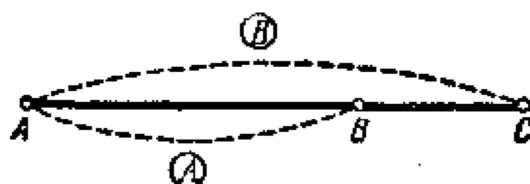


图 116.

費尔馬的求最大最小值法則（沒有任何瀹据！）我們就他所考虑的一个問題来解釋如下：将已知綫段 AC（图116）分割于 B 点，使得 AB 平方及 BC 綫段所构成的立体为最大的。

以 B 表示已知綫段 AC，以 A 表示所求綫段 AB，于是我們得最大体积的表出式 $A^2(B-A)$[2]。以 $A+E$ 替代这里的 A（費尔馬以字母 E 作为所考虑的数量 A 的增量的标准記号）而将两式看作相等（其实不相等！）：

$$(A+E)^2(B-A-E)=A^2(B-A).$$

現在消去两边共同項并約去剩下式子里的所有因子 E：

$$2A(B-A)-A^2+E(B-A-E)-2AE=0.$$

最后，消除約簡后尙殘留有因子 E 的各項，結果得出：

$$2A(B-A)-A^2=0 \text{ 或 } 2AB=3A^2.$$

按費尔馬的說法这已成为"眞"等式，而前面的等式則只是"假想的"或"近似的"。由后式就定出 $A\left(=\frac{2}{3}B\right)$.

"費尔馬法則"的一般形式如果用函数記号来表示成为这样：要找使 $f(A)$ 这个式子有最大值或最小值的 A 值，費尔馬先写近似等式

$$f(A+E)=f(A) \text{ 或 } f(A+E)-f(A)=0,$$

---

① 参閱維萊脫納，"数学史文选"第IV集，第78頁。

② 这里及以下我們都采用現在通行的代数記号，而不管所引原作者事实上怎样写法。

由此除以 E 而得

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0.$$

在这等式里他消除还含有 E 的項，即令 $E=0$（而这就等价于取 $E\to 0$ 时的极限）。于是終于得出"眞正的"等式

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$$

或按我們的記号就是 $f'(A)=0$，由此定出所求的 A[参閱 100 及 112]。

E 其实就是自变数 A 的很小的增量（如果不是无穷小的話），虽然費尔馬沒有明說这一点。开头的等式 $f(A+E)=f(A)$ 表示他的一种所謂逗留原理：一个数量当其达到最大或最小値的时刻就好象停止了它的变化①。

費尔馬在同一著作里指出，他的方法也能解求作曲綫切綫的問題。但这回他以 A 表示次切綫，而以 E 表示其增量（或減量）；利用曲綫的方程他先做成一个"近似的"等式，然后应用前面那种程序，結果得出一个等式而由此定出 A。

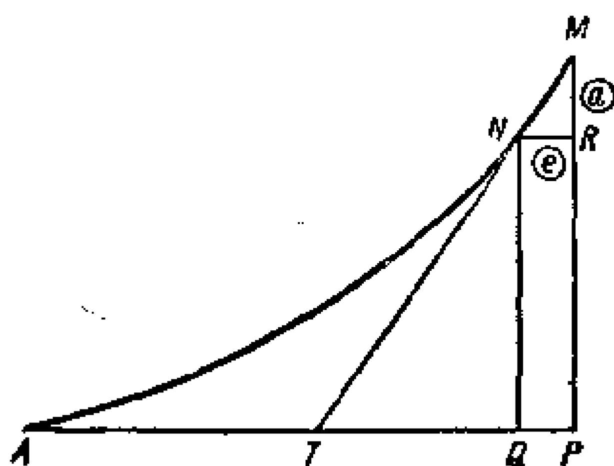


图 117.

接近于費尔馬的研究的有其他作家所給的上述問題的解法，有的化簡了費尔馬法則，有的推广了它的应用范圍。我們只提一提牛頓的老师依薩克·巴罗（Isaac Barrow 1630—1677）在其"光学及几何学講义"（1669—1670）里所載的切綫作法，他指出这是"按一位朋友的意思"做的（大概就指牛頓！）。

巴罗对曲綫上的点 M 的两个坐标及其增量引入了标准的記号（图 117），而令 $AP=f$，$PM=m$，$NR=e$，$RM=a$，这里認为这些增量連同弧 NM 都是"无限小的"。巴罗用曲綫方程把点 N 的坐标 $f-e$ 和 $m-a$ 連系起来而在所得关系式中拋弃所有完全不含 e 或 a 的項（它們事实上相消）以及 e 和 a 的高次項（"因为这些項沒有什么意义"）。这里第一次明白地出現"忽略高阶小

① 类似的原理以前也已有人說过，例如开普勒。

項原理"(而費尔馬只能对它作猜測)。

現在已經容易来决定 a 对 e 之比，或者說縱坐标 $PM=m$ 对次切綫 $TP==t$ 之比也是一样。由有限三角形 TPM 与无限小三角形 NRM 的相似得出两个比的相等(其中"曲綫粒子"由于其"无限小"而可代以"切綫粒子")。

这些相似三角形从那时候起就牢固地进入了无穷小分析，而成为"家常便飯"了。后来莱卜尼兹称其为"特征三角形"①。

221. 借助运动学想法来作切綫 法国数学家德·罗貝瓦勒(Giles Persone de Roberval 1602—1675) 及意大利物理数学家托利拆利(Evangelista Torricelli 1608—1647)几乎同时不謀而合地(他們的研究最初发表于1644年)想起利用运动学的想法来画曲綫的切綫。即，如果曲綫能表为点的运动軌綫，該运动由两个較簡单的运动所組成，而其速度的大小方向都已直接給出，則其合成运动的速度方向——因而，还有其軌綫切綫的方向——就可按"平行四边形法則"来决定。

我們举托利拆利的抛物綫切綫問題解法为例。他在此利用的是他老师伽利略的运动学想法。为簡单起見，我們不用原来的說法而用解析几何的語言来叙述。設一点在初始瞬間位于 O(图 118) 而以加速度 g (即速度为 gt，如果 t 表示时間的話) 沿鉛垂方向自由墜落，它本身则以定速度 u 水平移动。于是按图上的記号在瞬間 t 我們有：

$$x=\frac{1}{2}gt^2, \quad y=ut,$$

图 118.

由此消去 t 而得：$y^2=2\frac{u^2}{g}x$。如此，得出該点軌綫为一抛物綫(按照 u 的选擇可使它与任意抛物綫 $y^2=2px$ 等同)。鉛垂速度与水平速度之比等于

$$\frac{gt}{u}=\frac{gt^2}{ut}=\frac{2x}{y},$$

由此——依据三角形相似性——就可看出切綫交抛物綫軸于其頂点后距离 x 处[参閱 210, 2)]。

① 但是他說无穷小"特征三角形"观念的采用不是始于巴罗而是始于帕斯卡(参閱 219 段)。

我們就由这个例子連帶說到，在此画切綫利用了曲綫运动的分解为水平及鉛垂方向两个分运动。

后来巴罗推广了这个观念而將沿任意曲綫的运动表为如同由两个运动所組成——一个水平运动（它总是算作等速的）及一个鉛垂运动。于是切綫 TM（图 118）的位置可由綫段 TP 与 PM 之比来决定，它就等于“下垂运动速度”与“側向运动速度”之比。

222. 切綫作法問題与求积問題的互逆性 特別有趣特別重要的是巴罗“几何学講义”的第十講和第十一講：其中作切綫与求积連系起来。由許多与此有关的命題中我們現在提出其第十講的定理 XI 及第十一講的定理 XIX，其中在无穷小分析前史里最先把微分学及积分学的两个基本問題以几何形式对比連系起来，——即作曲綫的切綫与曲綫的求积①。把这两个定理翻譯成解析的語言及通行的記号則其內容可如此陈述：

I. 如果 $y=\int_0^x z\,dx$，則 $\frac{dy}{dx}=z$.

II. 如果 $z=\frac{dy}{dx}$，則 $\int_0^x z\,dx=y$

（当 $x=0$ 时理解为 $y=0$）.

要对巴罗实际所作的給出一个概念，我們簡略叙述其第二个定理的陈述及証明如下：

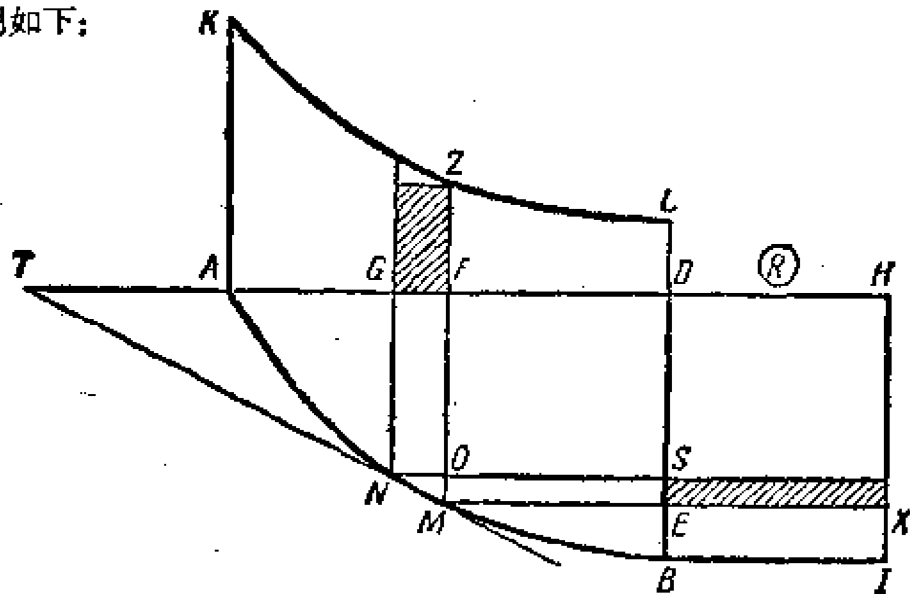


图 119.

① 参閱维莱脱納，“文选”，第 IV 集，第 89 頁。

给了一条任意的曲綫 AB(图 119)。设 MT 是在点 M 的切綫。第二曲綫 KL,以这样的条件来下定义: $FZ:R=FM:TF$,这里 R 是已給的綫段($=DH$)。于是面积 $ADLK$ 等于 $DB\times R$ 这个乘积。

为了証明,我們在曲綫 AB 上取一"无穷小綫段 MN"并作出图上所示諸綫。于是(如我們已經知道的)

$$MO:NO=FM:TF=FZ:R,$$

由此有

$$NO\times FZ=MO\times R \text{ 或 } GF\times FZ=ES\times EX.$$

"但旣然所有矩形 $GF\times FZ$ 与面积 $ADLK$ 之差可小到任何所要的程度,并且所有相应的矩形 $ES\times EX$ 形成矩形 $DHIB$,則上面的断言就是足够明显的了"。

如果設 $AF=x, FM=y, FZ=z$ 及 $R=1$,則按第二曲綫的定义条件恰好有

$$\frac{z}{1}=\frac{FM}{TF}=\frac{dy}{dx},$$

而定理的結論就等价于

$$\int_0^x z dx=y\times 1=y.$$

但是要在巴罗书中找这两个定理的最簡单的对照也是找不到的(在书中它們之間隔着二十个别的定理);况且几乎沒有用到它們。这里也正表明了:巴罗用几何語言来說,沒有以一般概念来領会,而唯有这一般概念才能闡明問題的本質并开拓广闊的应用道路。

223. 上述的总結 我們来总結一下十七世紀在"无穷小分析"方面的成就——总結到牛頓和萊卜尼茲出現于数学界为止。

有关于現在的积分学这个范圍內的成就越来越多。这里面不仅得出了大量关于求平面形面积、体积、弧長、曲面面积及重心定位的結果,也認識到所有在傳統上归結为求面积的这类問題之間的联系。在卡瓦列里、帕斯卡等等的著作中开始結晶出定积分概念本身。实际上算出了一系列最簡单的积分,常常是几何的形式,但有时也成算术的形式(費尔馬、帕斯卡、瓦里斯);找到了将一些积分变为别的积分的种种关系式(費尔馬、帕斯卡、巴罗)。

在目前属于微分学的这个領域內,費尔馬給出了一种划一的无穷小性質的方法来解求最大最小和作切綫的問題。他的研究被一系列其他作家所延

績。但这方面未能分析出問題本質中的基本概念。杰出的是罗貝瓦勒及托利拆里，接着的是巴罗——，他們試图由运动学想法出发来解作曲綫切綫問題(这后来也在牛頓的学說中得到了反映)。

最后，如我們剛才所見的，巴罗在这两类問題中間搭成了一座桥梁。

如此，这門新計算法的基础已备，但象現在这样的微积分学还沒有。同时，如后来萊卜尼茲卓越地表达的，"在这样的科学成就之后，所缺少的只是引出問題的迷宮的一条綫，即依照代数样式的解析計算法"。这里首先需要以一般形式建立新計算法的基本概念及其相互联系。然后，导入适当的記号而建立計算的正規程序或算法。而这也就被牛頓和萊卜尼茲以不同方式独立地[1]完成了。

在評述他們关于无穷小分析工作之前，我們先說說"无穷小"概念本身。在那时期——甚至还要在更长的时間内——对无穷小或无限小常常理解为(虽不明說)——比方說——靜的数量，也即不变的数量，不等于0而同时却(絕对值上)小于任何有限数量。这个实有无穷小概念在我們的数及空間的概念之下是矛盾的并且带神秘性。与它对立的是我們現在通行的、作为变量的"潛在"无穷小概念，它只在变化过程中(絕对值上)小于任何有限数量。由无穷小的一种理解法过渡到另一种理解法是要遭遇到相当大的困难的，因为需要有明晰的极限过程概念。这两种主張的斗争讀者可在牛頓及萊卜尼茲的工作中看到，对此我們就要来討論。

§2. 依薩克·牛頓(Isaac Newton 1642—1727)

224. 流数計算法 牛頓講这种計算法的主要著作是論文"流数术及无穷级数"[2]，它大約于1671年写成(基本概念或許形成得还要早些)，但在1736年才出版，——已經是作者死后的事了。牛頓称变数为"弗流恩特"(即"流动"量之意)，而以最后几个拉丁字母 u, y, z, x 表之；它們被看作是隨时間增大(或減少)的。其增长速度称为"流数"而以同样一些字母加点来表示：$\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{x}$。如此，在牛頓說来速度是一个自明概念，不需要定义，而流数則是以

---

① 我們完全撇开关于后来发生的，关于新計算法創立优先权問題的毫无根据的爭論。

② 有俄文譯本，見"Математические работы Ньютона"(牛頓数学文集)(ОНТИ, 1937), 25—166 頁。

它来下定义的，即——如果我們現在說起来——流数是流动量依时間的导数①。

固然，牛頓声明这里时間并不按字面来理解，而所謂“时間”可以取作任何变数，比方說 x，它均匀地随着眞正的时間这样增长，比方說使得 $\dot{x}=1$。但要記得，所有流动量都依凭着这个“时間”，也即依凭着同一个普遍的自变数。如此，在牛頓无所謂多自变数函数，也无所謂偏导数。

然后牛頓如此陈述第一个基本問題：

“按所給流动量間关系式来决定流数間的关系”。

这問題比单由所給流动量計算流数較为一般些。但牛頓只直接就代数方程来解它。例如他取方程

$$x^3-ax^2+axy-y^3=0. \tag{1}$$

牛頓所提出的法則如下：每个含 x 方冪的項乘以 x 的冪指数而将一个因子 x 代换为 $\dot{x}$；同样，每个含 y 方冪的項乘以 y 的冪指数而将一个因子 y 代换为 $\dot{y}$；让这样得出的所有諸項之和等于 0。在当前的例中就得出

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0.$$

容易了解，怎样把这个法則推广到含随便多少个流动量的代数方程的一般情形。在有分式或根式时牛頓采取了繞弯的道路。設給了一个方程

$$x^3-ay^2+\frac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0.$$

令

$$\frac{by^3}{a+y}=z \text{ 及 } x^2\sqrt{ay+x^2}=u,$$

牛頓将它化为方程

$$x^3-ay^2+z-u=0,$$

对此施用所說的法則：

$$3x^2\dot{x}-2ay\dot{y}+\dot{z}-\dot{u}=0.$$

至于 $\dot{z}$，$\dot{u}$，則它們又由施同一法則于方程

$$az+yz-by^3=0,\quad ax^4y+x^6-u^2=0$$

所得的关系式来决定。

在証明該法則时牛頓导入这个新概念：流动量的“契机”。这就是“它們

① 虽然牛頓的記号現在已不通用，但在力学及物理里至今仍保留用点表示对时間的导数这种习慣。

的那些无穷小部分，把它們加到时間的无穷小部分中之后就使該量本身不断增大”。这些契机与量的变化速度（即流数）成比例。导入了无穷小量 o（这不是零而是“实有”无穷小时間增量），牛頓把量的契机写成这样：$\dot{u}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dot{x}o$（即萊卜尼兹的微分！）。

牛頓的証明本身已在上面的例子里举过，基本上也就是重复費尔馬的步驟。在等式(1)里以 $x+\dot{x}o$ 代 x，以 $y+\dot{y}o$ 代 y，而逐項減去(1)，約以 o，并且最后把还含有 o 的項略去：“既然——牛頓解釋——我們假設了 o 是无穷小量，則被它所乘的那些項可以算作沒有”。这个原理及該法則本身形式上都不是新东西，而本質上新鮮之处在于：这里結果是对任何种流动量陈述的，而不管講的是什么特殊問題。

后来牛頓还导入了流数的流数，即二阶流数：$\ddot{u}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{x}$ 以及高阶流数。

牛頓先应用他的流数計算法于前面屡次講过的問題。

“决定数量的最大值与最小值”。

先陈述这个逗留原理：“当一个数量是所有可能的量中最大的或最小的时候，則它在此时刻不向前流动也不向后流动”。由此得到一个法則：找出流数而让它等于 0。在此，如牛頓所强調，决定流动量的关系式也可含有无理式，这是早先所发表的法則所不容許的。

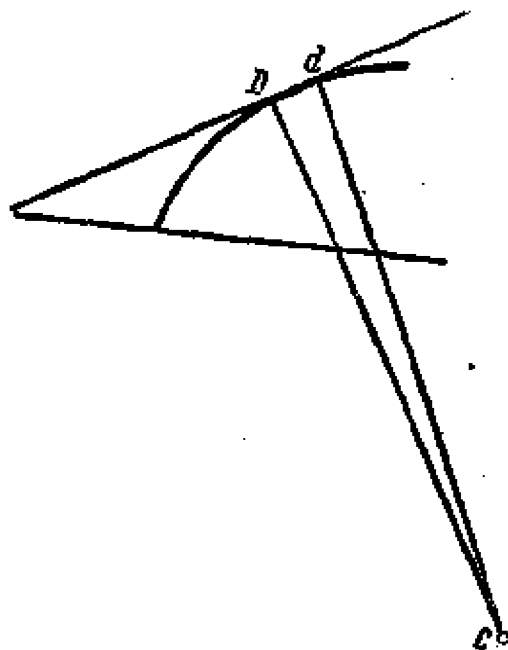


图 120.

“求作曲綫的切綫”。

当給出了曲綫上变动点的笛卡尔坐标 x, y 間的方程时，在这种主要情形牛頓的演証与巴罗相似[221段]，只是无穷小增量（或減量）e 及 a 他以 $\dot{x}\cdot o$ 及 $\dot{y}\cdot o$ 来替代，如此（保持图 117 的記号）

$$PM:TP=\dot{y}:\dot{x};$$

流数之比就按所說法則由曲綫方程所决定。牛頓也討論了一些别的相应于曲綫的其他給出法的切綫作法。

提法全新的是这个問題：

“决定任何給定的曲綫在定点上的曲率大小”。

牛頓陈述这問題后还附加一句：“曲綫理論中很少有比这更漂亮更能深

入揭露其本性的問題了”。

沒有給出曲率概念的定义。对于圓而言曲率在一切点上都相同，对不同的圓弧則曲率与直徑成反比例。曲綫在定点 D 的曲率（图 120）就与一个在此点近处与曲綫最密接的圓的曲率相等（事实上牛頓就认为曲綫与圓沿无穷小弧 Dd 銘合为一）。如果 C 是这个圓的中心（“曲率中心”），則曲綫的无穷接近的法綫 CD 与 Cd 就相交于該点。对該圓半徑（“曲率半徑”）牛頓推出了公式，只是与我們現在的写法不同。

225. 流数計算法的逆計算法；求积 牛頓在其“流数术”中第一个基本問題之后，就陈述了第二个反面的問題：

“依据含流数的方程来求流动量間的关系”。

这样的形式，就成了（我們現在所謂）常微分方程的求解問題，远比直接由流数求流动量（即求原函数）一般得多并且艰难得多。我們不談这里所說的一般問題（牛頓多半用无穷級数来解）而只来讲一讲求原函数的問題，对此牛頓总是以几何方式来处理——作为曲綫的求积問題。

所根据的基本原則是（用我們現在流行的說法）：变动面积对横坐标的导数就是纵坐标，如此面积就是纵坐标的原函数［参閱 156 段］。

有兴趣的是这个命題的证明，牛頓在其較早的著作里就給出来了①，还是在流数术形成之前。要

图 121.

证明曲綫 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 的面积 z（由 $y=0$ 的点算起）可由公式 $z=\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ 表出，牛頓走相反的道路而由面积表出式得出纵坐标的表出式。他由这个特例开始：如果 $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$，則 $y=x^{\frac{1}{2}}$；我們来重述这里有关的推证，它是完全具有一般性的。

如此，設（图 121）$AB=x$，$BD=y$ 而面积 $ADB=z$。我們让 $B\beta=o$（这里 o 还不象流数理論中那样表示时間增量）而导入 $BK=v$，使具有面积 ov

① “运用无穷多項方程的分析”；参閱“牛頓数学文集”，3—24 頁。这論文还是 1666—1667 年写的，但 1711 年才刊出。

的矩形 $B\beta HK$ 与 $B\beta\delta D$ 成一样大的图形；于是 $A\beta=x+o$ 而 $A\delta\beta=z+ov$。

将这些式子替代关系式 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$ 或 $\frac{4}{9}x^3=z^2$ 中的 x 及 z，按寻常手續对消相等的項并約去 o 后得出等式

$$\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)=2zv+ov^2.$$

"如果現在——牛頓接着說——假設 $B\beta$ 无限变小而化为烏有或者 o 成为零，則 v 与 y 成为相等的，并且带因子 o 的項都消去"，由此已經不难得出所求的結果：

$$y=x^{\frac{1}{2}}.$$

既然 v 事实上就是面积的增量$(=ov)$与横坐标的增量$(=o)$之比，而"在 o 无限变小时 v 成为等于纵坐标"这句話并不受所考慮的特例的限制，則实际上这就是上面陈述的命題的证明了［参閱 156］。我們指出，这里 $o=B\beta$ 几乎就是我們所理解的无穷小而令人感到有引向极限过程的一种暗示。

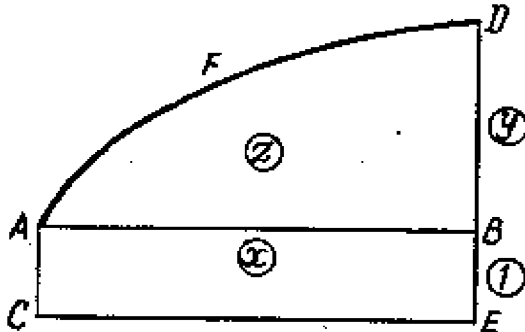


图 122.

牛頓在"流数术"中采取了另一种办法。連同变动曲綫图形 ADB 他同时考虑一个变动矩形 $ACEB$，其高 $AC=1$（图 122）。两个面积各由直綫 BD 及 BE 的运动所"产生"。"于是这些面积的增量① 及其流数将与描出它們的直綫成同一比率"。用以前的記号（計及矩形面积为 x）我們有

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}=\frac{y}{1} \text{ 或 } \dot{z}=y\dot{x}.$$

在假設 $\dot{x}=1$ 之下我們得出簡单的式子 $\dot{z}=y$。这两个結果牛頓經常用到。

现在不难来解决这个問題：

"試求随便多少这样的曲綫，其面积用一个有限方程所表出"。

也就是，預先給出 x 与 z 間一个任意的方程，要来由它找一个 x 与 $\dot{z}=y$ 之間的方程；这样也就找出了一条曲线，其面积有一个預先知道的以横坐标

① 这回看来是"实有"无穷小。

表出的式子(或者,一般地,由已知的方程与横坐标联系起来)。

跟着牛頓提出这个問題:

“試求随便多少曲綫,其面积与某一巳知曲綫的面积由一个有限方程連系起来”。

簡单地說,这里一个积分借助置换化为另一个积分,但运算——和剛才一样——是以相反的次序进行的:找一个函数,其积分能借助預先給定的置换由預先給定的方程以已知的积分表出。

利用这两种方法牛頓編制了丰富的曲綫“目录”,其求积或可立即做出,或可借助所指示置换化为椭圓或双曲綫的求积(“其面积可算作用某种方法已經知道”)。化为圓錐曲綫的求积事实上就是利用最簡单的超越函数——对数函数及反圓函数,这些在当时还未引入数学分析。

牛頓的另一著作专讲求积的計算:“論曲綫的求积”,在“流数术“以后不久写成而出版于1704年①。那里討論了較复杂的形式,例如,

$$z^{\theta}(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\cdots),$$

这里θ,λ,η是有理指数。作为一个特例,我們指出求二項式积分,即求

$$z^{\theta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$$

这样式子的原函数。但是,关于这种积分牛頓在他給萊卜尼茲(1676)的一封信里說得比較詳細:他知道如果$\frac{\theta+1}{\eta}$是整数(正的)或$\frac{\theta+1}{\eta}+\lambda$成整数(負的)时,求积可以用代数方式做出[参閱169段]。

至于求积計算法的应用,則在“流数术”里牛頓清楚地强調說,曲綫面积表也就可以用来按所給流数决定别种数量。下面这个問題可以作为一个例子:

“求曲綫之长”。

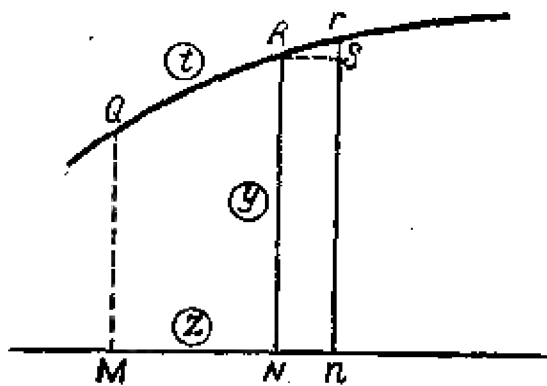


图 123.

这問題就是要按流数 $\dot{t}=\sqrt{\dot{z}^2+\dot{y}^2}$ 来决定弧长 $t=QR$(图123),这里$z=MN$及$y=NR$是曲綫$\dot{y}$上变动点R的横坐标及纵坐标。而上面关于$\dot{t}$的公式則由直角三角形$\triangle RSr$推出,其边就可看作z, y, t的“契机”。

① 参閱“牛頓数学文集”167—193頁。該論文緒論及其他部分带有后来修改的痕迹。

226. 牛頓的“原理”及极限理論的萌芽 使牛頓成名的最重要著作是1686—1687年所出版的“自然哲学的数学原理”①，其中一般地奠立了全部力学特别是天体力学的基础。

牛頓在一封信里說，他用流数术找到了“原理”的最重要的命題。但在叙述中这情况沒有任何反映：尋常只是以綜合几何形式——按照古典的榜样——列出命題的证明。

但“原理”却有些在方法論方面根本新的和重要的东西。用第一卷（“論物体运动”）的第一部分牛頓就用来讲他的特殊的极限理論，名称是“始末比方法”。

两个数量的“始比”或“末比”就是指它們的极限比，第一个名称牛頓用来表示两个“发生的”（无穷小）量之比的极限，而第二个則他既用于“消逝”（无穷小）量之比又用于有限量甚至无穷大数量之比，而不加区别。牛頓还讲到“发生量的始和”或“消逝量的末和”。要注意的是，所有这些概念都沒有下定义，而其含义只能由其用法本身去揣測。牛頓的术語的特点連系着变数达其极限的观念，所以这极限就成为它的“末”（“始”）值。

牛頓的极限理論全部由十一个几何性质的預备定理所組成。如牛頓在它們后面的“說明”中所指出，这些預备定理是为了化簡证明而列出的。本来也可以借助不可分素方法来证明，但后者表现得“比較不够几何化”。“所以——牛頓接着說，——如果在以下的全部叙述中我也把某种数量看作仿佛由固定的粒子所組成，…則应該理解为，这不是不可分的，而是消逝的可分的数量，不是有限部分之和及比，而是消逝量的末和及末比…”。并且还說：“如果以下为了說話簡单起見我将說到很小的或消逝的或发生的数量时，則对此不应理解为許多定量，而应看作是无限消逝的。”如此，这里宣布了原則上接近于现代的观点：代替着“实有”无穷小而考虑“潜在”无穷小及其和与比的极限。

227. 牛頓的奠基問題 我們可看出，牛頓对其計算法的奠基問題的观点在二十年間有显著的演进。

在反映其旧看法的“流数术”里数量的“契机”分明是“实有”无穷小，数量的增长則归結为契机的逐漸添加。他随便地应用和有限量对比之下的忽略

① 有А.Н.克雷洛夫院士(1915—1916)的俄譯本，另外，还收入“Собрания сочинений акад. А.Н.Крылова”(А.Н.克雷洛夫院士全集)(1936)第七卷。

无穷小量原理。

在牛頓的"原理"里已經与不可分素观点絕緣。在稍晚所写的"曲綫求积"的緒論里他說:"这里我不把数学上的数量看作是由最微小的粒子所組成,而看作是由連續运动所产生(描出)"。由"原理"第二版(1713)的一个注里可以看出,恰恰是"在数量的形成方式上"牛頓看出他的方法与萊卜尼茲的方法有主要的区别。我們在其"原理"中所看到的极限理論,——虽然屬萌芽的形式——但是在新的解析的奠基問題上已經是一項显著的进展。后来在已經說过的那"曲綫求积"的緒論里,牛頓还将 x^n 的流数的推导联系到两个消逝量的"末比"来考虑,本质上也就是极限过程。

但是牛頓却沒有坚持这种观点到底。不久以后,在"原理"第二卷里,他导入不清楚的概念——数量的"契机",即其"瞬間增量或减量"。

关于这些契机他建立了一系列簡单的命題(应該指出,此时萊卜尼茲已經以等价的形式发表了)。例如,这是其中之一:如果数量 A, B 的契机是 a, b, 則乘积 AB 的契机是 $Ab+Ba$。有趣的是牛頓在証明时不由这自然发生的等式

$$(A+a)(B+b)-AB=Ab+Ba+ab$$

出发,因为这时候他必須对比其他項而略去 ab 項(萊卜尼茲也正是这么做),但訴諸一点机巧,即

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)-\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right)=Ab+Ba,$$

它誠然立即导至所求結果,但完全不是出于事情的本质。

如此,牛頓以其"始末比方法"給新計算法建立合理基础的尝試是不彻底的。这尝試經过了一百多年才有进一步的发展和完成——已經是十九世紀初的数学家的工作了[233 段]。

§3. 萊卜尼茲(Gottfried Wilhelm Leibniz 1646—1716)

228. 建立新計算法的初步 与牛頓不同,萊卜尼茲身后留下了巨大的亲笔遺稿,并有日期可以回溯其观念的发展次序。在一种标明 1675 年的手稿里最早見到 ∫ 这个記号,萊卜尼茲說:"把'所有'写作 ∫,把'所有 l'写作 $\int l$,即用以替代'l 之总和'是方便的"(这里 l 表示綫)。不久以后也出現了差数的記号 d,并建立了有关这些記号的簡单公式。但萊卜尼茲后来才逐漸开始在記号 ∫ 下写 dx 或 dy;

在1676—1677年間牛頓和莱卜尼茲（經第三者介紹）曾两度书信往来。牛頓在信中叙述了他的关于无穷級数展开及求积的結果。在讲到自己写好的論文时（似乎是指"流数术"），牛頓还說已經有了方法，不但可用以解切綫或最大最小問題，并且还能使求积問題变得容易；但方法本身則諱而不談。莱卜尼茲立即答之以他自己的方法內容，不过，只限于微分法。他写道：

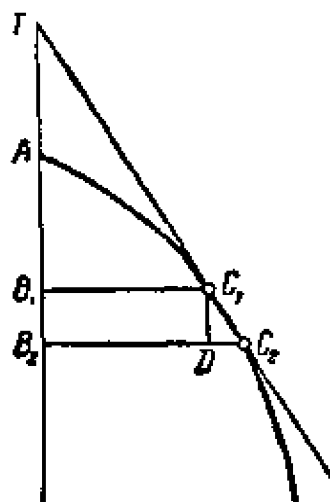


图 124.

"綫段 TB_1（图 124）与縱坐标綫 $B_1C_1$① 之比等于 C_1D（即两横坐标 AB_1, AB_2 之差）与 DC_2（即两縱坐标之差）之比。…由此可見，求作切綫无非就是求縱坐标之差，只要随意令横坐标之差彼此相等。所以，如果以后用 dy 表示两个极近的 y 之差，dx 表示两个极近的 x 之差，則显然 $d(y^2)$ 就是 $2ydy$，$d(y^3)$ 就是 $3y^2dy$，等等"。例如，

$$dy^2=(y+dy)^2-y^2$$

或者，如果略去彼此对消的数量以及平方 $(dy)^2$——"它的根据在最大最小方法中已經知道了，"② 則有 $d(y^2)=2ydy$.

进一步，莱卜尼茲导出了乘积及方根（把方根看作方幂）的微分公式，还微分了較复杂的根式并且强調說："很奇妙并且非常便利的是 dy 及 dx 总在无理关系之外"。

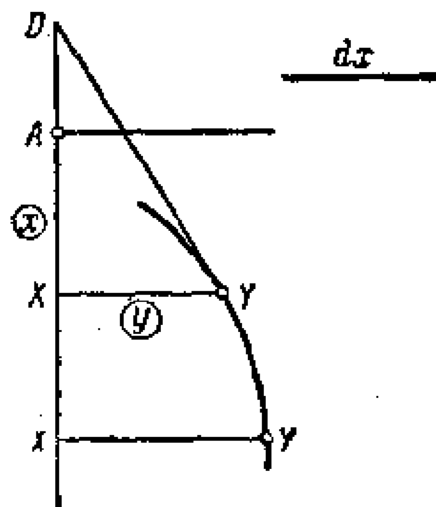


图 125.

229. 最先刊行的微分学著作 在1684年才出版了莱卜尼茲的第一种札記，它的标題很长："一种最大最小以及切綫的新方法，此法对分式及无理量均通行无阻并为此种算法的独特方法。"③

---

① 这里及以后都应注意莱卜尼茲习慣于沿鉛垂方向取横坐标，而沿水平方向取縱坐标。

② 暗示費尔馬及別人对求最大最小問題的解法。

③ 有俄譯本（Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница）（莱卜尼茲数学論文摘录）（数学科学的成就，第三卷第一期，1948；166—173頁）。

这里莱卜尼茲起先試图避免无穷小并对变数的"差"(differentia)或"微分"(quantitas differentialis)采取与上面所引他給牛頓的信中不同的观点。設(图125) YY 是一条任意的曲綫，Y 是曲綫上一个变动点，其橫坐标为 $AX=x$，縱坐标为 $YX=y$。莱卜尼茲直接了当以 dx 簡單地表示一个任意取定的綫段。如果 YD 是曲綫在点 Y 的切綫，則与 dx 之比等于 $y:XD$(XD 是次切距)的那个綫段就叫做 dy。

如此，与牛頓不同，在他原始概念是速度，而在莱卜尼茲則原始概念是切綫。

然后，莱卜尼茲报道了(未加任何証明)："关于常数、和、差、积、商、方幂、方根等的微分"計算法則"。[①]"如果知道我称为微分学的这种計算法的(比方說)算法，則…可以找最大最小以及切綫，而不必利用前此已发表的各种方法那样要試图消除分式和无理式…"。至于所有这些的証明，則須注意 dx，dy，…可以看作各与 x，y，…的"瞬間增量或減量"成比例。如此，归根到底問題仍然是考虑无穷小，一如上面所說給牛頓的信中一样!

莱卜尼茲指出，縱坐标的最大最小可由这条件来决定：切綫不偏向任何一側，即要 $dy=0$；在这时候縱坐标"不增，也不減，而处于靜止状态"。他这样来区别最大与最小：看曲綫以凹側向着軸还是以凸側向着軸，而这由 $d\,dy$ 的正負号来判断。最后，他研究了拐点(固然这里有欠明确处)。

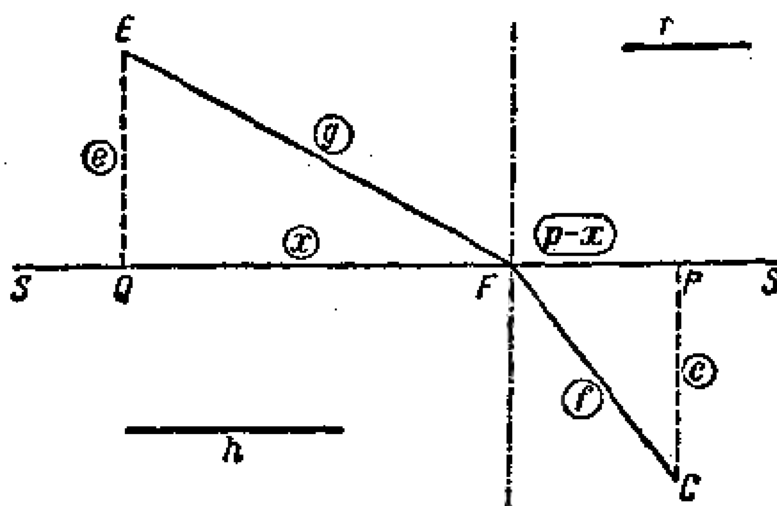


图 126.

在結尾时莱卜尼茲用他的方法解决了一系列問題，其中有这个著名的問題，是十七世紀費尔馬及其他学者所搞过的：光綫由一种介質中的点 C 到另

① 在有些情形要出現双重正負号，因为次切距未加正負号。

一种介质中的点 E 应取怎样的路徑（图 126）乃能使所經历时間最短？萊卜尼茲引入該二介質的"密度" h 及 r（意义是"光綫在其中所受阻力"），并且在表示分界面的直綫 SS 上找一个点 F，使路徑 CFE"成为所有可能路徑中最容易的一条"也就是使

$$w=CF\cdot h+FE\cdot r$$

成最小。按图上的記号則有

$$w=hf+rg=h\sqrt{(p-x)^2+c^2}+r\sqrt{x^2+c^2}.$$

所求的 x 可由条件 $dw=0$ 也即

$$\frac{h(p-x)}{f}=\frac{rx}{g}$$

来决定，这条件也可写成

$$\frac{p-x}{f}:\frac{x}{g}=r:h.$$

不难看出，这式子就表示物理学上一个熟悉的定律：入射角正弦及折射角正弦与两介質光学密度成反比例。萊卜尼茲总結說："熟悉这种計算法的人一下就能做出的，但别的最有学問的人却必須繞很大的弯子才能做到。

230. 最先刊行的积分学著作 在 1686 年萊卜尼茲发表了札記"論一种深邃的几何学和不可分素解析以及无穷"①，这里最早出現記号 $\int$（这回写成小写字母 s 的样子）。

首先講到巴罗的一个定理。如果以 y, x 及 p 各表示横坐标、縱坐标及次法距，则 $pdy=xdx$（这不难利用以 dy 及 dx 为勾股的无穷小"特征"三角形来得出）。"如果把这个差的（微分的）方程化为和的方程，則有 $\int pdy=\int xdx$。但由在我的切綫法中所說过的可以看出 $d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=xdx$；所以反之也有 $\frac{1}{2}x^2=$ $=\int xdx$（因为我們这里和与差或 $\int$ 与 d 是互逆的，正与寻常乘方与开方的情形一样）"。由此得 $\int pdy=\frac{1}{2}x^2$，这就是巴罗定理的涵义。

萊卜尼茲强調說，他的計算法也能用方程表出"超越的"也即非代数的曲綫，例如旋輪綫之类。我們来叙述该札记中相应之处，不过补充上萊卜尼茲自己在信中对此所給的解釋。在图 127 表出了半个圓及半拱旋輪綫；設圓的半徑为 1，而 $AB=x$, $BE=v$, $BC=y$, $AE=a$, $GD=dx$, $DL=dv$。于是，按一个熟悉的几何定理有 $v=\sqrt{2x-x^2}$，如此

① 参閱"萊卜尼茲数学論文摘录" 175—177 頁。

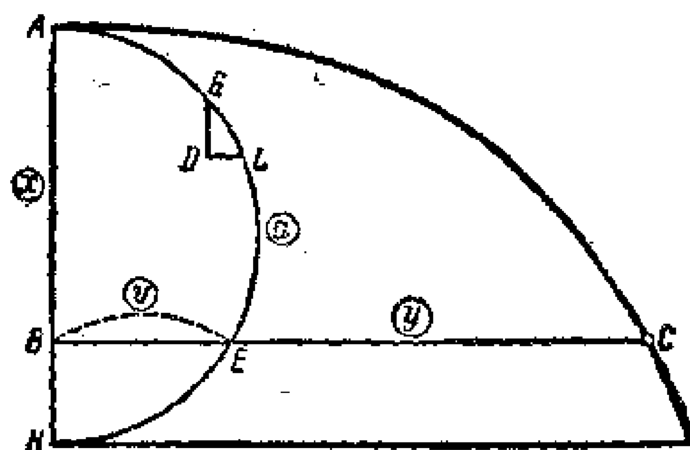


图 137.

$$dv=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx,\ GL=\sqrt{(dx)^2+(dv)^2}=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},\ a=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

旣然，按照产生旋輪綫的方法，$EC=a$ 而 $y=a+v$，则

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

"这方程完全表出縱坐标 y 与横坐标 x 間的关系，并且由此可以推出旋輪綫的一切性質"(例如，借助微分法不难由此推出旋輪綫的切綫或法綫的熟悉作法)。如此，积分法对于莱卜尼茲成为一种作出超越函数的工具，这种函数如果不用积分法他就写不出来也不能加以研究了。

在札記末尾莱卜尼茲作了一个重要的警告，說不可在記号 ∫ 下忽略乘以 dx，因为这样将阻塞由一个图形变换为另一图形的道路。显然，这里指的是能使一种求积化为另一种求积的变数变换法，而这做起来，确实因为有 dx 而簡化。

如此，对于莱卜尼茲，积分計算法里的基本概念是"实有"无穷小矩形 ydx 之和(这他后来依照貝努里兄弟的榜样称为积分)；而牛頓則以原函数概念作基础，这是我們已看到的。对于应用而言莱卜尼茲的观点比較方便，虽然积分的計算本身他也归結为求原函数。

231. 莱卜尼茲的其他著作．学派的建立 莱卜尼茲几十篇論文和笔記以及他与当时杰出数学家的通信，内容是非常丰富多采的。首先包含着他所建立的計算法的进一步发展。关于这类問題有些我們在本书前几章里已經講到过：幂指数式的微分法[85 段(5)]，乘积的高阶微分公式[98 段]，有理分式的分解为簡分式以便于积分[166 段]。莱卜尼茲的其他作品有的是关于

函数按无穷級数的展开，有的則屬于解析的較高深范圍[我們将在本书第二卷講到]。除去作出解析的工具以外，萊卜尼茲还从事于其应用方面，特别是在"微分几何"里的应用。他常常对同时代的人提出种种应用問題，并且他也解决别人所提出的問題。

特别有重要意义的事情是，圍繞萊卜尼茲出現了一个学派，其主要代表有雅谷·貝努里(Jokob·Bernoulli 1654—1705)和約翰·貝努里(Johann Bernoulli 1667—1748)这两兄弟以及基約姆·弗朗索阿·德·洛必达(Guilleume François de l'Hospital 1661—1704)这位第一部微分学教本的作者。学派的形成促进了萊卜尼茲的科学热情，他笔下源源产生作品及积极的科学通信。

也不能低估他所創議的方便記号的地位，它們如此适合于几何及力学的研究(难怪萊卜尼茲的記号我們基本上至今仍沿用！)。适宜的記号无疑地便利了他一开头就想望着的算法的建立。这种算法漸漸成了公共的財富。

232. 萊卜尼茲的奠基問題① 在这方面萊卜尼茲經历到很严重的困难并且終身未停止寻求其計算法的根据的途徑。

"实有"无穷小不但成为微分学的基础，同样也成了积分学的基础。对于微分学萊卜尼茲[229]还試图将无穷小差代之以与其成比例的有限数量；和无穷小("不可表明的")特征三角形一道他同时也考虑了与它相似的("可表明的")有限三角形。但推导其公式时他仍不能避开无穷小及利用忽略高阶无穷小原理。

在答复对新計算法的批評攻击中，萊卜尼茲提出以"无比小"数量代替"无穷小"数量，微尘对地球而言或地球对天空而言就是这样的量。此外，萊卜尼茲在他的其他发言里曾强調說，他完全沒有把无穷小量理解为"事实上很小的而总是确定的常数"；这种量应該只是充分地小而使誤差小于任何指定的数。在此，如果乐意的話，可以看出接近于"潛在"无穷小观点的暗示。

萊卜尼茲甚至認为这情形的可能出路是：把无穷小看作"虛构的"或"理想的"概念，只用来以便于发現并簡化論証，就好象寻常解析中的虛根一样。最后，他还拟定了一类观念，試图以此来論証他的推論的合法性——这就是他的"連續性原理"，与极限过程有些連系。但萊卜尼茲想給自己的計算法找到根据的一切尝試，似乎对他自己也不是完全有說服力的。萊卜尼茲在一种

① 參閱"萊卜尼茲数学論文摘录"187—196頁。

手稿里曾提出这样的問題：无穷小是不是質的存在？它們有沒有严格的根据？萊卜尼兹声称："我想这可能仍是疑問"。

另一方面，在他一篇爭辯性的論文里他这样說过："对那些試图証明一切，甚至連最初的原則也想加以証明的人們的努力，我給以很高的評价而且我自己也常常参与其事。但是我不贊成因过分的細密而阻碍了創造的技巧或者在这借口之下拋弃最好的創发而以此剝夺其果实…"。如此，萊卜尼兹甚至在对所建立的計算法举出根据的可能性沒有把握时，仍旧認为它所导至的那些結果可以証实它的运用是合理的。

事情的这种情况，馬克思在下面这几句針对那时代数学家所說的話里，評述得再好不过了："他們自己相信新发現的計算法的神秘性，这种新发現的計算法用从数学上看来肯定是不正确的方法得出了正确的(而且在几何学的运用上來說簡直是惊人的)結果。这样，他們自己就欺騙了自己，甚至把这种新的发現奉为至宝。…"①

233. 結尾語 最近一百多年数学分析获得进一步的繁荣，它的方法改善了，应用范圍显著推广了。但是它仍然保持相当程度的"神秘性"：它的基础屡次受到批判而还是不明确。

固然，十七世紀数学家仅仅草創的极限概念后来是明确化了。著名彼得堡院士廖那特·欧拉(Leonard Euler 1707—1783)在他的"微分学"(1755)序言里很清楚地說到两个变数增量越来越小时其比所越来越趋近的极限。关于这一点我們在 26 段里已經說过，但那里曾强調指出，在欧拉自己的論文里极限概念却一次都未用到。差不多同一时候法国数学家兼哲学家沙恩·勒隆·达朗貝尔(Jean le Rond d'Alembert 1717—1783)在著名的"百科全书"中他所写的节目里也給出了极限概念的一般定义，并且他深信："极限理論就是微分学的眞正形而上学的基础"。在十八世紀末俄罗斯数学家兼力学家謝緬·叶麦利亚諾維奇·古里叶夫院士(Семен Емельянович Гурьев, 1764—1813)广泛傳布了极限理論在解析及几何里的应用。但事实上极限概念仍然沒有实际上成为数学分析奠基的武器。如此，在 1797 年拉札尔·卡尔諾(Lazare Carnot 1753—1823)发表了他的"关于无穷小的形而上学的思考"②，其中他重复了早先已說过的思想而試图以誤差的相互補償为理由误

① 卡尔·馬克思"Математические рукописи"(Под знаменем марксизма, 1, 1933)，(数学手稿)(在馬克思主义旗幟下)65 頁。

② 有俄譯本(ГТТИ, 1933)。

来説明何以恒能从可疑的方法得出正确的結果！

到了十九世紀初——特別是奥居斯丹·哥西(Augustin Cauchy 1789—1857)——才給整个数学分析的系統构成用极限概念打下了現在的基础，終于消除了任何神秘論。但是，我們知道，这基础中仍然还遺留着漏洞——沒有包括实数概念的严密基础，也沒有建立实数域的連續性；这到了上世紀的后期才完成。

現在讀者当能終于全盘了解本卷中所学那些微积分基本概念的起源、发展及明确化的情景了。

第二卷第一分册目录

第二卷第二分册目录

第十五章 数項級数

§1. 导引

234. 基本概念 設給了一个无穷数(序)列

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

由这些数所組成的記号

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{2}$$

叫做一个无穷級数(或簡称級数)，而(1)中各数則称为級数之項。(2)也常常利用总和号写成这样:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{2a}$$

这里序号 n 历取 1 至∞一切整数值[①]。

我們来把級数的項逐一相加而組成这些和(和的个数无穷):

$$\left.\begin{array}{c} A_1=a_1,\ A_2=a_1+a_2,\ A_3=a_1+a_2+a_3, \\ \cdots,\ A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \cdots; \end{array}\right\} \tag{3}$$

并称其为級数的部分和或級数节。这个部分和序列 $\{A_n\}$ 我們将恒与級数(2)并列:記号(2)的作用也就在表明該序列的产生。

級数(2)的部分和 A_n 在 $n\to\infty$ 时的有限或无限极限

$$A=\lim A_n$$

就叫做該級数之和而写成

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

如此使記号(2)或(2a)具有了数的意义。如果一个級数具有有限

① 但級数項的下标,也可不由1开始，而由0或任何大于1的自然数开始有时更为方便。

的和，则称其为收斂級数，反之(即和等于 $\pm\infty$ 或根本沒有和时)，则称其为发散級数。

如此，級数(2)的收斂性問題按定义就等价于序列(3)的有限极限存在問題。反之，任意取一个序列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_n,\cdots,$$

则其有限极限存在問題可以化为

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+\cdots, \qquad (4)$$

这样一个級数的收斂性問題，它的部分和恰好就是該序列之項。此时級数之和与序列之极限合而为一。

換句話說，无穷級数及其和的研究就是序列及其极限的研究的一种新的形式。但这种形式，讀者可以从以后的叙述中看出，无論在确定极限的存在还是在計算极限时都表現难以估計的优点。因此无穷級数在数学分析及其应用中成为一种重要的研究工具。

例 1) 无穷級数的一个极簡单的例子乃是(讀者所熟悉的)几何級数:

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

它的部分和($q\neq1$ 时)是

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

如果几何級数的公比 q 的絕对值小于 1，则[如我們所知，30 段 6)] s_n 有有限极限

$$s=\frac{a}{1-q},$$

即該級数收斂而 s 是它的和。

在 $|q|\geqslant1$ 时該几何級数給我們一个发散級数的例子。如果 $q\geqslant1$，则其和将成 $+\infty$ 或 $-\infty$ (視 a 的正負号而定)；在其他情形则和根本不存在。我們指出一个有趣的級数，它在 $a=1$，$q=-1$ 时得出:

$$1-1+1-1+\cdots\equiv1+(-1)+1+(-1)+\cdots ①$$

① 如果級数某項 a 为負数: $a=-b\ (b>0)$，則将 $\cdots+(-b)+\cdots$ 写成 $\cdots-b+\cdots$。但要注意，在此級数該項仍为 $-b$ 而不是 b。

其部分和交錯着等于 1 或 0。

2）不难确定級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

是发散的，事实上，級数的項虽遞减而其第 n 个部分和

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

則随 n 而增至无穷。

3）最后，我們給出一个値得一提的例子，它由变数

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

得出，我們在 49 段已經指出这个变数趋于超越数 e。也就是說，e 是下面无穷級数之和：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

回忆 49 段所講 e 的近似計算，从这个例子，讀者可以看出繼續导入越来越小的校正数的好处，这种好处就在于这些校正数是把用部分和数的形式表示出的 e 的近似値来逐步地加以改进。

235. 簡单定理 如果在級数(2)里舍去前 m 項，則得一級数：

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n, \tag{5}$$

称为級数(2) m 項后的余項。

1°. 如果級数(2)收斂，則其任何余項 (5) 也收斂；反之，由余項(5)的收斂也可推出原級数(2)的收斂。

我們固定 m 并以 A'_k 表示級数(5)的第 k 部分和：

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}.$$

于是显然有

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

如果級数(2)收斂而 $A_n \to A$，则在 k 无限增大时对和 A'_k 也存在有一个有限极限

$$A' = A - A_m \tag{7}$$

这就表示級数(5)是收斂的。

反之，如果給出了級数(5)是收斂的而 $A'_k \to A'$，则令 $k = n - m$($n > m$ 时)而改写等式(6)为:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

由此可以看出，在 n 无限增大时，部分和 A_n 有极限

$$A = A_m + A', \tag{8}$$

即級数(2)收斂。

换句話說，在一个級数的开头舍弃其有限多项或添补一些新项，都不会影响該級数的性质(指其收斂性或发散性而言)。

如果級数(5)收斂的話，我們将其和的記号 A' 改用 α_m 来表示，如此可以在記号上表現出余項是由哪一項以后所取的。于是公式(8)和(7)可改写如下:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

如果 m 增至无穷，则 $A_m \to A$ 而 $\alpha_m \to 0$。如此:

2°. 若級数(2)收斂，则其第 m 項后余項之和 α_m 随 m 的增大而趋于 0。

我們提一提收斂級数的一些簡单性質:

3°. 如果收斂級数各項乘以同一倍数 c，则級数仍保持其收斂性，而其和则乘以 c。

事实上，級数

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和 $\bar{A}_n$ 显然等于

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

而有极限 cA。

4°. 两个收斂級数

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

与

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

可逐項施行加或減，所得級数

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots$$

也收斂，而其和各等于 $A\pm B$。

如果 A_n, B_n 及 C_n 表示上述各級数之部分和，則显然有

$$C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\pm B_n.$$

取极限得

$$\lim C_n=\lim A_n\pm\lim B_n,$$

这就証明了我們的断言。

最后，我們注意：

5°. 收斂級数的公項 a_n 必趋于 0。

这可以用很初等的方法来証明：既然 A_n 有（因而 A_{n-1} 也有）有限极限 A，則

$$a_n=A_n-A_{n-1}\to 0.$$

上述命題包含了級数收斂的必要条件，今后常常要用到它。这个条件如不成立，則級数必定发散。但是要注意，这条件对于級数的收斂性是不充分的。换句話說，卽使实現了这个条件，級数还是可以发散。級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

就是一个例子[这是 **234** 段 2)討論过的]；讀者以后还可找到許多这类例子。

§ 2. 正項級数的收斂性

236. 正項級数收斂性条件 現在我們来解决如何判定級数收斂或发散的問題。对于非負項的級数这个問題最容易解决；为簡单起見这种級数我們将簡称为正項級数。

設

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{(A)}$$

是一个正項級数，即 $a_n \geqslant 0 (n=1, 2, 3, \cdots)$. 于是显然有

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

也就是說，A_n 是 n 的上升函数。回忆一下单調函数的极限定理[44 段]，我們立即得出下列关于正項級数的基本定理：

定理. 正項級数(A)必有和；此和在其部分和有上界时是有限的(因此該級数也就收斂)；在相反的情形則該和是无限的(从而級数发散)。

正項級数的所有实用的收斂和发散檢驗法归根到底全都建立在这个簡单定理上。但只在很少的情形下能直接应用它来判断級数的性質。我們来举几个这种例子。

1) 試看級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

它就是所謂調和級数①

显然我們有不等式：

---

① 由第二項起，每項都是两个相邻項的調和平均数。所謂 c 是 a 与 b 的調和平均数乃指它們之間有如下关系：

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

如果將該調和級数由第二項起依次分段,每段依次为 2、4、8、… 項:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{2};\ \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{2^2};\ \underbrace{\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}}_{2^3};\cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}}_{2^{k-1}};\ \cdots,$$

則每段之和都將大于$\frac{1}{2}$: 这只要在(1)中依次令 $n=2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}, \cdots$ 就可明白。我們以 H_n 表示調和級数的第 n 个部分和;于是显然

$$H_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}.$$

可見部分和无上界,故該級数有无限和。

我們还在此提一下, H_n 随着 n 的增大而非常迟緩地增大。例如欧拉曾算过,

$$H_{1000}=7.48\cdots,\quad H_{1000000}=14.39\cdots,\ \text{等等。}$$

以后我們还有机会对和 H_n 的增長情况作更精确的描述[238 段,4)]。

2) 現在我們来看更一般的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

这里 s 是任意的实数;它包含前一級数为其特例($s=1$ 时)。

由于它与級数(1)相似,故也称为調和級数。

既然在 $s<1$ 时該級数每項都大于級数(1)的相应項,則在这情形部分和也当然沒有上界,所以該級数发散。

現在我們来看 $s>1$ 的情形;为便利起見令 $s=1+\sigma$, 而 $\sigma>0$。与(1)相似,我們这回有

$$\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}. \tag{2}$$

也如前例將級数各項依次分段:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{2};\ \underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{2^2};\ \underbrace{\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{15^s}}_{2^3};\ \cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^{\sigma}}+\cdots+\frac{1}{(2^{k}-1)^{\sigma}}}_{2^{k-1}};\ \cdots,$$

由(2)不难証明,这些和各小于下列几何級数的相应項:

$$\frac{1}{2^{\sigma}},\ \frac{1}{4^{\sigma}}=\frac{1}{2^{2\sigma}},\ \frac{1}{8^{\sigma}}=\frac{1}{2^{3\sigma}},\ \cdots,\ \frac{1}{(2^{k-1})^{\sigma}}=\frac{1}{2^{(k-1)\sigma}},\ \cdots$$

在这情形显然,无論取該級数的哪一个部分和,它总小于常数

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\sigma}}},$$

所以該級数收斂。

237. 級数比較定理 正項級数的收斂性或发散性常常可以跟另一个已知收斂或发散的級数的对比来确定。这种比較法以下列簡单定理为基础。

定理 1. 設給了两个正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{B}$$

如果由某項起(比方說对 $n>N$)不等式 $a_n \leqslant b_n$ 成立,則由級数 (B) 的收斂性可推出級数 (A) 的收斂性,或者这是同一回事——由級数 (A) 的发散性可推出級数 (B) 的发散性。

証明 因为舍弃級数的开头有限多項并不影响級数性質[235段 1°],我們不妨認为对 $n=1,2,3,\cdots$ 的一切値,恒有 $a_n \leqslant b_n$ 而不減弱問題的一般性。設 A_n 及 B_n 各表示級数(A)及(B)的部分和,如此有

$$A_n \leqslant B_n.$$

設級数(B)收斂;于是按 236 段的基本定理知道和数 B_n 有界:

$$B_n \leqslant L (L\text{为常数}; n=1, 2, 3, \cdots).$$

由前一不等式更不成問題有

$$A_n \leqslant L,$$

而这按同一定理就表示級数(A)是收斂的。

有时在实踐上比較方便的是下面这个定理，它是由前一定理导出的:

定理 2. 如果极限

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{①} \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty),$$

存在，則在 $K<\infty$ 时由級数(B)的收斂性可推知級数(A)的收斂性，而在 $K>0$ 时由級数(B)的发散性可推知級数(A)的发散性[如此，在 $0<K<\infty$ 时两級数同时收斂或同时发散]。

证明 設級数(B)收斂而 $K<\infty$. 取一任意的数 $\varepsilon>0$, 按极限的定义，对充分大的 n 我們将有

$$\frac{a_n}{b_n} < K+\varepsilon, \text{由此有 } a_n < (K+\varepsilon) b_n.$$

由 235 段 3° 知道，既然級数(B)收斂，則逐項乘以 $K+\varepsilon$ 所得出的級数 $\Sigma(K+\varepsilon)b_n$ 也就收斂。由此按前一定理推知級数(A)收斂。

如果級数(B)发散并且 $K>0$, 則在这情形反比 $\frac{b_n}{a_n}$ 有有限极限；級数(A)应該发散，因为，倘若它收斂，則按剛才所证，級数(B)也就該收斂了。

最后，我們还讲一个比較定理，它也是第一个定理的推論。

定理 3. 如果由級数某項起(比方說对于 $n>N$)不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}^{②}, \tag{3}$$

① 我們在此假設 $b_n \neq 0$。

② 在此 a_n 及 b_n 当然假設都异于 0。

成立，則由級数(B)的收斂性可推知級数(A)的收斂性，或者——这是同一回事——由級数(A)的发散性可推知級数(B)的发散性。

証明　如上面証明定理1时一样，可認为不等式(3)对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 的一切值都成立而不致減弱問題的一般性。在这情形我們有

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \ \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把这些不等式两边都乘起来，得

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \text{ 或 } a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

設級数(B)收斂；則逐項乘以因数 $\frac{a_1}{b_1}$ 所得的級数 $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ 也收斂。而此时級数(A)按定理1也就收斂了，这就是所求证的。

現在我們举几个直接应用比較定理来确定級数收斂性或发散性的例子。

238. 例 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收斂，因为

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

(**定理 1**)。

2)　与調和級数[**236**段]比較可以决定許多級数是否收斂。按定理1：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收斂：$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$；

(б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p>0)$ 发散：对充分大的 n，$(\ln n)^p < n$；

(в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收斂：对充分大的 n，$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$.

3) 按定理 2:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}(0<x<\pi)$发散: $\sin\frac{x}{n}:\frac{1}{n}\to x$;

同样,下面两个級数也发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)(x>0),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)(a>1);$$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$收斂: $\left(1-\cos\frac{x}{n}\right):\frac{1}{n^2}\to\frac{x^2}{2}$.

4) 最后,我們来看級数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right).$$

用微分学方法不难建立不等式:

$$\ln(1+x)<x\quad(x\neq 0,\ -1<x<\infty).$$

利用它我們可写:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

同时

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

所以

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

如此,該級数是正項級数并且各項均小于收斂級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$[236段]的相应項,所以它是收斂的。

如果以C表示其和,則部分和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\ln(n+1)\to C$$

(H_n 也如惯例表示调和級数的部分和)。这里 $\ln(n+1)$用 $\ln n$代替，因为它們的差 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$趋于0。最后：以$\gamma_n$ 表示一个无穷小，我們就有值得注意的关于 H_n 的公式：

$$H_n=\ln n+C+\gamma_n. \tag{4}$$

由此可看出，在 n 无限增大时調和級数的部分和 H_n 随 $\ln n$ 而增长。

公式(4)中的常数 C 叫做欧拉常数。它的数值(由别的办法算出)如下：

$$C=0.577215\cdots$$

239. 哥西検驗法及达朗貝尔検驗法 将所給級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

与各种已知收斂或发散的标准級数相比較，这类"比較検驗法"也能以另一种可以說是更有系統的方式来进行如下。

为了作比較，我們一方面选取收斂几何級数

$$\Sigma q^n=q+q^2+\cdots+q^n+\cdots(0<q<1),$$

另一方选取发散級数

$$\Sigma 1=1+1+\cdots+1+\cdots$$

作为标准級数(B)。

把受検驗的級数(A)按定理 1 的程序与上述两个級数作比較，即可导至下面的検驗法：

哥西検驗法 我們給級数(A)作一个式子

$$\mathscr{C}_n=\sqrt[n]{a_n}.$$

如果在 n 充分大时不等式

$$\mathscr{C}_n\leqslant q$$

成立，而 q 是一个小于 1 的常数，则該級数收斂；如果由某項以后

有

$$\mathscr{C}_n \geqslant 1,$$

则該級数发散。

事实上，不等式 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ 或 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ 各等价于 $a_n \leqslant q^n$ 或 $a_n \geqslant 1$；剩下只要应用定理 1 就行了[①]。

但是，这个檢驗法也常常以另一种极限的形式来应用：

我們假設，$\mathscr{C}_n$ 一式有极限（有限或无限）

$$\lim \mathscr{C}_n = \mathscr{C}.$$

于是在 $\mathscr{C} < 1$ 时該級数收斂，而 $\mathscr{C} > 1$ 时該級数发散。

如果 $\mathscr{C} < 1$，則我們取一正数 ε，小于 $1 - \mathscr{C}$，如此也就有 $\mathscr{C} + \varepsilon < 1$。按极限定义，对 $n > N$ 将有

$$\mathscr{C} - \varepsilon < \mathscr{C}_n < \mathscr{C} + \varepsilon.$$

$\mathscr{C} + \varepsilon$ 一数即起上述公式中 q 的作用，故該級数收斂。

如果 $\mathscr{C} > 1$ 而有限，則取 $\varepsilon = \mathscr{C} - 1$，如此 $\mathscr{C} - \varepsilon = 1$，对充分大的 n 值这回将有 $\mathscr{C}_n > 1$，故該級数发散。在 $\mathscr{C} = \infty$ 时也有类似的結果。

在 $\mathscr{C} = 1$ 的情形这个檢驗法不能判断級数收斂与否。

如果級数(A)与上述标准級数按定理 3 作比較，則导至这样一种檢驗法：

达朗貝尔檢驗法 对級数(A)我們来看这个比率：

$$\mathscr{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

如果在 n 充分大时，不等式

$$\mathscr{D}_n \leqslant q$$

成立，而 q 是一个小于 1 的常数，則該級数收斂；如果由某項以后

---

① 当然，級数的发散性也可以直接由收斂性的必要条件这一事实[235 段，5°]不成立而得出。

有

$$\mathscr{D}_n \geqslant 1,$$

则該級数发散①。

但是，比較方便的是采用这个檢驗法的极限形式：

設比率 $\mathscr{D}_n$ 有极限(有限或无限)：

$$\lim \mathscr{D}_n = \mathscr{D}.$$

于是在 $\mathscr{D}<1$ 时該級数收斂，而在 $\mathscr{D}>1$ 时該級数发散。

証明与哥西檢驗法相同。

这个檢驗法在 $\mathscr{D}=1$ 时也不能給出任何結論。

附注 我們对所說的檢驗法仍照习慣保持达朗貝尔的名字。但事实上达朗貝尔对級数的收斂性及以部分和极限作級数之和两点并未有明白的观念。达朗貝尔引以为戒的是，不要采用后項与前項之比絕对值大于1的級数，他认为这种級数是"錯誤"的。为了使級数"好而不錯誤"，他只要求所說的比率終于(依絕对值)成为小于一。要注意我們上面所要求的却与此不同，卽，要該比率小于一个固定眞分数 q！按現代的意义达朗貝尔的条件对級数的收斂是不充分的：例如，大家所知道发散的調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也是滿足該条件的。

該檢驗法最初由哥西以极限的形式明确地陈述出来并且給了証明。

例 1) 設給了一个級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$。对此自然宜施用哥西檢驗法：

$$\mathscr{C}_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\quad \mathscr{C}=\frac{1}{e}<1,$$

如此該級数收斂。

2) 应用达朗貝尔檢驗法于下列級数：

---

① 这里发散性也可直接由收斂性必要条件不成立而推出：試看，如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$ 卽 $a_{n+1}\geqslant a_n$，則 a_n 不能趋于 0。

$$(\text{a})\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{n+1},\quad \mathscr{D}=0,$$

这个級数不論 x 值如何都是收斂的；

$$(6)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n(x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\quad \mathscr{D}=\frac{x}{e},$$

这級数在 $x<e$ 时收斂而在 $x>e$ 时发散；在 $x=e$ 时則达朗貝尔檢驗法的极限形式不能給出什么結論；但旣然 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，因而恒有 $\mathscr{D}_n>1$，則此級数仍然发散。

3）对調和級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \qquad (H_s)$$
$$(s>0)$$

所說諸檢驗法不适用。事实上，在这情形 $\mathscr{C}_n=\frac{1}{n^{s/n}}<1$，但 $\lim\mathscr{C}_n=1$，因为

$$\ln\mathscr{C}_n=-s\cdot\frac{\ln n}{n}\to 0. \qquad [121\text{段},3)].$$

同样虽則 $\mathscr{D}_n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}<1$，但显然 $\lim\mathscr{D}_n=1$.

但是由别的想法［236 段］我們知道，調和級数在 $s>1$ 时收斂，而在 $s\leqslant 1$ 时发散。

240. 拉貝檢驗法 在上述諸檢驗法不能給出答案的那些情形下，則不得不采取較复杂的檢驗法，它們建立在被檢驗級数与别的比几何級数收斂得“慢”或发散得“慢”的标准級数的对比上。

我們在此再討論一种拉貝檢驗法[1]，它的实质就是將所給級数(A)与調和級数(H_s)作比較。此时要考察这样一个式子：

$$\mathscr{R}_n=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

---

① Joseph Ludwig Raabe (1801—1859)是德国数学家。

拉貝檢驗法 如果 n 充分大时，不等式

$$\mathscr{R}_n \geqslant r,$$

成立而 r 是一个大于 1 的常数，則該級数收斂；如果由某項以后

$$\mathscr{R}_n \leqslant 1,$$

則該級数发散。

如此，設在 n 充分大时，我們有

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \text{ 或 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1-\frac{r}{n}.$$

現在我們在 1 与 r 之間取任意一数 s：$1<s<r$。因为按一个已知的极限关系[第 **65** 段 3)]有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{-\frac{1}{n}}=s,$$

于是对充分大的 n 将有[36 段，1°]

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{-\frac{1}{n}}<r \text{ 或 } \left(1-\frac{1}{n}\right)^s>1-\frac{r}{n},$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^s.$$

这不等式也可写成

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n-1}{n}\right)^s=\frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}.$$

右边我們有收斂級数(H_s) $(s>1!)$的两个相鄰項之比；应用定理 3，就証明了級数(A)的收斂性。

如果由某項以后

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1,$$

则由此立即可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}};$$

应用定理 3 到級数(A)与发散級数 (H_1) 上我們就得出級数(A)发散的結論。

拉貝檢驗法也主要以极限形式来应用。

設 $\mathscr{R}_n$ 有极限(有限或无限)

$$\lim \mathscr{R}_n = \mathscr{R}.$$

于是在 $\mathscr{R}>1$ 时該級数收斂，而在 $\mathscr{R}<1$ 时該級数发散。

达朗貝尔檢驗法与拉貝檢驗法比較起来，我們可看出后者显著强于前者。如果极限 $\mathscr{D}=\lim \mathscr{D}_n$ 存在且异于 1，則 $\mathscr{R}_n=n(1-\mathscr{D}_n)$ 有一极限 $\mathscr{R}$，在 $\mathscr{D}<1$ 时它等于 $+\infty$ 而在 $\mathscr{D}>1$ 时它等于 $-\infty$。如此，若达朗貝尔檢驗法能对一給定級数收斂与否問題給出答案，則拉貝檢驗法更不成問題能給出答案；进一步說所有这些情形都被 $\mathscr{R}$ 的两个可能值即 $\pm\infty$ 所包括了，如此，所有其他 $\mathscr{R}$ 值(除 $\mathscr{R}=1$ 外)——它們也能給出收斂性問題的答案——相应于达朗貝尔檢驗法不能給出答案的那些情形，因为此时 $\mathscr{D}=1$。

作为应用拉貝檢驗法的例子我們来看这个級数：

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

达朗貝尔檢驗法在这个級数上是不适用的，因为 $\mathscr{D}_n=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\to 1$ (并且 $\mathscr{D}_n<1$)。于是我們来做出拉貝的式子：

$$\mathscr{R}_n=n\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)=\frac{6n-1}{2(2n+1)}.$$

由于 $\mathscr{R}=\lim \mathscr{R}_n=\frac{3}{2}>1$，故該級数收斂。

但是在 $\mathscr{R}=1$ 时我們又得不出級数收斂与否的答案了。在这

种情形(很稀少)还須采取更敏感而复杂的檢驗法。

241. 麦克洛林-哥西积分檢驗法 最后我們还来导出一种檢驗法，形式与所有以前各种都不同。

設所給出的級数有这样的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{5}$$

这里 $f(n)$ 是某函数 $f(x)$ 在 $x=n$ 时的値，这函数在 $x \geqslant 1$ 时有定义[①]；我們还假設这函数是連續的，正的并且单調下降的。

我們来看 $f(x)$ 的任何一个原函数:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

由于它的导函数 $F'(x)=f(x)>0$，則 $F(x)$ 随 x 而增大，并且在 $x\to\infty$ 时一定有一极限 L，有限或无限[第 47 段]。按照这两种不同情形就建立了下面的收斂和发散檢驗法，它于 1742 年就已以几何形式由麦克洛林說出来，但一直未引人注意，到 1827 年才重新被哥西所发現。

积分檢驗法 級数 (5) 在原函数 $F(x)$ 的极限 L 有限时收斂，在 L 无限时发散。

显然，无論对哪一个原函数来說都是一样的；因为两个原函数之間只差一个常数；我們令

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,dx. \tag{6}$$

旣然函数 $f(x)$ 是单調的，則对 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 有

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n,$$

如此也有

---

① 序号 n 的初値也可不取 1 而取任何别的自然数 n_0；于是函数 $f(x)$ 須考虑其在 $x \geqslant n_0$ 时的情形。

$$a_{n+1} \leqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant a_n.$$

对于級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$$

而言，其第 n 部分和为

$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx = F(n+1);$$

显然，这个級数收斂还是发散就看 L 是有限还是无限来决定。在 L 有限时，按"比較定理" 1 [第 237 段]，具較小項的級数 $\sum_{1}^{\infty} a_{n+1}$ 收斂，从而級数 (5) 也就收斂；反之，$L=\infty$ 时具較大項的級数 $\sum_{1}^{\infty} a_n$，也即級数(5)，自必发散无疑。

例 1) 我們首先再来看調和級数:

$$(\text{a})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (s>1).$$

在情形(a):

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad F(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln x\to\infty\ \ (x\to\infty\ \text{时}),$$

故該級数发散。

在情形(6):

$$f(x)=\frac{1}{x^s},\qquad F(x)=\int\frac{dx}{x^s}=-\frac{1}{s-1}x^{-(s-1)}\to 0\ (x\to\infty\ \text{时}),$$

而該級数收斂。

这些結果在 [236 段]已經知道，我們再补充一个新的:

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$.

这里

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x},\ F(x)=\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}=\ln\ln x\to\infty\ (\text{在 } x\to\infty\ \text{时}),$$

故該級数发散。

积分(6)在 $x\to\infty$ 时的极限叫做由1至 ∞[1] 的积分，并表为

$$F(\infty)=\int_1^\infty f(x)\,dx.$$

如此，級数(5)收斂还是发散就取决于这个积分值有限还是无限。

在这种形式之下，积分檢驗法可以有一种接近麦克洛林的观念的簡单几何解釋。如果用曲綫表出函数 $f(x)$ （图1），则积分 $F(x)$ 将表示这曲綫与 x 軸及两縱坐标綫所圍的面积；积分 $F(\infty)$ 则在某种意义上可以看作整个向右伸展的曲綫下图形的面积。另一方面，級数(5)的項 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 表示在 $x=1,2,\cdots,n,\cdots$ 各点上的縱坐标，也可以說是以1为底以所說各縱坐标为高的各矩形的面积。

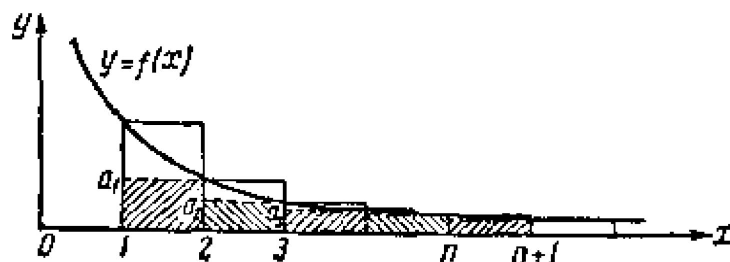


图 1.

如此，級数(5)之和无非就是外矩形面积之和，而与內矩形之和所差只在第一項。这使得上面所建立的結果成为一目了然的事情：如果曲綫图形的面积是有限的，则更不待言，其所包含的阶梯状图形面积也是有限的，故該級数收斂；若曲綫面积无限，则包含它的阶梯状图形面积也无限，故在此情形該級数发散。

---

[1] 这是所謂非正常积分；这类积分我們将在第十七章里討。

§ 3. 任意級数的收斂性

242. 收斂性原理 現在来討論各項有任意正負号的級数的收斂性問題。我們知道[234 段]，按定义級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m} + \cdots$$

的收斂性問題就是部分和序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+m}, \cdots \tag{1}$$

的有限极限存在問題。在 52 段已經建立了序列的收斂原理，給出了这种极限存在的一般充要条件(充分而必要的条件)。这个适用于序列(1)的原理現在可另行陈述如下：

要級数(A)收斂，其必要而充分的条件是要对每个实数 $\varepsilon>0$ 都有这样一个序号 N 与之相应，使在 $n>N$ 时不等式

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2}$$

(对一切 $m=1, 2, 3, \cdots$)恒成立[①]。

(这里 $n+m$ 起 52 段里第二指标 n' 的作用，它是与 n 独立的，可以取为大于 n 而不减一般性。)

如果假設該級数收斂而在不等式(2)里特别令 $m=1$，則得

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N \text{ 时}),$$

如此 $a_{n+1} \to 0$，也即 $a_n \to 0$，而化为 235 段 5° 的必要条件。它本身还不能保証級数的收斂，而这正是因为它远未用尽上述条件的这种涵义：不但要級数充分远的項能各別地小到任何程度，并且还要无論取多少个这种項之和也能小到任何程度。对这情形調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是一个很好的例証，在这級数里公項$\left(=\frac{1}{n}\right)$趋于 0，可是如

---

① 这个条件創始人波尔察諾及哥西也都是針对着无穷級数收斂性問題給出这个条件来的。

果在这項后面再取 $n-1$ 个項，則总和終于 $>\frac{1}{2}$ [236 段，(1)]。

243. 絕对收斂性 因为直接应用收斂原理常常会引起困难，那末我們値得来研究一下那几类能以較简单方法解决問題的情形。

我們在上一节已經看到，正項級数的收斂性大部分都不难确定，因为有一系列方便的检驗法。因此我們自然想到首先来考慮所給級数的收斂性問題能化为正項級数收斂性問題的那些情形。

如果一个級数的各項不全是正的，但由某处以后成为正的，則只要舍弃該級数开头充分多項[235 段，1°]就可化为正項級数的问题来研究。如果一个級数的各項全是負的，或至少由某处以后全成为負的，則只要改变所有各項的符号就可化为所討論过的情形[235 段，3°]。如此，本质上新鮮的情形就是那种正項与負項都多至无穷的級数。

定义：如果級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{(A)}$$

与級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \qquad \text{(A}^*\text{)}$$

同时收斂，則級数(A)称为**絕对**收斂的。

于是我們有这个

哥西定理。只要由級数(A)各項絕对値所成的級数(A*)收斂，則級数(A)也就收斂。

証明可立卽由收斂性原理得出：不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+m}|$$

告訴我們，如果收斂条件对級数(A*)成立，則对級数(A)也就更

会成立。

也可以这样証明：我們分别考慮級数(A)的正項及其負項的絕对值。按在級数(A)中出現的次序分别改編它們的序号，如此做出两个(正項的)級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \cdots (\mathrm{B}), \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \cdots (\mathrm{C}).$$

由級数(A*)的收斂性可推知这两个級数都收斂。事实上，这两个級数的任何部分和 B_k 或 C_m 总是小于級数(A*)的某一个部分和，所以保持小于該級数之和 A^*[236 段]。

如果現在取級数(A)的部分和 A_n，則可表之为差数的形式：

$$A_n = B_k - C_m,$$

这里 k 及 m 各表示和数 A_n 中正項或負項的数目，如此 k 及 m 与 n 有关而随 n 增至无穷①。于是显然存在有限的极限

$$A = \lim A_n = B - C, \tag{3}$$

这里 B 及 C 各为級数(B)及(C)之和，而级数(A)的收斂被証明了。順便还証明了这一有用的事实：在所作假設之下，所給級数之和就等于单由正項所組成級数之和与单由負項絕对値所組成級数之和間的差数。

如此，单是級数(A*)的收斂性就足使級数(A)絕对收斂。

下面将看到，可能有这样的情形：級数(A)收斂，而級数(A*)不收斂。此时級数(A)称为非絕对收斂的。

要确定級数(A)絕对收斂性，可以应用所有前段討論过的收斂性檢驗法于正項級数(A*)。但对发散性的檢驗法却要小心：即使級数(A*)发散时級数(A)仍然可以收斂(非絕对)。可是哥西和达朗貝尔檢驗法是例外，因为当它們肯定級数(A*)发散时，就

① 我們永远指的是級数(A)中正項及負項都有无限多的情形。

表示級数(A^*)的公項$|a_n|$不趨于0[1],于是a_n也就不趨于0,如此級数(A)也就必須发散。所以上述檢驗法可以稍加修改使适合于任意級数。例如达朗貝尔檢驗法可理解如下:

达朗貝尔檢驗法 設对比率 $\mathscr{D}_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在确定的极限:

$$\mathscr{D}^* = \lim \mathscr{D}_n^*;$$

于是在 $\mathscr{D}^* < 1$ 时所給級数(A)絕对收斂,而在 $\mathscr{D}^* > 1$ 时它发散。

例 1) 我們来应用达朗貝尔檢驗法到239段2)里所講过的級数(a)及(б)上,但舍去$x>0$这个条件。我們得到,

(a)該級数对一切x值都絕对收斂;

(б)該級数在$-e<x<e$时絕对收斂并且在$x \geqslant e$或$x \leqslant -e$时发散(在$x=\pm e$时則收斂的必要条件不成立)。

2) 对于級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots$$

我們有:

$$\mathscr{D}_n^* = \frac{n}{n+1}|x|, \quad \mathscr{D}^* = |x|,$$

如此該級数在$|x|<1$时絕对收斂,在$|x|>1$时发散。在$x=-1$时該級数也发散,因为得到了各項都变为負号的調和級数。在$x=1$时我們导至級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

对其收斂性問題留待下面解决。

244. 交錯級数 用前段的想法,最多只能确定,級数的絕对收斂性,——对非絕对收斂級数則它們显然不能适用。所以我們最后来討論一类特殊的但又重要的級数,所謂交錯級数,其中也有非絕对收斂的。

所謂交錯級数就是各項正負号輪流出現的級数。

---

[1] 参閱13,14頁底注。

交錯級数宜写成: 使各項的正負号明白显出的形式, 例如(所有 c_n 都算作正的),

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots \qquad (4)$$

关于这类級数早在 1714 年萊卜尼茲(在其致約翰·貝努里信中)已說出过下面这簡单的定理。

萊卜尼茲定理 如果交錯級数(4)各項絕对值单調下降:

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots) \qquad (5)$$

并趋于 0:

$$\lim c_n = 0,$$

則該級数收斂。

證明 偶数个項的部分和 C_{2m} 可以写成这样:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

因为由 (5) 知每个括弧都是正数, 故由此显然, m 增大时部分和 C_{2m} 也增大。另一方面, 如果把 C_{2m} 写成这样:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

則不难看出, C_{2m} 保持上方有界:

$$C_{2m} < c_1.$$

在这情形, 按关于单調变数的定理[44 段], 在 m 无限增大时部分和 C_{2m} 有一个有限的极限

$$\lim_{m \to \infty} C_{2m} = C.$$

至于奇数个項的部分和 C_{2m-1}, 則我們显然有 $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$。既然公項趋于 0,

則有
$$\lim_{m \to \infty} C_{2m-1} = C.$$

由此可見 C 就是該級数之和。

附注 我們已看到偶数个項的部分和 C_{2m} 遞增而趋近于級数之和 C。把 C_{2m-1} 写成

$$C_{2m-1}=c_1-(c_2-c_3)-\cdots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})$$

的样子，则不难确定，奇数个项的部分和递减而趋近于 C。如此恒有

$$C_{2m}<C<C_{2m-1}.$$

特別地，可以断定

$$0<C<c_1. \tag{6}$$

这可以給該級数余項一个很簡单而方便的估計（該余項本身是交錯級数）。即：

$$\gamma_n=(-1)^{n-1}\{c_n-c_{n+1}+\cdots\}.$$

由(6)知括弧内是正数且小于 c_n。

如此，在所有情形下，萊卜尼茲型級数[①]的余項与其第一項有相同的符号，并且依絕对値小于該項。

这个附注在用級数作近似計算时常常用到[参閱 260 段]。

萊卜尼茲型級数的最簡单例子有下列級数

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

与

$$\text{(6)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

两級数的收斂性都可由所証明的定理推知。

同时由各項絕对値所組成的級数則发散：对級数(a)这就是調和級数，对級数(6)則得級数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots,$$

其发散性可由其部分和看出：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_n.$$

---

① 我們用这个名称来指滿足萊卜尼茲定理条件的交錯級数。

如此，級数(a)及(б)給出了非絕对收斂級数的最先两个例子。[以下我們将确定，第一个級数之和是 ln 2，而第二个級数之和等于$\frac{\pi}{4}$(参閱第 **256** 段(22)及第 **255** 段(20))。]

§4. 收斂級数的性質

245. 可結合性 无穷級数和的概念与(算术及代数中所講的)有限多項和的概念主要差別在于前者含有极限过程。虽然尋常和的某些性質也可搬到无穷級数和上来，但常常只限于滿足某些条件的时候，这些条件就是現在要講的。在另外一些情形显著地違反了我們常見的和的性質，因此一般說来，对这問題是应該保持謹愼的。

我們来看收斂級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots; \tag{A}$$

其部分和序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \tag{1}$$

收斂于級数的和 A。我們将該級数各項任意归組而不变其先后次序：

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \cdots$$
$$a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \cdots$$

这里$\{n_k\}$是一个由自然数列中抽出来的部分递增序号序列。

定理. 由上述这些和所組成的級数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \tag{$\tilde{A}$}$$

恒与原級数收斂于同一和 A。換句話說：收斂級数具有可結合性。

事实上，新級数的部分和序列

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k, \cdots$$

无非就是序列(1)的部分序列

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots$$

所以收斂于同一极限 A。

至今我們所看到的是与尋常和完全相似之处；但如果以相反次序来試用可結合性，这一相似性就被破坏了。如果給了一个收斂級数$(\tilde{A})$，其每項各为有限多項之和，則去括弧后我們得出一个新級数(A)，它却可能是发散的。这里是一个簡单的例子：級数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然是收斂的，但去括弧所得級数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

却成发散的。

当然，如果去括弧后我們得到一个收斂級数(A)，則其和与級数$(\tilde{A})$相同。这可由上面証明的事实推出。

附注　在某些条件下可以保証級数(A)收斂。最簡单的情形是，当$(\tilde{A})$中所有在同一括弧內諸項都有相同符号的时候[①]。

事实上，这时候当 n 由 n_{k-1} 变至 n_k 时部分和 A_n 将单調地变化，所以将被包含在 $A_{n_{k-1}}=\tilde{A}_{k-1}$ 与 $A_{n_k}=\tilde{A}_k$ 之間。k 充分大时，这些和与級数$(\tilde{A})$之和 $\tilde{A}$ 相差可任意地小，所以这对于和 A_n 也正确——即 n 充分大时，有 $A_n \to \tilde{A}$。

246. 絕对收斂級数的可交换性　設給了一个收斂級数(A)，其和为 A。在其中任意調换各項位置，得到一个新的級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k' = a_1' + a_2' + \cdots + a_k' + \cdots \qquad (A')$$

① 这括弧与括弧之間，正負号可以不同。

这級数的每一項 a'_k 各与原級数某一个确定項 a_{n_k} 相同[①]。

于是发生一个問題：級数(A′)是否收斂，并且在收斂的情形是否等于原級数之和 A。在考虑这問題的时候我們必須严格区别絕对收斂級数与非絕对收斂級数。

狄利希萊定理[②] 如果級数(A)絕对收斂，則由調动它的各項位置所得的級数(A′)也收斂并且与原級数有同一总和 A。換句話說，絕对收斂級数具有可交換性。

証明 我們分两步来証明。

(a)先假設級数(A)是正的。

我們来看級数(A′)的任意一个部分和 A'_k。既然

$$a'_1=a_{n_1},\quad a'_2=a_{n_2},\cdots,a'_k=a_{n_k},$$

則取 n' 大于所有序号 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 时我們显然将有 $A'_k\leqslant A_{n'}$，所以更不成問題有

$$A'_k\leqslant A.$$

在这样的情形(A′)将收斂[236 段]，而其和 A' 不超过 A：

$$A'\leqslant A.$$

但級数(A)也可由級数(A′)調动各項位置得出，所以同样有：

$$A\leqslant A'.$$

結合所得两个关系我們就得出所要求的等式：

$$A'=A.$$

(б)現在設(A)是任意的絕对收斂級数。

因为按照所証明的，正項收斂級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots\qquad(A^*)$$

---

① 这里序列 $\{n_k\}$ 就是无遺漏地无重复地重写自然数列——只是次序不同。

② 彼得·古斯塔夫·萊热納·狄利希萊(Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805—1859)是德国数学家。

在各項調动位置后仍保持收斂，故按 **243** 段的定理，級数(A)此时也保持其(絕对)收斂性。

其次，我們在 **243** 段看到，級数(A)絕对收斂时其和可表成：

$$A=B-C,$$

这里 B 及 C 是正項級数(B)及(C)之和，它們是各由級数(A)的正項及負項絕对值所組成的。調动級数(A)各項位置时这两个級数的項也跟着調动，但按所証明的并不影响其和 B 及 C。所以級数(A)之和仍如旧，这就是所要証明的。

247. 非絕对收斂級数的情形 現在轉而討論非絕对收斂級数并且来証明它們沒有可交換性。

我們先作一准备箋注。假設級数(A)收斂，但非絕对收斂。由收斂性有 $\lim a_n=0$[**235** 段，5°]。至于前段所提到的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad (\mathrm{B}), \qquad\qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m \qquad (\mathrm{C}),$$

則虽然分明

$$\lim_{k\to\infty} b_k=0 \quad 并且 \quad \lim_{m\to\infty} c_m=0, \tag{2}$$

但在当前情形它們都是发散的。事实上，如果在級数(A)开头 n 項中有 k 項是正的 m 項負的，則

$$A_n=B_k-C_m, \quad A_n^*=B_k+C_m.$$

第二等式告訴我們，两个級数(B)与(C)不能同时收斂，因为否則級数(A^*)也将收斂而和假設矛盾。但由第一等式我們看出，如果这两个級数有一个收斂而另一个不收斂，則級数(A)将收斂，这也和假設矛盾。

現在来証明下面这个有趣的定理：

黎曼定理. 如果級数(A)非絕对收斂，則无論預先取一个怎样的数 L，不論有限或为 $\pm\infty$，总能将这級数各項調动位置而使变

换后的級数有和 L。

証明　我們先来講 L 有限的情形。由 235 段 1°，級数(B)与(C)的所有余項也将发散，如此在每一級数中由任何一項开始必能取出充分多的項使其和超过任何数。

利用这一点，我們将級数(A)諸項調动如下。

我們先按該級数中原来次序抽取充分多个正項，使其和超过 L。

$$b_1+b_2+\cdots+b_{k_1}>L.$$

在它們之后接着(按級数中原来次序)写出充分多負項，使总和变成小于 L:

$$b_1+b_2+\cdots+b_{k_1}-c_1-c_2-\cdots-c_{m_1}<L.$$

然后又由剩下的各項里抽取正項来写在后面，使

$$b_1+b_2+\cdots+b_{k_1}-c_1-\cdots-c_{m_1}+b_{k_1+1}+\cdots+b_{k_2}>L.$$

然后再取充分多負項使

$$b_1+\cdots+b_{k_1}-c_1-\cdots-c_{m_1}+b_{k_1+1}+\cdots+$$
$$+b_{k_2}-c_{m_1+1}-\cdots-c_{m_2}<L$$

如此进行下去。这手續我們設想其延續无穷；显然級数(A)的每項連同其正負号都将于一定位置出现。

如果每次写出 b 或 c 时所取項数都恰好足够使所要求的不等式实现为止，則与 L 正或負的离差的絕对值不会超过最后所写的一項。于是由(2)显然可見級数

$$(b_1+\cdots+b_{k_1})-(c_1+\cdots+c_{m_1})+\cdots$$
$$\cdots+(b_{k_{i-1}+1}+\cdots+b_{k_i})-(c_{m_{i-1}+1}+\cdots+c_{m_i})+\cdots$$

收斂于和 L。由 245 段附注知道，这在去掉括弧后仍然正确。

如果 $L=+\infty$，則可以如此来取各組正数，使逐次的和大于 1, 2, 3, 等等，而在每組正数之后則只附加一个負項。这样显然可以做成一个具有总和 $+\infty$ 的級数。同样方式也可以得出一个具有

总和 $-\infty$ 的級数。

所建立的結果闡明了这一事实：非絕对收斂性的实現只由于正負項的相互抵消，因此主要地取决于各項的先后次序，但絕对收斂性則建立在这些項的下降速度上而与其次序无关。

例　我們来看这个显然非絕对收斂的級数：

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots, \tag{3}$$

其和我們稍后将知道是 $\ln 2$[①]。調动它的項使每个正項之后跟着两个負項：

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots, \tag{4}$$

于是可确定这級数之和經这样調动后減少一倍。

事实上，如果各以 A_n 及 A'_n 表示这两个級数的部分和，則

$$A'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2m},$$

如此 $A'_{3m}\to\frac{1}{2}\ln 2$。因为

$$A'_{3m-1}=A'_{3m}+\frac{1}{4m} \text{ 与 } A'_{3m-2}=A'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

趋于同一极限 $\frac{1}{2}\ln 2$，故級数(4)收斂而其和即为此数。

248. 級数乘法　关于收斂級数逐項加、減或乘以同一常数倍数，在 235 段 3° 及 4° 已經讲过。現在来讲两級数的相乘問題。

設給了两个收斂級数：

---

① 这里对我們重要的只是，这和不是 0 [244 段，(6)]。

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

及

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}b_m=b_1+b_2+\cdots+b_m+\cdots. \tag{B}$$

仿照有限和的乘法，我們在此要把两級数的项全都一对一对地乘起来，将所有可能的乘积 a_ib_k 列成无限矩陣如下：

$$\begin{array}{|lllll}
\hline
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_ib_1\cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_ib_2\cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_ib_3\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \cdots & a_ib_k\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots.
\end{array} \tag{5}$$

这些乘积能以种种方法排列成单行的序列。

例如，哥西首先做过，这些乘积可以沿对角綫来写成序列：

$$\begin{array}{|llll}
\hline
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots
\end{array}$$

同时对角綫上諸項合并起来：

$$\begin{gathered}
a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots \\
\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1)+\cdots
\end{gathered} \tag{6}$$

哥西定理 如果級数(A) 与 (B)都絕对收斂，則由乘积(5)所組成的級数(6)也收斂并且其和就是該二級数和之积 AB。

証明 按假設，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (\mathrm{A}^*)$$

与

$$\sum_{m=1}^{\infty}|b_m| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| + \cdots \qquad (\mathrm{B}^*)$$

收斂，卽有有限的和，比方說 A^* 与 B^*。如果对这两个級数做出一个象(6)那样的級数：

$$\begin{aligned} &|a_1|\cdot|b_1| + (|a_1|\cdot|b_2| + |a_2|\cdot|b_1|) + (|a_1|\cdot|b_3| + \\ &+ |a_2|\cdot|b_2| + |a_3|\cdot|b_1|) + \cdots + (|a_1|\cdot|b_n| + \\ &+ |a_2|\cdot|b_{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}|\cdot|b_2| + |a_n|\cdot|b_1|) + \cdots, \end{aligned} \qquad (6^*)$$

則它显然收斂，因为它的第 n 个部分和小于

$$(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|) < A^*B^*$$

[236 段]。在这情形如果解除(6*)中的括弧，收斂性仍然保持[參閱 245 段附注]。因此[243 段]由(6)解除括弧所得的級数

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \cdots$$

也收斂并且絕对收斂。在这情形它不但具有可結合性，也具有可交換性[245, 246 段]。它的和——与級数(6)之和相同——可以簡单地决定如下。我們将它的各項不是沿对角綫排列而是沿正方形排列：

$$\begin{array}{ccc|c} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots\cdots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots\cdots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots\cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

并且把各方块不同的部分逐組合并起来：

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+$$
$$+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots \qquad (7)$$

級数(7)的部分和为

$$A_1B_1,\ \ A_2B_2,\ \ A_3B_3,\cdots,\ \ A_nB_n,\cdots$$

(这里如慣例以 A_n, B_n 表示級数(A)与(B)的部分和); 它們趋于乘积 AB, 如此它不但是級数(7)之和, 也是級数(6)之和。)

例 1) 将級数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_0^\infty x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

自乘起来得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_1^\infty nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

2) 我們已經知道[243 段, 1)(a)], 級数

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

是对一切 x 值都絕对收斂的。以 $E(x)$表其和。$E(x)$与 $E(y)$的乘积可以按級数乘法法則来求。乘积的公項如下:

$$1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}+$$
$$+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!\,(n-k)!}x^ky^{n-k}=$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n C_n^kx^ky^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

如此給函数 $E(x)$得出这样一个关系:

$$E(x)\cdot E(y)=E(x+y).$$

[以后我們会知道, $E(x)=e^x$.]

3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

按莱卜尼兹定理是收斂的，但非絕对收斂[234段，2)]。如果仍然按哥西法則自乘起来則得一級数，其公項为

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

因为括弧里每項都大于$\frac{1}{n}$，則全式絕对值 >1 并且由于不合收斂性必要条件知該級数发散。这个例子也属于哥西。

附注　如果两个收斂級数(A)与(B)至少有一个絕对收斂，則哥西法則还是有效。只有当两个互乘級数都非絕对收斂(如前例)时其乘积才会发散。

§5. 无穷乘积

249. 基本概念　如果

$$p_1,\ p_2,\cdots,\ p_n,\cdots \tag{1}$$

是一个給定的数列，則由此所做成的記号

$$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n \text{①} \tag{2}$$

叫做无穷乘积。

将(1)中之数依次相乘，做出部分乘积

$$P_1=p_1,\ P_2=p_1\cdot p_2,\ P_3=p_1\cdot p_2\cdot p_3,\cdots,$$
$$P_n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n,\cdots \tag{3}$$

---

① 記号 Π 就是表示乘积。

这个部分乘积序列$\{P_n\}$将經常与記号(2)对照。

部分乘积P_n在$n\to\infty$时的有限或无限极限P

$$\lim P_n = P$$

叫做无穷乘积(2)之值，并且写成

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

如果一个无穷乘积有有限的值P而不等于0，則該乘积称为收斂的，在相反的情形則称为发散的[①]。

只要乘积中有一乘数是0，則乘积之值也就等于0。以下我們把这情形除外，而恒設$p_n \neq 0$。

讀者不难建立与級数的相似性[234段]并且看出(与級数相似)无穷乘积的研究只是序列及其极限的研究的一种特殊的形式。这种形式是值得熟悉的，因为在許多情形它比别的表出法方便。

例 1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

因为部分乘积

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2},$$

則該无穷乘积收斂，而其值为$\frac{1}{2}$。

2) 瓦里斯公式[188段]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

显然等价于$\frac{\pi}{2}$的分解为无穷乘积

---

① 如此要注意，如果$P=0$，則无限乘积作为发散。这种說法虽然与級数的习惯說法不一致，但它也被普遍采用，因为可以使許多定理易于陈述。

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

由它可导出公式

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4},\quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

250. 簡单定理。与級数的关系 舍弃无穷乘积(2)里的开头 m 項我們得出殘积

$$\pi_m=p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdot\ldots\cdot p_{m+k}\cdot\ldots=\prod_{n=m+1}^{\infty}p_n, \qquad (4)$$

它完全与无穷級数的余項相似。

1° 如果乘积(2)收斂，則乘积(4)也对任何 m 值都收斂；反之，若乘积(4)收斂，則原乘积(2)也收斂[①]。

証明留給讀者去做[参閱 **235, 1°**]。

如此，在无穷乘积的起头舍弃或添补有限多个(不等于0的)乘数不会影响其性質。

2° 如果无穷乘积(2)收斂，則

$$\lim_{m\to\infty}\pi_m=1,$$

[参閱(4)]。

这可由等式

$$\pi_m=\frac{P}{P_m}$$

及 P_m 的趋近于 $P\neq0$ 推出。

3° 如果无穷积(2)收斂，則

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

事实上，P_{n-1} 也随着 P_n 而趋近于 P，如此

① 記住我們总假設 $p_n\neq0$。

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[参閱 235 段, 5°]

不再枚举无穷乘积与无穷級数的相似性质了，我們来建立无穷乘积收斂性与无穷級数收斂性間的关系，它使我們能直接将詳細討論过的級数理論应用于无穷乘积。

在收斂无穷乘积的情形，乘数 p_n 由某处以后完全都是正的(3°)。如此，由 1° 我們今后可假設所有 $p_n>0$ 而不致减弱一般性。

4° 要无穷乘积(2)收斂，其必要而充分的条件是要級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \tag{5}$$

收斂。在实现这个条件之下，如果 L 是該級数之和，则我們有

$$P = e^L.$$

以 L_n 表示級数(5)的部分和，則我們有

$$L_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{L_n}.$$

由对数函数及指数函数的連續性可推知，如果 P_n 趋于有限正极限 P，則 L_n 趋于 $\ln P$，反之，如果 L_n 有有限极限 L，則 P_n 将有极限 e^L。

在研究无穷乘积(2)的收斂性时往往为了方便起見令

$$p_n = 1 + a_n$$

而将它写成

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) \tag{2*}$$

的形式；級数(5)則写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \tag{5*}$$

的形式。

利用这些表示法我們有下面的簡单定理：

5° 如果至少对充分大的 n 有

$$a_n>0 \quad (\text{或 } a_n<0),$$

則无穷乘积(2*)收斂的充要条件是要这个級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{6}$$

收斂。因为要乘积(2*)及級数(6)收斂必須

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{7}$$

[參閱 3°]，則我們假設这条件已經实現。于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$$

[65 段，1)]。在这情形，由于級数(5*)及(6)的諸項都由某項以后保持一定的正負号，則按 237 段定理 2 这两个級数同时收斂或发散。由此，联系 4° 而推出我們的断言。

我們来提一下关于无穷乘积发散于 0 时的情形。

6° 要无穷乘积(2)[或(2*)]有零值，則其必要而充分的条件是要級数(5)[或(5*)]有和 $-\infty$。

特别是，如果 $a_n<0$ 并且級数 (6) 发散时这样的情形就会发生。

証明留給讀者去做。

最后，我們利用乘积(2)[或(2*)]与級数(5)[或(5*)]之間的关系来建立无穷乘积絕对收斂性概念。一个无穷乘积，当其各項对数所組成的相应級数絕对收斂时，就称为絕对收斂的。

由 246 及 247 两段所論，我們立即可以得出这个結論：絕对收斂无穷乘积具有可交換性，而非絕对收斂无穷乘积显然沒有这种性质。

不难仿照 5° 来証明。

7° 要无穷乘积(2*)絶对收斂，其必要而充分的条件是要級数(6)絶对收斂。

251. 例 1)我們来应用所証明諸定理到下列各无穷乘积上:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$在 $x>1$ 时收斂而在 $0<x\leqslant 1$ 时发散，和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$的收斂与发散一致(5°)。

(б) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$在 $x>1$ 时收斂(5°)，而在 $0<x\leqslant 1$ 时发散于 0(6°)。

2) 我們来証明(在 $\alpha>\beta>0$ 时)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}=0.$$

对此只要确定无穷乘积

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

的发散或(参閱 6°)級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

的发散。而这不难由上面那級数与調和級数比較推知。

这个例子告訴我們，把求序列极限問題化为无穷乘积的研究并应用无穷乘积理論，有时确是有利的。

3) 最后我們举一个欧拉把无穷乘积变为級数的著名例子。如果将素数按遞增次序編号:

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\cdots,p_k,\cdots,$$

则在 $x>1$ 时成立恒等式

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdot\ldots}=$$

$$=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots$$

或

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

按几何級数和的公式我們有

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=1+\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_k^m)^x}+\cdots$$

如果把所有不超过自然数 N 的素数的这种級数——其个数有限——乘起来，則部分积成为

$$P_x^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x},\tag{8}$$

这里总和号上的撇号表示求和不是伸展在所有自然数上，而只限于（1 不算）在其素因数展开式中只包含剛才引入的諸素数的那些自然数上（当然，起头 N 个自然数都具有这种性质）。由此不待言有

$$0<P_x^{(N)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

既然級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 是收斂的，則右边那表示其 N 項后余項的式子在 $N\to\infty$ 时趋于 0；取极限卽得所求結果。

这个欧拉公式，后（1859 年）被黎曼用来研究素数的分布問題。

4) 在 $x=1$ 时关系式(8)仍有效；由此有

$$P_1^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=H_N,$$

如此在 $N\to\infty$ 时，$P_1^{(N)}\to\infty$，即乘积

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\ldots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

发散而有值 $+\infty$。

这也就是欧拉所給的素数集合是无穷集合的新証明（我們在所作演証中实际沒有利用这一点）；因为如集合是有穷时，則該乘积势将有有限値。若将所得結果写成这样：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0,$$

則由 5° 能断定下列級数的发散：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}.$$

这个重要命題还給出关于素数增長某些特征；它远比肯定調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散更为有力，因为这里所包含的还只是其中一部分的項而已。

§6. 初等函数的展为幂級数

252. 戴劳級数 我們已經看到过如下的**幂級数**的例子：

$$\sum_{0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

其中各項是按 x 的方幂排列的。

我們現在考慮較一般形式的冪級数:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots. \quad (2)$$

这是按二項式 $x-x_0$(而不是 x)的方冪排列的。这种級数与(1)式級数沒有本質上的区别,因为由一个簡单的变数替換 $x-x_0=y$ 就可以相互变換(只是变数記号不同)。

以下我們将詳細研究冪級数的性質,它們在許多地方与多項式相似。多項式就是冪級数的一段,这使得冪級数成为近似計算的便利工具。由于所有这些,将預先給定的函数展为 $x-x_0$ 的方冪問題(特别是,展为 x 的方冪問題),也卽表为(2)型[或(1)型]級数和的問題便很重要了。

我們要在此講关于初等函数的这种展开式,而对于这个問題的解决,105—108 段所詳細討論过的戴劳公式已給我們开辟了途徑。事实上,我們假設所考慮的函数 $f(x)$ 在区間 $[x_0, x_0+H]$ 或 $[x_0-H, x_0]$ $(H>0)$ 內具有各阶导函数(并且是連續的)。于是,我們在 106 段已看到,对这区間里的一切 x 值恒成立公式:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \quad (3)$$

这里余項 $r_n(x)$ 可以表为 106 段指出的諸形式。同时 n 可以取随便多大,也卽这展开式可写到 $x-x_0$ 的随便多高次方冪。

这自然使我們想到无穷展开式:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots. \quad (4)$$

这种級数,无論它是否收斂以及事实上有无和 $f(x)$,都称为

函数 $f(x)$ 的戴劳級数。它有(2)的形式而其系数

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\cdots$$

称为戴劳系数。

因为由(3)可看出 $f(x)$ 与戴劳級数 $n+1$ 項和之間相差恰为 $r_n(x)$，則显然：要展开式(4)事实上对某 x 値成立其必要而充分的条件是要戴劳公式余項 $r_n(x)$ 对这 x 値随 n 的增大而趋于 0：

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{5}$$

在研究这等式是否成立并对什么 x 値成立这个問題时，我們用到表达余項 $r_n(x)$ 与 n 的关系的各种不同形式。

比較常要遇到的是 $x_0=0$ 而函数 $f(x)$ 直接展为 x 冪級数的情形：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots;\text{①} \tag{6}$$

这級数有(1)的形式，其系数为：

$$a_0=f(0),\ a_1=\frac{f'(0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots \tag{7}$$

現在我們較詳細地写出适用于这特殊假設 $x_0=0$ 的余項 $r_n(x)$［106 段］。

拉格朗日形式：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \tag{8}$$

哥西形式：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(1-\theta)^n x^{n+1}. \tag{9}$$

---

① 这級数通常称为麦克洛林級数。

这里乘数 θ 只知道是介乎 0 与 1 之間，但它可以随 x 或 n 而变（甚至随形式而变）。

現在来講具体的展开式。

253. 指数函数及主要三角函数的級数展开式 我們先来証下面这个簡单命题，它直接包含着一系列重要的情形：

如果函数 $f(x)$ 在区間 $[0, H]$ 或 $[-H, 0]$ $(H>0)$ 内具有各阶导函数，并且这些导函数絕对値当 x 在該区間內变化时恒为同一数所界：

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L, \tag{10}$$

（这里 L 与 n 无关）則在全区間內有展开式(6)。

事实上，取拉格朗日形式的余項 $r_n(x)$［參閱(8)］，我們由(10)有：

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

在 n 无限增大时 $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ 式趋于 0［45 段，1)］；这［由于 235 段 5°］可由級数

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

的收斂性推知［239 段 2)(a)］。因此 $r_n(x)$ 也就有极限 0，这就証明了我們的命題。

这个命題在任何区間 $[-H, H]$ 內直接适用于函数

$$f(x) = e^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

因为它們的导函数各等于

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

而在該区間內 e^x 的絕对値恒为 e^H 所界，$\sin x$ 及 $\cos x$ 則为 1 所界。

这些函数的戴劳系数已在 108 段 1)—3) 算出，故立即可写出其展开式如下：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots \tag{13}$$

它們对任何 x 值都成立——因为 H 是任意的。

254. 欧拉公式 刚才得出的几个初等展开式的系数形式使我們想到其間可能存在某种关系。但如果保持在实数范圍以內，則要建立这种关系是不可能的。欧拉引入虛指数方幂才达到了这个目的。

虽然在本书所講只限于实数及实变数，但我們却在此破例来講一講欧拉公式，它以純虛自变数的指数函数来表出实自变数的三角函数。

如果（姑且純形式地）在(11)中以虛数 yi 替代实数 x，則得：

$$e^{yi} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \cdots =$$

$$= 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!}i + \cdots$$

分开实部与虛部，有

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right).$$

括弧里的式子恰好就是我們已經知道的函数 $\cos y$ 及 $\sin y$ 的展开式［参閱(13)及(12)］。如此

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{14}$$

将 y 代以 $-y$ 則同样有

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

加减这两个等式即导出著名的欧拉公式：

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \tag{15}$$

公式(14)及(15)在分析里有广泛的用处。

現在我們轉向其邏輯的理解①。首先考慮依凭自然数序号 n 的复变数 $z_n=x_n+iy_n$。其极限定义的說法与实数情形完全一样［28 段］：設有一个复数 $c=a+ib$，如果对任何正数 ε 恒可找到这样一个序号 N，使 $n>N$ 时成立不等式 $|z_n-c|<\varepsilon$②，則称 c 为变数 z_n 的极限。

因为

$$|z_n-c|=|(x_n-a)+i(y_n-b)|=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2},$$

故显然可見，恰恰在实部及虛部 x_n 及 y_n 各别有 $x_n\to a$ 及 $y_n\to b$ 的时候 $z_n\to c$。

現在我們来考慮复数級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n. \tag{C}$$

所謂級数(C)是收斂的是指：它的部分和

$$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$$

随 n 的增大而趋于某复数 C 为其极限—— C 即級数之和。将这里有关諸数都分为实部与虛部：

$$C=A+iB,\quad c_n=a_n+ib_n,\quad C_n=A_n+iB_n,$$

而

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

則由前面所說可見，

随着 $A_n\to A$，$B_n\to B$ 而有 $C_n\to C$，

即复数級数(C)的收斂于 C 就等价于实級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (\mathrm{A})\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\ (\mathrm{B})$$

的分別各收斂于其和 A 及 B。由此推知，复数級数也如实数級数一样具有可結合性［245 段］。

如果 $\sum_{1}^{\infty}|c_n|$ 这个由級数(C)之模所組成的級数是收斂的，則由不等式

$$|a_n|\leqslant|c_n|,\qquad |b_n|\leqslant|c_n|$$

① 認为讀者已經由高等代数教本里知道复数及复变数了。

② 这里 $|\alpha+i\beta|$ 表示复数 $\alpha+i\beta$ 的"模"，即 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$。

知級数

$$\sum_1^\infty |a_n|, \quad \sum_1^\infty |b_n|$$

也收斂，由此推知級数(A)及(B)收斂[243 段]，所以級数(C)也收斂。在这情形級数(C)称为絕对收斂的。例如，級数

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{16}$$

对任何复数值 z 絕对收斂，因为其各項之模的实級数

$$1+\frac{|z|}{1!}+\frac{|z|^2}{2!}+\cdots+\frac{|z|^n}{n!}+\cdots$$

收斂。

絕对收斂級数(C)具有可交換性，因为級数(A)及(B)具有这种性質[246 段]。最后，关于乘法的定理也可以推广到复数絕对收斂級数上[248 段]；对实数情形所給的証明——根据上面所說的話——在此可以逐字逐句搬过来。

現在我們以一般形式提出 z 为复数时的方幂 e^z 定义問題。在这情形，当 z 是一个实数 x 时这方冪已經有定义了；在前一段我們已經証明它有展开式(11)。在虛指数 z 情形方冪 e^z 还沒有定义；摹仿該展开式，我們这回不妨設 e^z 就等于級数(16)之和作为定义(这和显然存在)。很重要的是，在此仍保持指数函数的这个基本性質：

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

这只要把 e^z 及 $e^{z'}$ 的級数互乘出来就可証明[参閱 248 段，2)]。

如此，前面我們在展开式(11)里以 yi 代 x 时就是直接用了这广义的方冪概念。

最后我們指出，如果 $z=x+yi$，則按指数法則有 $e^z=e^x \cdot e^{yi}$，如此由(14)終于有：

$$e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{17}$$

255. 反正切的展开式 在函数 $y=\operatorname{arctg} x$ 上前面 253 段所証明的一般命題已經不适用。事实上，它在 96 段 5) 所找到的 n 次导函数的表达式

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

不能保証对所有 $y^{(n)}$ 有共同的界限。

因为相应的戴劳級数[参閱 **108**, 6)]

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\cdots$$

只收斂于区間 $[-1,\ 1]$① 内，所以在这区間以外已不应說函数 $\operatorname{arctg}x$ 由这級数表出了。反之，对于 $|x|\leqslant 1$ 我們按拉格朗日公式(8)[考慮到(18)并命 $y_\theta=\operatorname{arctg}\theta_x$]有

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{\left|\cos^{n+1}y_\theta\cdot\sin(n+1)\left(y_\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

由此可見 $r_n(x)\to 0$，如此对区間 $[-1,1]$ 内所有 x 值恒有展开式

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\cdots \tag{19}$$

我們再一次提醒，虽然 $\operatorname{arctg}x$ 在这区間外有一定的意义，但展开式(19)在那里已不成立，因为該級数在那里沒有和。

由級数(19)取 $x=1$ 的特例时得出著名的萊卜尼玆級数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\cdots, \tag{20}$$

这是分析史上第一个表示 π 值展开式的級数。

256. 对数級数 如果取 $\ln(1+x)$ $(x>-1)$ 作函数 $f(x)$，則相应的戴劳級数如下[**108** 段, 5)]：

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

---

① 按达朗貝尔检驗 [**243** 段] 不难証明这級数在 $|x|<1$ 时（絕对）收斂而在 $|x|>1$ 时发散。在 $x=\pm 1$ 时的(非絕对)收斂可由萊卜尼玆定理推知[**244** 段]。

它只对区間$(-1,1]$[①]内的x值收斂；这就是說，只有对这些值研究余項$r_n(x)$的性态才是有意义的。

我們先取其拉格朗日形式(8)。因为

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[96段，2)]，于是

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\qquad(0<\theta<1).$$

如果$0\leqslant x\leqslant 1$，則最后一个乘数不大于1而由此有

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1},\text{如果在}n\to\infty\text{时}r_n(x)\to 0.$$

但在$x<0$时这乘数的性态就不明白了，而要采取余項的哥西形式[參閱(9)]。

我們有

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\qquad(0<\theta<1),$$

如此

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

因为在$x>-1$时$1+\theta x>1-\theta$，于是最后一个乘数小于1；所以，只要$|x|<1$，就显然有$r_n(x)\to 0$。

有趣的是，虽然哥西形式对-1与1之間的一切x值能完全解决这个問題，但它在$x=1$时不能給出什么結論；在这情形我們得

$$|r_n(1)|<(1-\theta)^n,$$

但因θ能随n而变故不能断定$(1-\theta)^n\to 0$。

---

① 并且这里可由达朗貝尔檢驗法建立$|x|<1$时的絕对收斂及$|x|>1$时的发散。在$x=1$时按莱卜尼兹定理有(非絕对)收斂性，而在$x=-1$时得一变号发散調和級数。

如此，总起来說，对区間$(-1,1]$内所有x值确实有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \tag{21}$$

就中在$x=1$时我們得已知的級数

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \tag{22}$$

由級数(21)还可以推出其他有用的展开式。例如，在其中以$-x$代x(在此认为$|x|<1$)并由級数(21)减去这所得級数，如此导出下面的級数：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\cdots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\cdots\right). \tag{23}$$

在此令 $x=\frac{1}{2n+1}$，而n是一个任意的自然数。既然这时候

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

則我們得展开式

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right], \tag{24}$$

它在計算对数时有用[262 段]。

257. 斯替尔灵公式 作为展开式(24)的另一应用我們指出如何由它导出一个重要的分析公式，所謂斯替尔灵公式①。

因此我們把展开式(24)写成这样：

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

这个式子显然大于1而小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

如此我們有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

① James Stirling(1692—1770)是英国数学家。此公式发表于1730年。

由此，取方幂而得

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

現在我們引入这样一个自然指数 n 的函数：

$$a_n=\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

而由前面的不等式有

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

如此，一方面 $a_n>a_{n+1}$，而另一方面則

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

如此，变数 a_n 随着 n 的递增而递减（保持下有界，例如 0 是一个下界）并且趋于一个有限的极限 a，变数 $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ 則递增而显然趋于同一极限 a（因 $e^{-\frac{1}{12n}}\to1$）。既然对任何 n 成立不等式

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

則可找到这样一个数 θ，包含在 0 与 1 之間，使

$$a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}} \quad \text{或} \quad a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

（θ 这个数一般說来是随 n 而变的）回忆变数 a_n 的定义我們得：

$$n!=a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0<\theta<1). \tag{25}$$

現在只剩下来决定常数 a 了。这用到 188 段的瓦里斯公式，它可写成这样的形式：

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n!!}{(2n-1)!!}.$$

最后一乘数可变形如下：

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!}=\frac{(2n!!)^2}{2n!}=\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{2n!};$$

这里 $n!$ 代之以下式:

$$\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot a_n,$$

而 $2n!$ 代之以类似的式子:

$$\sqrt{2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot a_{2n},$$

經初等的化簡我們得出

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\cdot\frac{a_n^2}{a_{2n}}=\frac{a}{2},$$

如此 $a=\sqrt{2\pi}$.

将此 a 值代入公式(25)我們就导出斯替尔灵公式:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1).$$

如果略去最后一乘数則得近似公式①

$$n!\doteq\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

它可用来計算很大的 n 值的階乘 $n!$。 所略去的乘數不难估計其相对誤差,它显然小于 $e^{\frac{1}{12n}}-1$。

斯替尔灵公式在槪率論及統計学里常常用到。

258. 二項式級数 最后,我們取 $f(x)=(1+x)^m$, 而 m 是一个任意的实数,异于 0 及所有自然数(对自然数 m 則得已知的牛頓有限展开公式)。在此情形戴劳級数有这样的形式[**108** 段, 4)]:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\cdots;$$

它叫做二項式級数,而其系数叫做二項式系数。在所作关于 m 的假設之下这些系数沒有一个是 0(反之,如果 m 是自然数,則 x^{m+1}

---

① 它其实也是斯替尔灵所建立的。

及所有以下各項的系数都成 0)。由达朗貝尔檢驗法[243 段]不难确定，在$|x|<1$ 时二項式級数絕对收斂，在$|x|>1$ 时发散，余項$r_n(x)$的研究我們将在$|x|<1$ 的假設之下进行，而即取其哥西形式(9)[拉格朗日形式在此不能对所有我們关心的 x 值給出答案]。

因为

$$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

于是余項

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

变动乘数的結合法可将它写成这样：

$$r_n(x)=$$

$$=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(\overline{m-1}-n+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}x^n\cdot mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

这三个式子里第一个就是相应于指数 $m-1$ 的二項式級数的公項；因为在$|x|<1$ 时二項式級数无論对什么指数都收斂，故此式在 $n\to\infty$ 时趋于 0。至于其余两式，則第二个的絕对值介乎与 n 无关的两个界限：

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \text{ 与 } |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1}$$

之間，第三个，也如在 256 段里一样，小于1。如此，$r_n(x)\to0$，即对$|x|<1$ 有展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots, \qquad (26)$$

它也以牛頓之名見称。

我們还沒有接触到它在 $x=\pm1$ 两値之下是否适用的問題，因为它的解决需要余項的精細研究。我們只指出，在 $x=1$ 时展开式(26)对 $m>-1$ 成立，而在 $x=-1$ 时对 $m>0$ 成立。

我們指出二項式級數的一些特例，例如 $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 等情形：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

(尋常几何級数)，其次，

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

及

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n+\cdots \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

要注意的是，在有理数 m 的情形二項式級数总是給出根式的**算术值**。

259. 关于余項研究的一个警注 在以上关于函数的戴劳級数展开式的各个实例中，对一切使級数收斂的 x 值它們的和总是等于原函数。所以讀者可能会这样猜測：要保証展开式(4)或(6)(44, 45 頁)一般只要确定級数的收斂性，甚至不必驗証关系(5)：

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

但事实上并不如此。我們試看这个哥西的例子：

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}(x\neq 0\text{ 时}),\ \ f(0)=0.$$

在 $x\neq 0$ 时它具有各阶导函数：

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ \ f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ \cdots$$

而一般地

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\ \ (n=1, 2, 3\cdots), \tag{27}$$

这里 $P_n(z)$ 是 z 的整多項式($3n$ 次)。这規律不难以数学归納法証明其一般成立。

現在来証明，在点 $x=0$ 我們这个函数各阶的导数也都存在，并全都等于 0[1]。事实上，首先是 $x\to 0$ 时

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,$$

如此，$f'(0)=0$[2]，我們假設要求証明的論断对所有到 n 阶为止的导数都已經是正确的。于是[参閲(27)] $x\to 0$ 时

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}\cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,$$

因为分子是 $\frac{c}{x^m}$ 形式的諸項之和。这就是說，$f^{(n+1)}(0)=0$。按数学归納法我們的話完全証明了。

这个系数全是 0 的函数的麦克洛林級数(6)对一切 x 值都收斂，但对任何值(除 $x=0$ 外)都不表示原来的函数。

如此，預先定出戴劳級数的收斂区域只有輔助的用处：借此有时能預先剔除那些使級数发散的 x 值而不加考慮，因为对于这些值，結果显然是否定的。在級数收斂的那些值上則只有研究戴劳公式的余項才能証明戴劳級数之和就是原来的函数。

§7. 用級数作近似計算

260. 問題的提出 以所得出諸具体展开式为例来說明如何利用无穷級数做近似計算。我們先說几句关于級数的一般的話。

如果一个数 A 可以展为級数：

$$A=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

---

① 順便提一下，拉格朗日認为要一个(不恒等于 0 的)函数在某点連同其所有各阶导数全等于 0 是不可能的。哥西做出了他的一个例子来反駁拉格朗日的見解。

② 这是因为一般地对任何指数 $\mu>0$ 我們有

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^\mu}{e^z}=0$$

[参閲 121,4)](这一点今后要記住)。这里的 z 就是 $\frac{1}{x^2}$($x\to 0$ 时)。

这里 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一些方便的数(通常是有理数)，而我們令近似地

$$A \doteq A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

則因舍弃对所有其余的諸項而产生的校正数由余項

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

表出。在 n 充分大时誤差可随意地小，而使 A_n 能以任何預定的精确度来表出 A。

我們关心的是要能簡捷地做出余項 α_n 的估值；这使我們在逐次計算部分和时只要所得近似值达到所要求的精确度就可以及时停止。

如果所考慮的是交錯級数并且項的絕对值一致遞降(萊卜尼茲型)，則我們已經知道[244 段附注]，它的余項与首項同正負号而絕对值小于首項。这种估值就其簡单而言已不能再要求有所改进了。

比較复杂一些的是正項級数的情形。这时候通常設法找一个各項較大而容易求和的正項級数：$\sum_1^\infty a'_n$。$a'_n \geqslant a_n$，并且取这新級数的余項 α'_n 的大小作为余項 α_n 的估值：$\alpha_n \leqslant \alpha'_n$。例如，对級数 $\sum_1^\infty \frac{1}{m^2}$ 可以得出：

$$\sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^\infty \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n},$$

而对于級数 $1 + \sum_1^\infty \frac{1}{m!}$：

$$\sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{(n+1)\cdot \cdots \cdot m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!\,n}$$

[这个估值法我們在 49 段計算 e 时实际上用到过]。

寻常求一数 A 的十进近似值时級数的諸項也可能没有表为十进小数。在化为十进小数时，由尾数的化整而引起新的誤差，这也須計及。

最后，我們指出，并非每个其和为数 A 的級数都适用于实际作数 A 的計算(甚至其各項簡单且余項容易估值时也未必适用)。問題在其部分和收斂的快慢也就是說部分和逼近 A 的快慢。

我們取下列两級数为例[参閱 255 段及 256 段，(22)]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad 及 \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

它們各为$\frac{\pi}{4}$及 $\ln 2$ 的展开式。这两个級数收斂得慢；如果用以求那两个数的近似值，則須求很多項的和才能达到高度的准确性。下面我們不难利用較适当的級数以很大的精确度来求該二数的十进近似值。

261. π 的計算 回到已知的反正切級数[255 段，(19)]：

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

如果取 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$，則 $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{6}$，而得級数

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\right),$$

它已經适于作計算了。

但还有更便于計算 π 的級数。我們令 $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$，于是

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5},\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},\quad \operatorname{tg}4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}.$$

由于 $\operatorname{tg}4\alpha$ 接近于 1，故显然角 4α 接近于$\frac{\pi}{4}$；令 $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$，我們有：

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},\quad \text{而 } \beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

由此得到这样一个公式：

$$\pi=16\alpha-4\beta=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\cdots\right\}-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\}.$$

如果我們按上式来計算 π 至小数点后第七位。只須計算公式中已写出的那些項就够了。因两級数都屬萊卜尼茲型，則在被減数和減数中所舍弃項的校正数各为：

$$0<\Delta_1<\frac{16}{13\cdot 5^{13}}<\frac{1}{10^8} \quad 及 \quad 0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot 239^5}<\frac{1}{10^8}.$$

將所保留諸項化为十进小数，而取到第八位数字(四舍五入)。把計算列成下式(括弧里的＋或－表示校正数的正負号)：

$$\frac{16}{5}=3.20000000 \qquad \frac{16}{3\cdot 5^3}=0.04266667\ (-)$$

$$+\frac{16}{5\cdot 5^5}=0.00102400 \qquad +\frac{16}{7\cdot 5^7}=0.00002926\ (-)$$

$$\frac{16}{9\cdot 5^9}=0.00000091+ \qquad \frac{16}{11\cdot 5^{11}}=0.00000003\ (-)$$

$$3.20102491 \qquad 0.04269596$$

$$-\frac{3.20102491}{0.04269596} \qquad \frac{4}{239}=0.01673640\ (+)$$

$$3.15832895 \qquad -\ \frac{4}{3\cdot 239^3}=0.00000010\ (-)$$

$$0.01673630$$

算出所有校正数我們有:

$$3.15832895<16\alpha<3.15832898$$

$$-0.01673632<-4\beta<-0.01673630,$$

而

$$3.14159263<\pi<3.14159268.$$

如此終于得出 $\pi=3.1415926\cdots$, 而所有写出的位数都是精确的。

262. 对数的計算 計算根据的是 256 段中的級数(24):

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]. \qquad (1)$$

在 $n=1$ 时得 $\ln 2$ 的展开式:

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7}+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8}+\cdots\right).$$

这个級数完全适于作計算。例如，我們来証明，只限于所写出諸項已能求 $\ln 2$ 精确至第九位十进数字。

事实上，如果把这級数由第九項起完全舍弃则相应校正数为:

$$\Delta=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9}+\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}}+\cdots\right)<\frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8}<\frac{2}{10^{10}}.$$

計算到(1)数后第十位，把計算列成下式

$$\frac{2}{3}=0.6666666667\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9}=0.0246913580\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2}=0.0016460905\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3}=0.0001306421\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4}=0.0000112901\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5}=0.0000010264\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6}=0.0000000965\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7}=0.0000000093\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8}=0.0000000009\ (+)$$

$$0.6931471805$$

算出所有校正数我們有：

$$0.6931471802<\ln 2<0.6931471809,$$

而

$$\ln 2=0.693147180\cdots,$$

所写 9 位数字都是精确的。

現在令(1)中 $n=4$，我們得：

$$\ln 5=2\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2}+\cdots\right).$$

利用已經算出的 $\ln 2$ 值，不难由此公式算出 $\ln 5$，然后算出 $\ln 10=\ln 2+\ln 5$。于是可以以任何精确度算出轉化自然对数为十进对数的模

$$M=\frac{1}{\ln 10},$$

这模等于 $M=0.434294481\cdots$，乘以模，我們就求得十进对数：$\log 2$ 及 $\log 5$。

在基本公式(1)里我們也化成十进对数：

$$\log(n+1)-\log n=\frac{2M}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]. \qquad (2)$$

这里令 $n=80=2^3\cdot 10$ 并且注意 $n+1=81=3^4$，如此有

$$4\log 3-3\log 2=\frac{2M}{161}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25921}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25921^2}+\cdots\right)+1,$$

由此不难求出 log 3。 其次，在公式 (2) 里令 $n=2400=3\cdot 2^3\cdot 10^2$，我們有 $n+1=2401=7^4$ 以及

$$4\log 7-3\log 2-\log 3-2=\frac{2M}{4801}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23049601}+\cdots\right),$$

如此就求得 log 7。 选配类似的数的組合能以任何精确度来求素数的对数，然后乘以一些自然數而加起来就可求出各个合成數的对數。

也可以采取另一做法，直接算出相邻自然數的对數而用公式(2)由 $\log n$ 渡到 $\log(n+1)$。如此，要計算 1000 至 10000 的对數我們在公式(2)里只取一項，即近似地令

$$\log(n+1)-\log n=\frac{2M}{2n+1} \qquad (10^3\leqslant n\leqslant 10^4).$$

在此校正数为

$$\Delta=\frac{2M}{2n+1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]<$$
$$<\frac{2M}{3(2n+1)^3}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=$$
$$=\frac{2M}{3(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n+2)}<\frac{2M}{24n^3}.$$

既然我們这里 $n\geqslant 10^3$，而 $2M<1$，則

$$\Delta<\frac{1}{24\cdot 10^9}<\frac{1}{2\cdot 10^{10}}.$$

即使所有誤差都加起来，則总誤差仍小于 $\frac{10^4}{2\cdot 10^{10}}=\frac{1}{2\cdot 10^6}$。 但如果另按第一法計算出一系列控制对數时，不难避免这种誤差的累积。这样既可以达到大得多的精确度，而同时保持第二法所固有的計算自动性，这特别在做大表时很有价值。

第十六章　函数序列及函数級数

§1. 均匀收斂性

263. 导言　前面我們已討論过无穷序列及其极限，无穷級数及其和；这些序列的元素或級数的項都是常数。固然，有时其中也引入变数作参数，但在研究时經常給以常数值。如此，比方說，当我們确定序列

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1,\left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\cdots,\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\cdots$$

有极限 e^x 时或級数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

有和 $\ln(1+x)$ 时 x 总是常数。序列的元素及其极限或級数的項及其和的函数性质我們是完全不顧及的；現在我們將注意力引向这一方面。

設給了一个序列，其元素是同一变数 x 的函数

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots,f_n(x),\cdots \tag{1}$$

确定在变数的一个变域 $\mathscr{X}=\{x\}$①。設对 $\mathscr{X}$ 內每一 x 值这序列有一有限极限；它旣然完全由 x 所确定，則也是 $\mathscr{X}$ 內的 x 的函数：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x), \tag{2}$$

它称为序列(1)或函数 $f_n(x)$ 的极限函数。

現在我們关心的不光是在各別点 x 上极限的存在，而也关心极限函数的函数性质——即其連續性、导数及积分等問題。

① 通常这是一个区間；但我們姑且保持最一般的情形而把 $\mathscr{X}$ 理解为任一无穷数集。

我們已在 234 段看到，数序列及其极限的討論只是数項級数及其和的討論的另一种形式。現在我們来討論一个級数，其各項为某区域$\mathscr{X}$内同一变数 x 的函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{3}$$

設这个級数在$\mathscr{X}$的每个 x 值上都收斂；于是其和也是一个 x 的函数 $f(x)$。这和可由(2)那样的极限等式来确定，这里 $f_n(x)$ 理解为部分和

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x). \tag{4}$$

反之，如果令

$$u_1(x) = f_1(x),\quad u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \cdots$$
$$\cdots, u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \cdots$$

則任意給定的序列(1)的极限函数問題可以采取級数(3)的求和問題的形式来研究。我們常常要同函数級数打交道，因为用这种形式研究极限函数在实际上通常是比較便利的。

这里也要注意，我們所要仔細研究的对象不单是級数(3)的收斂問題，也还有其和的函数性質，这我們在前面已經提过。

极限函数(級数和) $f(x)$ 的函数性質实际上不仅依賴于函数 $f_n(x)$(或級数項)的函数性質，也依賴于 $f_n(x)$ 趨近于 $f(x)$ 的性質。我們首先要来講这方面可能出現的几种典型情况。

264. 均匀收斂性及非均匀收斂性 我們假設对$\mathscr{X}$内所有 x 值等式(2)恒成立。按极限定义这就是說：只要指定了$\mathscr{X}$内一个 x 值(为了要处理固定的数序列)，对任何給定的 $\varepsilon>0$ 必可找到这样一个序号 N，使得对所有 $n>N$ 恒成立不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{5}$$

这里 x 即理解为預先指定的那个值。

如果取另一 x 值，則得另一数序列，而对同一 ε 所找到的序号

N可能已不适用；于是必須代之以較大的。但 x 可取无穷多个值，如此在我們面前有无穷多个不同的收斂于极限的数序列。对于每一序列要各别找它的一个 N；于是发生这样的問題：是否存在这样一个序号 N，它在所給 ε 之下能同时适用于所有这些序列呢？

我們来举例指出，这样的共同序号 N 在有一些情形是存在的，在有些情形则不存在。

1）先設

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\ f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0(0\leqslant x\leqslant 1).$$

因为这里

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

故立即可看出，要不等式 $f_n(x)<\varepsilon$ 实现只要取 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$ 就行了，而不論 x 是什么值。如此，比方說 $N=E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$[①] 在这情形就同时适用于所有 x 值。

2）現在我們令

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\ f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0(0\leqslant x\leqslant 1).$$

对任何固定的 $x>0$ 只要取 $n>E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$，就能使 $f_n(x)<\frac{1}{nx}<\varepsilon$。但另一方面，不論 n 取多大，对于函数 $f_n(x)$ 在区間 $[0,1]$ 内总可找到一点 $\left(\text{比方說点 } x=\frac{1}{n}\right)$ 在該点函数値等于 $\frac{1}{2}$：$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$。如此，要凭 n 的增大来使对 0 至 1 間所有 x 値同时有 $f_n(x)<\frac{1}{2}$ 是做不到的。換句話說，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 已經不存在同时适用于所

① 关于 $E(x)$ 这記号参閱第一卷第一分册 31 頁。

有 x 值的共同序号 N 了。

图 2 是在 $n=4$ 及 $n=40$ 时函数的图象：图中特别显眼的是高度为$\frac{1}{2}$的峰，它随着 n 的增大而自右向左移动。虽然当 n 增大时，曲綫序列的点沿着任意个别取定的鉛垂綫而无限趋近于 x 軸，但沒有一条曲綫在 $x=0$ 至 $x=1$ 全程內整个接近于該軸。

在第一例，所考虑的函数情形就两样了；我們沒有画出它們的图象，因为它們，例如在 $n=4$ 或 40 时，可由图 2 的图象将所有縱坐标綫縮至四分之一或四十分之一而得。在这情形曲綫就在其全程內接近于 x 軸。

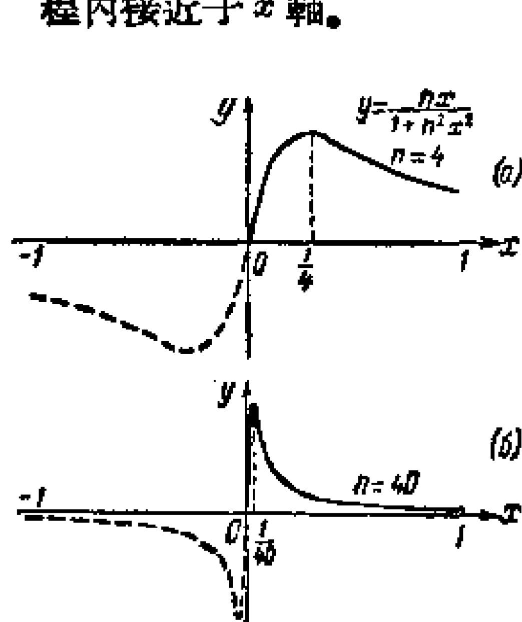


图 2.

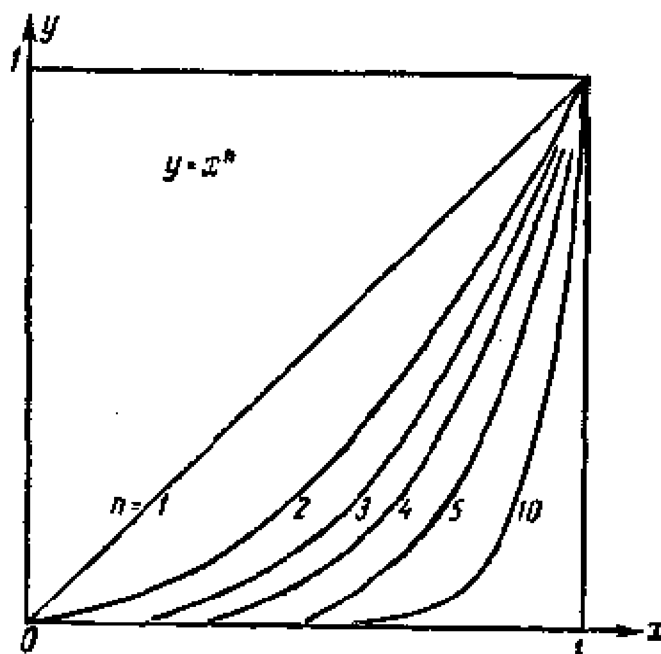


图 3.

现在我們来下一个基本定义：

如果 1）序列(1)在$\mathscr{X}$內有一極限函数 $f(x)$ 并且 2）对每一数 $\varepsilon>0$ 都存在这样一个与 x 无关的序号 N，使在 $n>N$ 时不等式(5)同时对$\mathscr{X}$內的所有 x 都成立，則称序列(1)［或函数 $f_n(x)$］对区域$\mathscr{X}$內的 x 均匀地收斂于［或趋于］函数 $f(x)$。

如此，在前面第一个例里函数 $f_n(x)$ 对区間[0, 1]內的 x 均匀地趋于 0，而在第二例則否。

我們再来看几个非均匀收斂的例子。

3）如果

$$f_n(x)=x^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

則在 $x<1$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

并且 $f(1)=1$。

在这情形不等式 $x^n<\varepsilon(\varepsilon<1)$的不可能同时对所有 $x<1$ 成立，可由 $x\to 1$ 时(n 固定) $x^n\to 1$ 看出。圖 3 表現出它失去均匀性时的特点：这里极限函数跳跃着变，而峰不移动。

4）最后，設

$$f_n(x)=2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}(0\leqslant x\leqslant 1).$$

試看对任何 n

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2n}{e},$$

由此可見在区間[0, 1] 內不能均匀趋近于极限函数，它在此恒等于 0。这回峰高不但破坏了均匀地趋于 0，还隨同 n 而无限增大。

現在我們把所有以上关于函数收斂性所說的話搬到函数級数(3)的情形上。

設該級数收斂，我們来考慮其和 $f(x)$，部分和 $f_n(x)$ [参閱(4)]及其第 n 項以后的余項

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

对任何固定 x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \text{ 并且 } \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

如果部分和 $f_n(x)$ 对区域$\mathscr{X}$內的 x 均匀地趋于級数之和 $f(x)$ [也就是說，級数 $\varphi_n(x)$ 的余項均匀趋于 0]，則称級数(3)在这区域內均匀收斂。

这定义显然等价于：

一个在区域 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值上都收斂的級数(3)，如果对每一 $\varepsilon>0$ 恒存在这样一个与 x 无关的序号 N，使在 $n>N$ 时不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ 或 } |\varphi_n(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

对 $\mathscr{X}$ 内的所有 x 都成立，则称为在此区域内均匀收斂的。

只要变换上面所引各序列的例子，就可做成均匀收斂及非均匀收斂級数的例子。我們再添加下面这一个簡单的例子。

5) 我們来看等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$；它在开区間 $\mathscr{X}=(1,-1)$ 內收斂。对 $\mathscr{X}$ 內任何 x 值第 n 項后余項如下：$\varphi_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$.

如果 n 任意指定，則显然

$$\lim_{x\to-1+0}|\varphi_n(x)|=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to1-0}\varphi_n(x)=\infty.$$

二式都表示，要在同一序号 n 之下对所有 x 同时实現不等式

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon\left(\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$$

是不可能的。故該級数在区間 $(-1,1)$ 內是非均匀收斂的；分別对区間 $(-1,0]$ 及 $[0,1)$ 来說也是如此。

265. 均匀收斂性条件 那个建立数序列有限极限存在条件的波尔察諾-哥西定理（“收斂性原理”）[52 段]可以很自然地化为下面这个在区域 $\mathscr{X}$ 內函数序列(1)的均匀收斂性条件：

要序列(1) 1)有一极限函数，而且 2)对区域 $\mathscr{X}$ 內的 x 值均匀收斂于这个函数，則須要也只須要对每一 $\varepsilon>0$ 存在这样一个与 x 无关的序号 N，使在 $n>N$ 时并在任何 $m=1,2,3,\cdots$ 之下不等式

$$|f_{n+m}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{7}$$

对 $\mathscr{X}$ 內所有 x 值都同时成立。

这条件也可簡单陈述为：要序列(1)的收斂性原理对$\mathscr{X}$內所有x值都均匀地实現。

証明　必要性　如果序列(1)有一极限函数$f(x)$并且在$\mathscr{X}$內均匀收斂于它，則对任一給定的$\varepsilon>0$恒可找到这样一个与x无关的序号N，使在$n>N$时对所有x

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

同样得

$$|f_{n+m}(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (m=1,2,3,\cdots),$$

而由这两个不等式有(7)。

充分性　設定理中所指条件实現。于是对$\mathscr{X}$內任何固定的x值序列(1)就成为一个滿足波尔察諾-哥西条件的数序列。所以对这序列存在一个有限极限，这也就証明了序列(1)有一个极限函数$f(x)$。

現在我們任意取一个$n>N$并取一个$\mathscr{X}$內的x而令不等式(7)里的m无限增大(n与x保持不变)。取极限得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这証明了$f_n(x)$均匀趋于$f(x)$。

所証明的条件不难轉述为函数級数的情形：

要級数(3)在区域$\mathscr{X}$內均匀收斂，其必要而充分的条件是要对每一数$\varepsilon>0$恒有这样一个与x无关的序号N，使在$n>N$及任何$n=1,2,3,\cdots$之下不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(x)\right|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)|<\varepsilon \quad (8)$$

对$\mathscr{X}$內所有x都同时成立。

实际上要确定具体序列或級数的均匀收斂性，則采用应用起来比較方便的充分檢驗法，这通常是对級数来陈述的。

这里是一个最簡单最常用的檢驗法:

維尔斯脫拉斯檢驗法 如果函数級数 (3) 各項在区域$\mathscr{X}$內滿足不等式

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \qquad (n=1,2,3,\cdots), \tag{9}$$

而 c_n 是某一收斂数級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots. \tag{C}$$

的各項,則級数(3)在$\mathscr{X}$內均匀收斂。

若不等式(9),則級数(3)称为被級数(C)所控制,或者說,(C)是(3)的控制級数。

事实上由(9)我們得一个不等式

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)| \leqslant c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+m},$$

它同时对区域$\mathscr{X}$內所有x都成立。將收斂性原理应用于数級数(C),对任一 $\varepsilon>0$ 恒可找到这样一个 N,使在 $n>N$ 时上面不等式右边已小于 ε,从而左边也小于 ε,并且是同时对所有 x 都如此。由此,根据上面所証明的条件就推出我們的論断。

如此,只要級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕对收斂,則在任何区間內象

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

这样的級数也就均匀收斂。这是因为

$$|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leqslant |a_n|,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 起了控制級数的作用。

§ 2. 級数和的函数性质

266. 級数和的連續性 我們現在来討論由函数組成的級数

之和的函数性质，这些性質是与組成函数有关的。上面已經指出过序列观点与无穷級数观点的等价性。本书宁取后一观点来讲，因为实用上所遇到的几乎全是无穷級数。要把对函数級数所說的話搬到函数序列上去是不难的。

上面所引入的均匀收斂性概念在全部下文中將起决定性的作用，如此它的重要性將充分地表現出来。

我們先从由連續函数所組成的級数之和的連續性問題开始。讀者知道，有限个連續函数之和是連續函数[62 段]；那么这样的話对无穷多个函数的情形也成立嗎？下面这个簡單的例子告訴我們并不永远如此。

我們試看級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)=(1-x)+x(1-x)+\cdots+x^{n-1}(1-x)+\cdots$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1)$$

在 $x=1$ 时此級数各項連同其总和全化为 0；$x<1$ 时則总和为 1。虽然級数各項在区間[0,1]內連續，但在点 $x=1$ 級数之和有了間断。在此級数的收斂性不均匀，因为 n 項以后級数余項 $x^n (x<1)$ 非均匀地趋于 0 [264 段, 3)]。

定理1. 如果函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 內有定义并且連續，而級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

在 $\mathscr{X}$ 內均匀收斂于其和 $f(x)$，則此和在区間 $\mathscr{X}$ 內連續。

証明　在区間 $\mathscr{X}$ 內任取一点 x_0 而来确定函数 $f(x)$ 在該点的連續性。保持以前的表示法我們有

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x). \tag{2}$$

这里 $n=1,2,3,\cdots$，中的任何一个而 x 是 $\mathscr{X}$ 內的任何值；特例

$$f(x_0)=f_n(x_0)+\varphi_n(x_0),$$

由此有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+ \\ +|\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x_0)|. \tag{3}$$

現在給定一个 $\varepsilon>0$。由于該級数的均匀收斂性可以指定一个序号 n，使不等式

$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

在区間 $\mathscr{X}$ 的所有 x 值上都成立（也包括 $x=x_0$ 在内）。在固定的 n 之下函数 $f_n(x)$ 是某有限个在点 $x=x_0$ 上連續的函数 $u_k(x)$ 之和。所以它在該点上也連續，并且对任一給定的 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$，使在 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

于是，由(3)，(4)及(5)，不等式 $|x-x_0|<\delta$ 引出

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这就証明了本定理①。

附注　我們在实例上已看出，如果略去級数的均匀收斂性条件則本定理可不正确。但是均匀收斂性在本定理中只是充分条件，不要以为这条件对級数和的連續性也是必要的。例如，級数

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}2x[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}], \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

［参閱 264 段，4）及 2）］在区間［0，1］內有一連續和，恒等于 0，虽然在該区間內两級数的收斂都不均匀。

---

① 这里实际上証明的是，由某点上級数各项的連續性可推出其和在該点上的連續性。

不难将所証明的定理轉述为函数序列的情形:

定理 1* 如果函数

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots, \tag{7}$$

在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 內有定义并且連續，而序列(7)在$\mathscr{X}$內均匀收斂于极限函数 $f(x)$，則此函数 $f(x)$ 也在$\mathscr{X}$內連續。

267. 正項級数的情形 对这种特殊类型的級数，如地尼[①]所証明的，均匀收斂就是級数和的連續性的充分而又必要的条件:

定理 2. 設級数(1)各項在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 內連續而且非負。如果該級数有总和 $f(x)$，且 $f(x)$ 也在区間$\mathscr{X}$內連續，則該級数在此区間內均匀地收斂。

証明 我們来看級数(1)的余項:

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

函数$\varphi_n(x)$既为两連續函数之差，也是連續的。因該級数各項都是正的，故在 x 值固定时序列$\{\varphi_n(x)\}$是遞降的(非遞升的):

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n(x)\geqslant\varphi_{n+1}(x)\geqslant\cdots$$

最后，由于級数(1)在区間$\mathscr{X}$內收斂，故对任何常数 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

为了确立該級数的均匀收斂性，只要証明，对每一 $\varepsilon>0$ 至少有一个 n 使同时对所有 x 都有 $\varphi_n(x)<\varepsilon$ (因此时对更大的 n 值此不等式成立更不成問題)。

这一点我們用反証法来証明。設对某一 $\varepsilon>0$ 这样的 n 不存在。于是在任何 $n=1,2,3,\cdots$ 之下在区間$\mathscr{X}$內可找到这样一个值 $x=x_n$，使 $\varphi_n(x)\geqslant\varepsilon$。对序列$\{x_n\}$中所有元素完全包含在有限区間$\mathscr{X}$內，我們应用波尔察諾-維尔斯脫拉斯預备定理[51 段]，由該序

① 烏利斯·地尼(U. Dini 1845—1918)是意大利数学家。

列分出一个收斂于极限 x_0 的子序列 $\{x_{n_k}\}$。

由 $\varphi_m(x)$ 的連續性我們有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0),$$

而不論 m 是什么值。另一方面，在任何 m 之下，对充分大的 k 有：

$$n_k\geqslant m,\ \text{如此}\ \varphi_m(x_{n_k})\geqslant\varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon.$$

在此取 $k\to\infty$ 时的极限我們得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon.$$

而这不等式在任何 m 之下成立，这与

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)=0$$

冲突。如此本定理証明了。

如果将地尼定理轉述为序列的情形则得

定理 2* 設由在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内連續的函数所組成的序列 (7) 在 $n\to\infty$ 时趋于极限函数 $f(x)$，且单調遞升：

$$f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x).$$

如果函数 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内也連續，則 $f_n(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内均匀收斂于 $f(x)$。

268. 逐項取极限 我們还講一个定理，它是定理 1 的推广。其中 $\mathscr{X}$ 是任意的无穷集合，有一个聚点 a（有限或无限）[32 段]；这个点本身也可不属于集合 $\mathscr{X}$。

定理 3. 設函数 $u_n(x)\,(n=1,2,3,\cdots)$ 每个都在区域 $\mathscr{X}$ 内有定义并且在 x 趋于 a 时各有一有限极限：

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=c_n. \tag{8}$$

如果級数 (1) 在区間 $\mathscr{X}$ 内均匀收斂，則 1) 由这些极限所組成的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C \tag{C}$$

也收斂并且2) 級数(1)之和 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时也有一极限，即

$$\lim_{x\to a} f(x)=C. \tag{9}$$

証明 按265段均匀收斂性条件，对一个任意取来的 $\varepsilon>0$ 存在有这样一个序号 N，使在 $n>N$ 且 $m=1,2,3,\cdots$ 时69頁上的不等式(8)对 $\mathscr{X}$ 內所有 x 值都成立。在此取 $x\to a$ 时的极限，并考慮到由(8)得

$$|c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+m}|\leqslant\varepsilon,$$

如此对級数(C)实現了242段的收斂性条件。

如果 C, C_n 及 γ_n 各如慣例表示其和，部分和及余項，則

$$C=C_n+\gamma_n.$$

由(2)減这个等式不难得出：

$$|f(x)-C|\leqslant|f_n(x)-C_n|+|\varphi_n(x)|+|\gamma_n|. \tag{10}$$

由于級数(1)的均匀收斂性及級数(C)的收斂性，对任何 $\varepsilon>0$ 恒可指定一个如此大的 n，使对 $\mathscr{X}$ 內的所有 x 有：

$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \text{而也有}\ |\gamma_n|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

因为，显然

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k=C_n,$$

故——在 a 有限的情形——可找到这样一个 $\delta>0$，使在 $|x-a|<\delta$ 时有

$$|f_n(x)-C_n|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

于是，在所指示的 x 值之下由于(10)，(11)及(12)成立不等式

$$|f(x)-C|<\varepsilon,$$

这就可导至(9)[①]。

① 讀者应知这种論証法是在証明定理1时已經用过的。

等式(9)可以写成这形式[参閱(8)]:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\lim_{x\to a}u_n(x)\};$$

如此，在均勻收斂时函数級数和的极限就等于由各項的极限所組成的級数之和，換句話說，在函数級数中可以"逐項"取极限。

例 作为这一般定理的应用实例，我們来推导讀者所熟悉的对数級数[256 段,(21)]，由二項式級数[258 段,(26)]出发，而借助极限关系[65 段,2)]

$$\ln a=\lim_{k\to\infty}k(\sqrt[k]{a}-1).$$

(其实欧拉在其"分析引論"里就是这样导至对数級数的，但当然沒有严格的根据。)

我們令 $a=1+x(|x|<1)$ 而 $(1+x)^{\frac{1}{k}}$ 代之以其展开式

$$(1+x)^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}x+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\dots$$
$$\dots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\dots$$

于是 $\ln(1+x)$ 表为下式在 $k\to\infty$ 时的极限:

$$k[(1+x)^{\frac{1}{k}}-1]=x-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)k}\right)+\dots \tag{13}$$

要注意，在此 x 表示一个常数。这級数各項含有自然数参变数 k 作为变数。在其整个变域內① 級数(13)均匀地收斂，这(按維尔斯脫拉斯檢驗法)可由下一事实推知: 它由級数

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\dots+\frac{|x|^n}{n}+\dots(x=\text{常数},\ |x|<1)$$

所控制，后者已經不包含 k。在这情形，按定理 3 可在級数 (13) 里逐項取 $k\to\infty$ 时的极限，这就导出对数級数。

① 要記得在定理 3 里所說到的变数 x 的变域 $\mathscr{X}$ 可以是隨便怎样的；特别是它可以是自然数集而 $a=+\infty$。

269. 級数的逐項积分 現在我們来討論收斂的函数級数和的积分問題。

定理 4. 如果函数 $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 在区間 $\mathscr{X}=[a, b]$ 內連續，并且它們所組成的級数(1)在此区間內均匀收斂，則級数(1)之和 $f(x)$ 的积分可表成这样：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots \tag{14}$$

証明 旣然函数 $u_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是連續的[266 段，定理 1]所有这些积分显然都存在。將恒等式

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\varphi_n(x)$$

在区間 $[a, b]$ 內积分起来，得：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

如此，級数(14)的 n 項之和与积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 相差就在余項 $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$。要証明展开式(14)只須証明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx=0. \tag{15}$$

旣然級数(1)是均匀收斂的，則对任何 $\varepsilon>0$ 必可找到这样一个序号 N，使在 $n>N$ 时对区間 $\mathscr{X}$ 內所有 x 値都有

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon.$$

于是对同样那些 n 值有

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx<(b-a)\varepsilon,$$

这就証明了极限关系式(15)。

等式(14)可以写成这样:

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)\,dx\right\},$$

如此，对于一个均匀收斂的函数級数，和的积分就等于各項的积分所組成級数之和，换句話說，在这情形級数可以逐項积分。

附注 也如定理 1 的情形，均匀收斂性的要求对展开式(14)的成立是重要的，即不能随便略去，但仍然不是必要的。266 段的級数(6)恰可作这情况的例証。这二級数在区間[0, 1]內都非均匀地收斂于函数 $f(x)=0$。但第一个級数逐項积分起来我們得积分級数之和为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1,$$

虽然

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0;$$

但对第二級数則可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

例 我們来把所謂第一类型的完全椭圓积分

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

按模 $k\,(0<k<1)$ 的冪展开。

由 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的二項式級数展开式出发[258 段]并令其中 $x=-k^2\sin^2\varphi$，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}k^{2n}\cdot\sin^{2n}\varphi.$$

这个級数对 φ 均匀收斂，因为它被收斂級数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}$ 所控制，所以这里容許在区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内依 φ 逐項积分。积分出来并利用已知积分[187 段]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

如此得到

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2\cdot k^{2n}\right\}$$

这个展开式——特别是在 k 不大时——可以应用于近似計算。

我們仿定理 4 对序列陈述其类似的定理如下：

定理 4* 如果函数序列(7)各項在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内連續并在 $\mathscr{X}$ 内均匀收斂于极限函数 $f(x)$，則

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \tag{16}$$

这等式也可写成

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left\{\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\}dx,$$

如此，关于积分的极限过程可直接施于被积函数。在这情形我們說，容許积分号下取极限。

在第十八章我們将以較一般的形式再提出这个問題。

270. 級数的逐項微分 借助前一段的定理 4 不难証明下面这个定理：

定理 5. 設函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内

有定义并在其中有連續导函数 $u_n'(x)$。如果在这区間內不但級数(1)收斂，并且下面的由导函数所組成的級数还均匀收斂：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots, \tag{17}$$

則級数(1)之和 $f(x)$ 在$\mathscr{X}$內也有导函数，并且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{18}$$

証明　我們以 $f^*(x)$ 表示級数(17)之和；由定理1这是一个 x 的連續函数。現在应用定理4将級数(17)在区間$[a, x]$內（x 是$\mathscr{X}$內的任意一值）逐項积分起来，如此得

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)\,dt.$$

但显然

$$\int_a^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a), \text{ 如此}$$

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

既然左边的积分因被积函数連續而有导函数 $f^*(x)$［183段，12°］，因此与該积分只差一常数的函数 $f(x)$ 也卽有同样的导函数。

如果仿照哥西以 D 表示导数則等式(18)可写成

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

如此，在所指出条件之下，級数之和的导数就等于由其各項导数所

組成的級數之和，換句話說，这样的級数容許“逐項”微分。

附注 我們来看級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right]$$

及

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right].$$

第一个級数在 $x=0$ 时收斂于 0 在其余点上收斂于 1，而第二級数之和到处都等于 0。如果逐項微分起来，則得出 266 段的已知級数(6)，在全区間 $[0,1]$ 内收斂于 0，但二者都非均匀收斂。在第一情形导数所組成的級数在 $x=0$ 也收斂，而在这里原級数之和則不能有导数，因为在这点上不連續。在第二情形則相反，逐項微分可到处得正确結果。这些例子說明了“要导函数級数均匀收斂”这个条件的地位：它是重要的，但不是必要的。

讀者自己可将定理 5 轉述为函数序列的情形。

所有这些关于逐項取极限、逐項积分及微分的定理建立了函数級数与有限个函数和之間的相似性。但这相似性要受某些条件的限制，在这些条件中一律都要用到均匀收斂。

271. 无导数連续函数一例 在这一节的結尾我們利用函數級数来举一个在任何点上都沒有导函数的連續函数的例子。

第一个这种例子屬于維尔斯脫拉斯；它发表于 1875 年①；他的函数由下面的級数来定义：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos b^n\pi x,$$

这里 $0<a<1$，而 b 是一个奇数(并且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$)。这級数被收斂級数 $\sum_{0}^{\infty}a^n$ 所控制，所以[265 段；266 段，定理 1]是均匀收斂的，并且它的和到处是 x 的連續函数。維尔斯脫拉斯經过精細研究，終于証明这函数在任何点上都沒有导数。

我們举一个凡·德·魏尔登所建立的更簡单的例子，它本質上也是以同

① 但这里波尔察諾也赶过了他，波氏更早做出类似的函数(1830 年)。

样想法做成的，只是振动曲線 $y=\cos\omega x$ 換成了振动折綫。

如此，我們以 $u_0(x)$ 表示 x 与其最近整数間之差的絕对值。这函数在每一个 $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$ 这样的区間內（s 是整数）都成綫性函数；它是連續的并且有周期 1。它的图象是一条折綫，如图 4a；折綫各节有斜率 ±1。

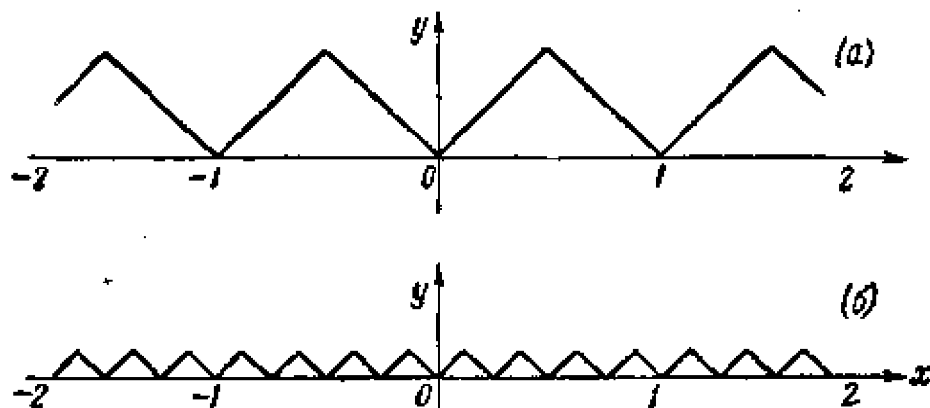


图 4.

然后令 $k=1, 2, 3, \cdots$ 时

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

这函数在 $\left[\frac{s}{2\cdot4^k}, \frac{s+1}{2\cdot4^k}\right]$ 这样的区間內是綫性的；它也是連續的并且有周期 $\frac{1}{4^k}$。它的图象也是折綫，但鋸齿較小；例如在图 4б 上所表的是函数 $u_1(x)$ 的图象。在所有情形折綫各节的斜率也等于 ±1。

現在我們用下式来对 x 的所有实值定义一个函数 $f(x)$：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x).$$

因为显然 $0\leqslant u_k(x)\leqslant\frac{1}{2\cdot4^k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，而該級数被收斂級数 $\sum_0^{\infty}\frac{1}{2\cdot4^k}$ 所控制，故（也如維尔斯脫拉斯函数的情形）該級数均匀收斂，并且函数 $f(x)$ 到处連續。

現在来看任意值 $x=x_0$ 上的情形。算出 x_0，精确到 $\frac{1}{2\cdot4^n}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 以內，如此我們将它限于这样两数之間：

$$\frac{s_n}{2\cdot4^n}\leqslant x_0\leqslant\frac{s_n+1}{2\cdot4^n},$$

这里 s_n 是一个整数。显然，閉区間

$$\Delta_n=\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\ \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right](n=0,1,2,\cdots)$$

是一个套一个的。在每一区間內可找到这样一点 x_n，使其与点 x_0 的距离等于这个区間长之半：

$$|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}};$$

显然，隨着 n 的增大变数 $x_n\to x_0$。

现在我們来做出增量比：

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

但，在 $k>n$ 时 $\frac{1}{4^{n+1}}$ 是函数 $u_k(x)$ 的周期 $\frac{1}{4^k}$ 的整倍数，所以 $u_k(x_n)=u_k(x_0)$，該級数相应項为 0 而可忽略。如其 $k\leqslant n$，則在区間 Δ_k 內的綫性函数 $u_k(x)$ 在所包含的区間 Δ_n 內也是綫性的，而

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1\ \ (k=0,1,\cdots,n).$$

如此最后我們有

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1);$$

换句話說，这个比在 n 为奇数时为偶数，在 n 为偶数时为奇数。由此显然，在 $n\to\infty$ 时这增量比不能趋于任何有限极限，故該函数在 $x=x_0$ 无有限导数。

§ 3. 冪級数及多項式級数

272. 冪級数收斂区間 前段所講的理論在研究冪級数的性質时有一重要的应用，这种級数或依变量的升冪排列：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

或一般情形依二項式 $x-x_0$ 的升冪排列：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{2}$$

($a_0, a_1, a_2, \cdots$在此表示常数系数)。这类級数的具体例子我們已屢次遇到过(特别是見第十五章 §6)。現在我們以一般的形式来討論这所謂表出函数的分析工具。显然，我們只要討論級数 (1) 就行了，因为級数(2)可由变数替换化为(1)。

我們首先試图来搞清楚冪級数"收斂区域"的构造，卽那些使級数(1)收斂的变数値 $x=\bar{x}$ 的集合 $\mathscr{X}=\{\bar{x}\}$ 的构造。为此給出下面这一預备定理：

預备定理. 如果級数(1)对那些异于 0 的値 $x=\bar{x}$ 收斂，則它对任何滿足不等式$|x|<|\bar{x}|$的 x 値絕对收斂。

由級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{x}^n = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \cdots + a_n\bar{x}^n + \cdots$$

的收斂性推知，其公項趋于 0 (235 段, 5°)，所以[36 段, 5)]：

$$|a_n\bar{x}^n| \leqslant M \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

現在我們取任一 x，使$|x|<|\bar{x}|$，而做成級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n| = |a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \cdots + |a_nx^n| + \cdots \tag{4}$$

因为[参閱(3)]：

$$|a_nx^n| = |a_n\bar{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

并且級数(4)各項都小于下面的收斂几何級数(公比为$\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$)的相应項：

$$M+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2+\cdots+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n+\cdots,$$

故按 **237** 段的定理 1 级数(4)收斂。在这情形，我們知道，級数(1)絕对收斂，这就是要証明的。

在 $x=0$ 时显然任何級数(1)都收斂。但也有在此以外的任何 x 值上都不收斂的冪級数。这种"到处发散"的級数的例子有 $\sum_1^\infty n!\,x^n$，这我們不难用达朗貝尔檢驗法証实。这类級数我們不感兴趣。

我們假設，使級数(1)收斂的变数值 $\bar{x}$ 中有异于 0 的。我們来考慮这个集 $\{|\bar{x}|\}$；它可以上有界或上无界。

在后一情形，不論取怎样的 x 值，必能找到这样一个 $\bar{x}$，使 $|x|<|\bar{x}|$，于是按預备定理对所取 x 值該級数絕对收斂。該級数成为"到处收斂"的。

現在設集合 $\{|\bar{x}|\}$ 上有界，并且 R 是它的上确界（如此 $0<R<\infty$）。如果 $|x|>R$，則此 x 值一定异于所有 $\bar{x}$，而該級数发散。現在取任一 x，使 $|x|<R$。按确界定义[第 6 段]，必定能找到这样一个 $\bar{x}$，使 $|x|<|\bar{x}|\leqslant R$；而由此按預备定理又推知級数(1)絕对收斂。

如此，証明了这个一般的

定理. 对于每个冪級数(1)，只要它不是到处发散的，就存在这样一个正数 R（它也可成为 $+\infty$），使

該級数在 $|x|<R$ 时絕对收斂，

而在 $|x|>R$ ($R<\infty$) 时发散。

此数 R 称为級数的收斂半徑。

由此解决了級数的"收斂域" $\mathscr{X}$ 的問題：它就是由 $-R$ 至 R 这整个区間；只对其端点还不能作一般的結論：由实例可見，在端点

上可以(絕对或非絕对)收斂，也可以发散。区間$\mathscr{X}$称为該級数的收斂区間。

对于到处发散的級数認为$R=0$：其"收斂区間"縮为一点$x=0$。

例 1) 对級数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$R=\infty$，收斂区間为$(-\infty, +\infty)$[253段]。

2) 在几何級数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

的情形$R=1$，收斂区間为$(-1, +1)$，两端点均除外。

3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

有$R=1$，收斂区間为$[-1, +1]$，两端均在内，但在端点上的收斂不是絕对的(255段)。

4) 对于級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$R=1$；收斂区間为$(-1, +1]$，左端除外，而右端上为非絕对收斂(256段)。

5) 最后，看級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2};$$

这里也有$R=1$，收斂区間为$[-1, +1]$，在两端此級数也絕对收斂（因級数$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收斂）。

所有以上所說的对一般的級数(2)仍然有效，只是点0的地位代之以点x_0，而收斂区間則由x_0-R延伸至x_0+R(端点是否在内

則看情形而定)。

附注 如果重复所述論証于級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{1a}$$

此处級数依复变数 z 的方冪排列，系数也是复数[254 段]，則对这种級数这个定理也成立：对每一級数(1a)(到处发散的情形除外)都存在这样一个实数 R $(0<R\leq+\infty)$，使 $|z|<R$ 时該級数絕对收斂，而 $|z|>R$ 时发散。但在"复数平面"上 $|z|<R$ 的点充滿一个半徑为 R 的圓(中心在点 $z=0$)；如此这里(代替收斂区間的地位)出現了收斂圓，而收斂半徑这个名称的来源也就明白了。

273. 冪級数和的連續性 設級数(1)有收斂半徑 $R>0$。首先可以断言：

1°. 无論取怎样一个正数 $r<R$，級数(1)必对閉区間 $[-r, r]$ 內的 x 均匀收斂。事实上，因为 $r<R$，故在 $x=r$ 时級数(1)絕对收斂，也即下列正項級数收斂：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot r^n = |a_0| + |a_1|\cdot r + |a_2|\cdot r^2 + \cdots + |a_n|\cdot r^n + \cdots \tag{5}$$

在 $|x|\leqslant r$ 时級数(1)各項絕对值不超过这級数的各相应項，如此它就起控制級数的作用而按維尔斯脫拉斯檢驗法級数(1)对所指那些 x 值均匀收斂。

虽然 r 可以取得隨意接近于 R，但由所証明的仍然不能推出在区間 $(-R, R)$ 內的均匀收斂性，这只要找一个級数为例[264, 5)]就可明白。

現在，作为 266 段定理 1 的推論我們得：

2°. 冪級数(1)之和 $f(x)$ 在其收斂区間內是一个 x 的連續函数。

无論在收斂区間 $(-R, R)$ 內取怎样的值 $x=x_0$，总可以选取这样一个数 r $(0<r<R)$，使 $|x_0|<r$。将定理 1 应用于区間 $[-r, r]$

内，則我們由 1° 可确定函数在此区間內連續，所以特别是在 $x=x_0$ 时也連續。

［讀者注意，我們避免应用定理 1 于区間 $(-R, R)$ 內，因为这里不能保証均匀連續。］

冪級数和的連續性可以用来証明关于冪級数恒等的定理（試回忆关于多項式的类似定理）：

3°. 如果两个冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

在点 $x=0$ 邻近[①] 有同一个总和，則这两个級数恒等，即相应系数两两相等：

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n, \cdots$$

在下列恒等式里令 $x=0$：

$$a_0 + a_1 x + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots,$$

如此立即看出 $a_0 = b_0$。舍弃这两項，并两边除以 x（此时要認为 $x \neq 0$）而得一新恒等式

$$a_1 + a_2 x + \cdots = b_1 + b_2 x + \cdots$$

它在点 $x=0$ 邻近也成立，但这一点本身除外，因此我們不能在这恒等式里不加說明就令 $x=0$。只是由于两級数和在 $x=0$ 时的連續性我們才能断定在所除出一点上这恒等式仍然成立，于是令 $x=0$ 而得 $a_1 = b_1$。舍弃这两項，除以 x 并再依据連續性（如剛才一样）而得 $a_2 = b_2$，如此进行下去。由数学归納法可証明这个一般

① 这里所指的不仅是点 $x=0$ 的双側邻近（邻域）$(-\delta, \delta)$，也指其单側邻近如 $[0, \delta)$ 或 $(-\delta, 0]$。

的結論。

这个定理建立了函数的冪級数展开式的惟一性，它最初由欧拉指出的。

274. 收斂区間端点上的連续性 現在我們来考慮关于冪級数 (1) 在收斂区間端点 $x=\pm R$ 附近的性态这一較精致的問題（R 假定是有限的）。在此我們不妨限于討論其右端 $x=R$；但只要将 x 換作 $-x$ 即可將所有論証搬到 $x=-R$ 的情形。

作为关于冪級数在开区間 $(-R, R)$ 內的連續性的定理 2° 的补充，我們有下列定理：

4°. **亚培尔[1] 定理.** 如果冪級数(1)在 $x=R$ 收斂(可以非絕对收斂)，則其和在此点上左方連續，卽

$$f(R-0)=\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n.$$

本来可先証明，由本定理的假設可推出級数(1)在閉区間$[0, R]$內均匀收斂，然后应用 266 段的一般定理 1。但我們采取直接証明法。

不致減少一般性可認为 $R=1$（只要以 Rx 代 x 問題就可化为这种情形）。于是，知道了級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$$

收斂，只要来証明

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

就行了。因此，設 $0<x<1$，按哥西法則将級数(1)乘以

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

如此得

$$\frac{1}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n,\text{ 而 }A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

---

[1] Niels Henrik Abel(1802—1829)是挪威数学家。

現在将級数

$$A=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}Ax^n$$

与

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$$

逐項相減，幷令 $A-A_n=\alpha_n$，而得恒等式

$$A-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n. \tag{6}$$

因为 $\alpha_n\to0$(235 段，2°)，故对任一給定的 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个序号 N，使 $|\alpha_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$，只要 $n>N$。

我們把(6)式右边的級数之和分成两个和

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n \text{ 及 } (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n.$$

第二式容易估値幷且无論 x 値如何恒有

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n\right|\leqslant(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|x^n<\frac{\varepsilon}{2}\cdot(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n<\frac{\varepsilon}{2}.$$

至于第一式則 $x\to1$ 时趋于 0，而 x 充分接近 1 时

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

如此終于有

$$\left|A-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right|<\varepsilon,$$

这就証明了所說的論断。

由此从而有这样簡单的推論：

推論. 如果对函数 $f(x)$ 只在开区間里得到了冪級数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (-R<x<R),$$

但在該区間一端，比方說 $x=R$，該函数有定义且連續，幷且該級数継續收斂，則該展开式对 $x=R$ 仍正确。

这不难証明，只要在上面所写的等式里取 $x\to R-0$ 时的极限就行了。

275. 幂級数的逐項积分 对于积分及微分而言，幂級数——在其收斂区間范圍內——就如同寻常多項式的情形一样。

5°. 幂級数(1)在区間$[0, x]$內(这里$|x|<R$)恒可逐項积分，如此，以$f(x)$表級数和則有

$$\int_0^x f(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots \tag{7}$$

証明时我們取 r 介乎 $|x|$ 与R之間。由 1° 知級数(1)在区間$[-r, r]$內均匀收斂，于是按 269 段定理 4 該級数在区間$[0, x]$內可逐項积分。

我們举例来説明这定理的种种应用。

1) 在区間$[0, x]$ ($|x|<1$)內逐項积分級数

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + \cdots$$

立即得出展开式

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

它們在 257 及 256 段里是用比这复杂得多的方法得到的。因为第一个級数在$x=1$时收斂，而第二个在$x=\pm1$时收斂，則相应展开式(按亚培尔定理的推論)也就在这些值上成立。

2) 我們取函数$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$的已知幂級数展开式[258 段]并在其中以$-x^2$代替x(假定$|x|<1$)；結果得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n} \qquad (-1<x<1).$$

現在将此級数在区間$[0, x]$ $(-1<x<1)$內逐項积分，最后得一反正弦的新的展开式:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

按亚培尔定理的推論[**274** 段]，这个展开式在区間端点 $x=\pm1$ 上也成立，因为右边的級数在这些点上也收斂[例如参閱 **240** 段]。

3)在許多不能用初等函数表为有限形式的积分的冪級数展开式中逐項积分起特别的作用[**165** 段]。

例如，由下面熟悉的展开式出发:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots$$

[**253** 段，(11)]我們得

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

这类展开式可成功地用来做近似計算并給不能表为有限形式的积分編制数值表。

276. 冪級数的逐項微分 6°. 冪級数(1)在其收斂区間內部可逐項微分，如此对該級数来說，和 $f(x)$的导函数存在并可表成:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \qquad (8)$$

对无論如何取来的值 $x=x_0$ $(-R<x_0<R)$，总可选出这样两个数 r_0 及 r，使$|x_0|<r_0<r<R$。

由于級数(5)的收斂[273 段]，其公項必有界:

$$|a_n|\cdot r^n \leqslant L \qquad (n=1,2,3,\cdots; L\text{为常数}).$$

于是在$|x|\leqslant r_0$时有

$$n|a_n x^{n-1}| \leqslant n|a_n|\cdot r_0^{n-1} = n|a_n|\cdot r^{n-1}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leqslant L_0\cdot n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}$$

$$(n=1,2,3,\cdots; \qquad L_0=\frac{L}{r}\text{为常数}),$$

如此級数(8)的各項对所指x值不超过控制級数

$$L_0+L_0\cdot 2\left(\frac{r_0}{r}\right)+L_0\cdot 3\left(\frac{r_0}{r}\right)^2+\cdots+L_0\cdot n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}+\cdots$$

的相应項，而这控制級数的收斂性是不难由达朗貝尔檢驗法来驗証的(注意$\frac{r_0}{r}<1$)。所以，在区間$[-r_0, r]$內由級数(1)各項导数所組成的級数(8)均匀收斂，并且按 270 段定理 5，級数(1)在整个区間$[-r_0, r]$內都可以逐項微分，特别是在点$x=x_0$。

附注　我們在 5° 及 6° 里証明了級数(7)及(8)在开区間$(-R, R)$內收斂，所以，它們的收斂半徑不小于R. 但，要知道，級数(1)又是由(7)的逐項微分及(8)的逐項积分得出的，如此R也不能小于所說的收斂半徑。把这些事实合起来可推知三个級数(1)，(7)，(8)的收斂半徑全都彼此相等。

例　为了指出定理 6° 的效用我們来看微分方程

$$xu''+u'+xu=0$$

(即数理物理及其应用中常遇到的所謂貝塞尔① 方程的一个最簡单的特例)。我們来找它的一个对所有x值都可展为級数的解u。

將所求函数的展开式写成带未定系数的級数的形式:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

并且把它看作到处收斂而进行两次逐項微分；如此得

① 弗列德利希·威廉·貝塞尔(F. W. Bessel 1784—1846)是德国天文学家。

$$xu=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}$$

$$u'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$xu''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}.$$

代入該方程式而得恒等式

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}+n^2\cdot a_n)x^{n-1}=0,$$

于是，按定理 3° 有

$$a_1=0,\quad n^2\cdot a_n+a_{n-2}=0\quad (n=2,3,\cdots).$$

由此，首先按数学归納法可知所有带奇数下标的系数 $a_{2m-1}=0\quad(m=1,2,3,\cdots)$；至于带偶数下标的系数 a_{2m} 則按遞归公式

$$a_{2m}=-\frac{1}{4m^2}a_{2m-2}$$

它們可用 a_0 表出：

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{1}{(m!)^2\cdot 2^{2m}}a_0.$$

如此，除去一个任意乘数 a_0 未定外，終于得出了級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(m!)^2\cdot 2^{2m}}.$$

不难直接驗証，这个級数实际上是到处收斂的。而由其得来的方法可明白，它所表的函数① 滿足該方程式。

讀者应注意，未定系数法的特殊的应用：在此系数有无限多个，并且必須利用冪級数恒等定理，而不是尋常所用的多項式恒等定理。

277. 冪級数作为戴劳級数 最后这个定理 6° 給出了冪級数重复逐次微分的可能性。如此，象从前一样以 $f(x)$ 表示在收斂区間内由級数(1)所代表的函数，我們在这区間内部到处有：

① 这是"零标貝塞尔函数"；表之以 $J_0(x)$。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$
$$f'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\cdots+n\cdot a_nx^{n-1}+\cdots$$
$$f''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\cdots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2}+\cdots$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+\cdots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-3}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot na_n+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如果在所有这些等式里令 $x=0$，則得出我們很熟悉的冪級数系数表示式：

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\quad\cdots$$
$$\cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots$$

[参閱 **252** 段，(7)]。如果对一般形式(2)的級数来說[**272** 段]，則这里的 $x=0$ 須代之以 $x=x_0$。如此：

7°. 在收斂区間內由一个冪級数所代表的函数在此区間內部具有各阶的导数。对这函数而言，該級数就是它的戴劳級数。

这个可注意的命題对我們理解前章所討論的問題有所帮助。我們看出，如果一个函数能够展为冪級数，則后者必然就是戴劳級数；所以我們只要研究函数能否表为其戴劳級数就行了。

278. 連續函数展为多項式級数 能展为冪級数的这一类函数是很有限的。前段定理 7° 告訴我們，一个在某区間內可展为冪級数的函数，一定要在此区間內具有各阶导数；并且这样严格的条件，如我們在第十五章 §6 所知[特別参閱 **259** 段]尙远不足保証展为冪級数的可能性。

对此極重要的是維尔斯脫拉斯(于 1885 年)所証明一个定理，它对任意的連續函数建立了展为由多項式組成的均勻收斂級数的可能性。我們以序列的語言陈述之如下：

維尔斯脫拉斯定理 如果一个函数 $f(x)$ 在有限閉区間 $[a, b]$ 内連續，則存在一个多項式序列 $\{P_n(x)\}$，它在这区間内均匀收斂于 $f(x)$。

我們先假設对区間 $[0, 1]$ 而言。于是滿足本定理要求的具体的多項式序列是：

$$B_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\cdot C_n^{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\text{①}. \tag{9}$$

证明这一点时我們需要一系列簡单的恒等式。首先是，在任何自然数 n 之下

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=1, \tag{10}$$

这可由 $(a+b)^n$ 的牛頓二項式展开公式立即得出，只要取 $a=x, b=1-x$。其次，

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu C_n^{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=nx. \tag{11}$$

事实上，舍弃相应于 $\nu=0$ 一項，其余每項都可写成

$$nx\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(\overline{n-1}-\overline{\nu-1}+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-1)}x^{\nu-1}(1-x)^{\overline{n-1}-\overline{\nu-1}}$$

或者，如果引入指数 $\mu=\nu-1$ 則成

$$nx\cdot C_{n-1}^{\mu} x^{\mu}(1-x)^{\overline{n-1}-\mu}.$$

将 nx 提出括弧外，則括弧内总和为

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} C_{n-1}^{\mu} x^{\mu}(1-x)^{\overline{n-1}-\mu},$$

由(10)它就等于 1。同样

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu-1) C_n^{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=n(n-1)x^2\cdot\sum_{\lambda=0}^{n-2} C_{n-2}^{\lambda} x^{\lambda}(1-x)^{\overline{n-2}-\lambda}=$$

$$=n(n-1)x^2. \tag{12}$$

最后，以 n^2x^2 乘(10)，以 $(2nx-1)$ 乘(11)而把这些恒等式与 (12) 逐項加起

① 在維尔斯脫拉斯定理的許多证明中我們轉載其最簡单的一个，它出于苏联科学院院士伯恩斯坦之手(С. Н. Бернштейн)。上面所写多項式 $B_n(x)$ (它不难依函数 $f(x)$ 在有理点 $\frac{\nu}{n}$ 上的值做出)称为函数 $f(x)$ 的"伯恩斯坦多項式"。

来。結果得恒等式

$$\sum_{\nu=0}^{n}[n^2x^2-(2nx-1)\nu+\nu(\nu-1)]\cdot C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}=$$

$$=n^2x^2-(2nx-1)nx+n(n-1)x^2$$

或者化簡后

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}=nx(1-x).$$

如果注意到对任何 x

$$x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\leqslant\frac{1}{4},$$

則得到一个不等式

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2\cdot C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}\leqslant\frac{n}{4},\tag{13}$$

这个結果我們就要用到。

在区間$[0,1]$里任意指定一个 x 值。由(10)可写

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}f(x)\cdot C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}.$$

由(9)逐項減此等式得

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left[f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right]\cdot C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}.\tag{14}$$

为了估計这个差数，我們来各別地看相应于接近 x 的点 $\frac{\nu}{n}$ 的各項及其余各項。說得明确点，对一个給定的数 $\varepsilon>0$——由于函数 $f(x)$ 的連續性从而(75段)它的均匀連續性——恒可找到这样一个只与 ε 有关的数 $\delta>0$，使

由 $|x''-x'|<\delta$ 即有 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ $(0\leqslant x',x''\leqslant1)$.

这里我們將(14)式中的和分为两个，$\sum_1$ 及 $\sum_2$；凡使 $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta$ 的各項归入第一个，凡使 $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geqslant\delta$ 的各項归入第二个。在第一种情形显然 $\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$ 并且[参閱(10)]

$$\left|\sum\nolimits_1\right|<\varepsilon\cdot\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta}C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{\nu=0}^{n}C_n^\nu x^\nu(1-x)^{n-\nu}=\varepsilon.$$

在第二情形則引入 $|f(x)|$ 的最大值M而得出估計:

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < 2M \cdot \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq\delta} C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

但这里$(\nu-nx)^2 \geq \delta^2 n^2$, 如此更应有

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \frac{2M}{\delta^2 n^2} \cdot \sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq\delta} (\nu-nx)^2 \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu-nx)^2 \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

最后,利用不等式(13)而得出

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

如果取 $n > \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon}$, 則(与 x 无关)有

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \varepsilon,$$

于是总起来

$$|B_n(x)-f(x)| < 2\varepsilon,$$

这就暫时对区間$[0, 1]$証明了我們所要求的結論。

至于任意区間 $[a, b]$ 的情形则可由这个簡单的变数替換化为所考慮过的情形: $x=a+y(b-a)$, 这里 $0 \leq y \leq 1$。按 y 的連續函数$f(a+y(b-a))$所做成的多項式 $B_n(y)$的序列对$[0, 1]$内的 y 均匀收斂于它。于是多項式 $P_n(x)=B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$的序列將对 $[a, b]$ 内的 x 均匀收斂于函数 $f(x)$。如此本定理得証。

按寻常方式由函数序列轉为函数級数 [参閱 263 及 264 段], 就可把維尔斯脫拉斯定理表为这样的形式:

每个在区間$[a, b]$内的連續函数 $f(x)$ 在此区間内可展为由多項式[①] 組成的均匀收斂級数

① 例如, 可令 $p_1(x)=P_1(x)$, $p_n(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x)$ $(n>1)$。

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x).$$

这类展开式在实际应用上固然比不上戴劳級数，但由于其高度一般性却有較大的理論意义。特别是，由此可推知，每个連續函数可由統一的"分析式"給出[18 段；参閱 21 段欧拉的观点]。

§4. 級数簡史

279. 牛頓及莱卜尼茲时期 与十七世紀建立微积分同时(第十四章)，无穷級数也进入了数学的实践。我們由 1668 年在英国出現的各式各样有关对数級数的論著談起。在这一年里发表了尼哥拉·麦卡多尔(1620—1687)一本小书"对数技术"，讲对数的計算法。在末后的一章里討論求双曲綫 $xy=1$，相对于漸近綫的面积的問題。他令 $x=1+a$，而把双曲綫方程写成

$$y=\frac{1}{1+a}.$$

麦卡多尔用除法将右端展为几何級数

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\cdots,$$

然后，依 a 逐項积分而得出双曲綫面积为已知的級数[256 段(21)]

$$a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots$$

关于这級数的适用范圍問題則未曾提及(在所附图上偶尔出现 $a>1$，而此时展开式事实上不适用!)。对这問題瓦里斯在其評論中有詳細的討論。最后，維里亚·勃朗克尔(1620—1684)以純几何方式导出特殊公式

$$\ln 2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

为了实际計算他采用收斂較快的級数，并且与几何級数作比較而找到了余項的界限。

牛頓开始从事无穷級数的研究比較早些，但他在这方面的研究与其他分析領域的研究交錯着进行，我們所知是耽擱了很久才发表的。这方面首先有他1676年給莱卜尼茲的信及其两种基本作品:“用无穷多項方程的分析”及“流数术及无穷級数”，这在第十四章已談到过。

看来至迟于1666年牛頓已經通曉分数或負数指数的二項式級数。最初他是用类比論証得出的；根式的展开則由乘方来驗証。后来他搬用当时已知的关于十进分数理論的原理而找到冪級数的直接除法及級数的开方法。牛頓将种种式子展为級数而将求它們流数及流量問題化为方冪的同样运算，并由此大大扩展了他所創立的分析的适用范圍。

牛頓常常采取級数的反轉，即由甲量依乙量方冪的展开式出发来建立乙量依甲量方冪的展开式。如此，由对数級数

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$$

出发他得出

$$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\cdots,$$

即实質上是指数級数(两边各加1則左边得$1+x$，其自然对数恰好等于z)。有趣的是，两弦x依弧z的展开式①

$$x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\cdots,$$

牛頓是由表出弧的級数

$$z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$$

① 圓的半徑取为1。

的逆轉来求的，即由反正弦的展开式来求的，后者在牛頓看来自然比較簡单，因为它可由容易展为二項式級数[275段，2)]的反正弦的流数 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 通过积分得出。

牛頓广泛用无穷級数来解代数方程以及微分方程。他所用的方法实質上是未定系数法。

牛頓在"分析"里叙述了关于用級数解方程的問題而証明了該級数即收斂于方程的根。但在另一些情形他預先将已知量展为級数而不考慮收斂性。可是，因为牛頓主要着重級数在近似計算中的用处，自然他們感覺兴趣的不在形式的确立級数收斂的事实，而需要它迅速的收斂。例如，牛頓不是用緩慢收斂級数

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

作 $\ln 2$ 的計算，而由公式 $\ln 2=2\ln 1.2-\ln 0.8-\ln 0.9$ 出发：真数1.2，0.8，0.9与1相差不大，这就保証了对数級数的迅速收斂。至于所产生的誤差的估計牛頓幷沒有給出。

萊卜尼茲独立地得出了牛頓早些时已知的某些展开式，1693年萊卜尼茲精确地提出了用未定系数法("假設所求級数如同已經找到")来积分微分方程。特别是，他由对数和正弦所滿足的微分方程出发，以这种方法重新得出了这两个函数的展开式。

1682年萊卜尼茲最先发表了表示 $\frac{\pi}{4}$ 的級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

这級数萊卜尼茲是早已知道的[①]。萊卜尼茲順便給出了以該級数的一节替代 $\frac{\pi}{4}$ 时誤差的估計。这些指示后来他推广到各項絕对値遞減为0的任何交錯級数的情形(例如，在1714年給約翰·貝努里

① 但看来英国人杰姆斯·格累戈里(James Gregory 1638—1675)还要早些，他于1671年在信里报导了反正切級数。

的信里)。但是，在此和的存在被看作不言而喻的，实际上只是确立了它可由部分和从两边交錯地无限接近而已[参閱 244 段附注]。

萊卜尼茲在較晚的信札里說到"收斂"于其和的級数，收斂性的理解和我們一样，但同时他又認为級数 $1-1+1-1+\cdots$ 有总和 $\frac{1}{2}$；这是由展开式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

取 $x=1$ 时得出的：如果它在 $x<1$ 时正确，則按"連續律"在 $x=1$ 时也該正确！看来萊卜尼茲自己也感到缺乏明确性；难怪他在一封信里說："…关于无穷級数的論証应該只在眞理能按阿几默德方法用有限(数量)来証明时才可相信"。

搞无穷級数的有萊卜尼茲的两位同道——貝努里兄弟——尤其是哥哥雅谷：他的关于級数的作品(1689—1704)合起来看，可說是叙述了当时这方面所知的一切。特别是，約翰在前，雅谷在后，两人都証明了"无穷調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之和是无限的"。雅谷·貝努里的証明所根据的原理与寻常一样[236 段，1)]。他在結論中正确地强調："末項消逝的无穷級数之和有时有限而有时无限"。当然，这里"末項"应解釋为公項的极限。要注意的是，雅谷·貝努里随便利用了发散級数甚至借此出收斂的展开式。

280. 級数理論的形式发展时期 在十八世紀原則性的問題沒有引起多大的注意，但級数的实际知識却达到頗高的发展水平——主要是出于欧拉之手。

在該世紀之初，1715年，出版了一本不大的书；戴劳的"正逆差分法"。但此书由于叙述不清楚而未能立即广泛流傳。戴劳由考

虑有限差出发，然后渡向无穷小差及其比作为极限情形，如此建立起 z 的函数 x 的增大值依变量 z 的增值 v 的方幂的展开式:

$$x+\frac{v}{1}\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots;$$

这个展开式后来被称为戴劳級数。作者自己看来沒有完全估計到他的发現的价值: 在书中它很少应用之处。

这公式的意义在 1742 出版的麦克洛林巨著"流数論"里才被显露出来。麦克洛林循别的途徑得到同样級数: 他依据带未定系数的依 x 方幂的展开式，重复微分之并每次令 $z=0$, 逐一定出系数[参閱 **277** 段, 7°]。他得出二項式級数作为一个例子。在推导其他簡单函数时，麦克洛林也利用了它們所滿足的微分方程。

在該論著里我們还遇到两件値得一提的事情。第一是，麦克洛林明白地建立了——固然只是以几何的方式建立的——正項級数的收斂性及发散性的积分檢驗法[后来哥西重新以分析方式証明; 参閱 **241** 段]。然后他推出了一个以积分来計算級数和的著名公式①(与欧拉不謀而合，后者几年前也得出了这个公式)。

由 1730 年起欧拉开始了一系列关于无穷級数的輝煌工作。关于級数他写了許多篇論文，在大半世紀的期間內陆續发表于彼得堡科学院汇报; 在欧拉著名的分析論著中級数也占很多位置。我們来簡略列举一下欧拉的成就，在此不遵循年代的次序。

欧拉最先用隱約的极限过程由二項式級数[参閱 **268** 段]出发推出了指数級数及对数級数。用同样方法他由 $\cos nz$ 及 $\sin nz$ 的已知公式得出余弦及正弦的級数。他将无穷幂級数与寻常多項式比拟而将它分解成因子，如此將正弦及其他函数表为无穷积的形式。将熟悉的有相同首項的二項式相乘法則推广到无穷多个的情

① 称为欧拉-麦克洛林公式。可惜在我們这教本中不能講它。

形，他得出了値得注意的公式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},\qquad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

及其他类似的公式。$\frac{1}{\sin z}$及 $\operatorname{ctg} z$ 的簡単分式展开式也属于欧拉[参閱下面 406 段附注]。

欧拉也討論了复数項的級数；由 $\sin x$, $\cos x$ 及 e^x 的級数的比較他导出了連系这些函数的著名公式[254 段]—— 当时拉格朗日称之为“本世紀最美妙的分析发明之一”。

欧拉对級数求和也搞得很多，已經說过，他在麦克洛林以前就得出著名的求和公式并且屢次反复应用。特别是，他曾用之于調和級数的部分和[参閱 236 段 1)及 238 段 4)]。欧拉以种种方式将級数与积分結合起来，如此他找到了并研究了一些重要的积分，这些积分后来即以他命名[第十八章 § 4 要講它們]。

欧拉还有一点与麦克洛林契合的地方：麦克洛林得出其积分檢驗法的那种想法，欧拉早已用来确定級数和的上下界。

欧拉所感兴趣的其他問題中，我提一提关于为了改善收斂性的級数变换，关于将无穷乘积化为級数的变换[例如参閱 251 段，3)]。最后，特别要指出的是，欧拉不但将級数以种种方式应用于分析本身，也应用于代数，数論及其他方面。

但是所有这些正确的卓越成就在欧拉当时还沒有多少可靠的根据。也如它的大多数同时代数学家一样，欧拉对收斂性問題是不关心的，并且随便利用发散級数。例如，将展开式

$$\frac{n}{1-n}=n+n^2+n^3+\cdots \quad 与 \quad \frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

加起来他說下面这个两头无穷的級数

$$\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\cdots ①$$

① 讀者当然可看出，这里完全沒有能使两級数同时收斂的 n 值。

等于0。同样，由等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

出发，欧拉不但由此推出在 $x=-1$ 时这个萊卜尼茲搞过的級数

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},$$

并且还試图使

$$1+2+4+8+\cdots=-1$$

这一在 $x=2$ 时得出的等式有意义。但是，欧拉自己給一个解答說，对于这类发散級数，不能按照象收斂級数那样的意义来理解其和，——不能要求它各項陸續相加时可任意接近其和。欧拉認为"有些无穷級数之和乃是这样一个有限表出式，将它展开时就产生了該級数"①。在这种級数和的"广义"理解法里已經有了真理的胚胎(而它正与晚近严密奠立起来的发散級数理論相契合)。

达朗貝尔尖銳地反对利用发散級数：在他看来，用发散級数的論証即使結果与真理符合也是"可疑的"。但是，在达朗貝尔收斂性与发散性概念本身都有"局部性"，因为它們要看下一項絕对值是否小于前一項而定。如此，按他的說法，一个級数可以收斂到某一地方然后开始发散，反过来也行[参閱 **239** 段附注]。

最后来談談拉格朗日——这时期的最偉大数学家之一。首先应提一提挂着他的名字的那种級数，它給出方程式 $a-x+\varphi(x)=0$ 的根 $x=p$ 的展开式，甚至此根的任何函数 $\psi(p)$ 的展开式。

在其"解析函数論"(1797)这一著作里拉格朗日試图使微分学解脫"无穷小或消逝量，极限或流数的考慮"而化为"有限量的代数分析"②。在这尝試中即以幂級数为出发点。設对函数 $f(x)$ 成立

① 参閱欧拉"微分学"，§ 111。

② 但是，同样这些觀念拉格朗日早先已說过。

展开式。

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots,$$

这里 $p, q, r, \cdots$ 是 x 的函数，拉格朗日由通常关系式

$$p=f'(x), q=\frac{f''(x)}{2}, r=\frac{f'''(x)}{2\cdot3}, \cdots$$

出发，直接以展开式系数来界定逐次"导函数"(这里最先出现这个名称!)。在这基础上拉格朗日不但講了分析，也講了它在几何及力学上的应用。但这种观点未获流傳。它——恰恰处在分析史新时期的开端——是所有严密奠基的尝試都失败后的一种反应。

在拉格朗日同一著作里也建立了戴劳公式中余項的一个著名的便利形式。但是，对于拉格朗日級数的收斂性是默認的，而这一形式不过是級数余項的一种表出式，其用处只是便于估計由省略級数后面諸項所生的誤差而已。

級数的收斂性拉格朗日(也和欧拉及其他同时代的人一样)理解为公項趋于0。收斂級数和他沒有給出定义，虽然它已屡次以与我們現在差不多的形式出現过，例如在麦克洛林(1742)及瓦灵(1776)的著作里。十九世紀初法国数学家傅立叶在其名著"热的分析理論"(1811年完成1822年出版)里給出了級数收斂性及其和的正确定义，在此已注意到級数各項不断減为0对于收斂性是完全不充分的。我們已提过，这一情况在此以前一百多年雅谷·貝努里就已强調指出过——以調和級数为例。

如此，这个时期虽在級数論中有很丰富的成就，而在其邏輯奠基方面則貢献很少。

281. 严密理論的建立 到下一时期——十九世紀——級数才成为一个独立的研究科目，并且分析基础的批判檢查在初期就已接触到它們。

在1813年刊出了高斯[1]的論著"关于级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

的一般研究"。(这級数得到"超几何級数"之称。)虽然在收斂性及发散性的理解上高斯与达朗貝尔接近，但我們在此仍然是最早看到一个严密陈述出来的檢驗法，它对上面那种級数完全解决了收斂性問題。

以极限概念为基础的級数和及收斂性或发散性的現代定义終于在波尔察諾(1817年)及哥西(1821年)的著作之后建立起来。哥西在"代数分析"序里干脆說："发散級数沒有和"。此外，这两位学者都以一般形式建立了級数收斂性的必要而充分的条件[242段]。哥西还給出了几个簡单而便利的充分檢驗法以驗証正項級数的收斂性或发散性[239, 241段]。后来还出現了大量这类充分檢驗法，越来越精細，越来越复杂[2]；这种研究的兴趣到本世紀初才有些减弱。

其次，属于哥西的还有关于由級数$\Sigma|a_n|$的收斂性推出級数Σa_n的收斂性的論断及"絕对"与"非絕对"收斂性的区别(虽然沒有用这些名詞)。非絕对收斂級数存在的例子

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

由萊卜尼兹及貝努里兄弟的时候就已知道，但哥西最先注意到非絕对收斂性反映在别的級数的性質上。首先是，如哥西在1821年已指出，对非絕对收斂級数他的級数乘法定理可以不适用[248段，3)]。然后，恰恰关于上面所举的級数，哥西(在1833年)指出了，

---

① 卡尔·弗利德利赫·高斯(Karl Friedrich Gauss 1777—1855)是德国数学家。

② 俄罗斯数学家中搞这問題的有罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский)及叶尔馬可夫(В. П. Ермаков 1845—1922)。

它的收斂性可在各項調动位置时失去。

在 1837 年狄利希萊指出了一个一般的結果：絕对收斂級数調动各項位置时收斂性及和仍保持不变 [**246** 段]。同时他还举例指出，在非絕对收斂的情形由于項的調动不但收斂性可能破坏，并且即使收斂性保持时和的值也可改变。在这方向最徹底的一般結果是黎曼所建立的[**247** 段]；它在 1867 年才发表出来，已是他死后之事了。

在哥西 (1821 年) 的“代数分析”里我們可找到关于实变及复变情形的冪級数的研究。他不仅建立了这类級数的收斂区域的形式(收斂区間或收斂圓)，并且还以級数的系数精确地表出收斂半徑。在收斂区域內部哥西把冪級数看作同多項式一样，例如把它逐項微分而未覺察这还需要給出根据。

关于一般函数級数哥西試图証明收斂的連續函数級数和的連續性(1821 年)及这种級数的可以逐項积分，而对級数收斂性的性質未加任何限制[参閱 **266** 及 **269** 段]：均勻收斂概念哥西还不知道，并且利用无穷小語言而有时不問它們事实上依凭什么变数。

亚培尔指出了哥西第一个論断的錯誤——是在他关于二項式級数的著名論文里指出的。作为一个反証的例子亚培尔举出下面由正弦組成的級数：

$$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots;$$

虽然它对一切实数值都收斂，但其和在点 $x=(2m+1)\pi$ (m 为整数)不連續。同时关于冪級数亚培尔严密証明了在使級数收斂的每一变数值之下級数和的連續性，連此值为收斂区間端点时也計算在內[**273, 274** 段]。在亚培尔的証明过程中事实上已建立了后来称为均勻收斂的那种性質的存在。

关于逐項积分契貝謝夫(在 1845 年)表示他的怀疑，他强調指

出，这样积分法"只在特殊的情形"可以容許。如此逐步地建立起这种信念：对有限和所通行的法則不能无条件地推广到无穷函数級数上去，虽然还不清楚究竟在什么情形才可以这样做。这里函数級数收斂性的性质的研究及均匀收斂概念的引入起了决定性的作用。

这个概念及名称看来最早是在1841年出現于維尔斯脫拉斯的一种作品里(很晚才出版)并且从此被他在讲义中应用着。蔡德尔[①]及斯托克斯[②]于1848年刊出了均匀收斂性与非均匀收斂性区别。如果連續函数級数和有不連續点，則在它近处"級数任意緩慢地收斂"(蔡德尔)或"变成无穷地延緩"(斯托克斯)。

在此斯托克斯推想，反过来由这种級数和的連續性可推断延緩性的不存在，即我們所說均匀收斂性的存在。蔡德尔則认为这还成問題。后来举例指明了这反面的結論一般是不正确的，地尼于1876年证明了这只特别对正項級数的情形是正确的[**267**段]。

历史談到这里結束。第二十四章末尾的"三角級数史略"可作补充[也可參閱**313**段"关于两个极限运算的調换史話"]。

① 費利浦·魯特維·蔡德尔(1821—1896)是德国数学家。

② 乔治·加布利尔·斯托克斯(1819—1903)是英国物理学家兼数学家。

第十七章 非正常积分

§1. 带无限积分限的非正常积分

282. 带无限积分限的积分定义 在十一章曾对有限区間$[a, b]$及有界函数$f(x)$的情形講过定积分$\int_a^b f(x)dx$的概念。本章要講这个概念在各个方向的推广。我們先来考慮推广到无限区間内的积分。

設函数$f(x)$在区間$[a, \infty]$内，也即对$x \geqslant a$，有定义，并且在其任何有限部分$[a, A]$内可积分，如此积分$\int_a^A f(x)dx$在任何$A>a$之下有意义。

这个积分在$A \to \infty$时的有限或无限极限叫做函数$f(x)$在区間a至∞内的(非正常)积分并用下面的記号表示之：

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

在这种有限极限存在时我們說积分(1)收斂，而函数$f(x)$称为在无限区間$[a, \infty]$内可积分的。为了与早先所講的正常意义的积分或正常积分表示区别，刚才下定义的积分(1)叫做非正常积分[①]。

如果极限(1)无限或根本不存在，則說該积分发散。

与(1)相似，函数$f(x)$由$-\infty$至a的积分可这样下定义：

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \, (A'<a), \tag{2}$$

① 記得我們在241段已碰到过非正常积分的概念。

同样，函数 $f(x)$ 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分可这样下定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx. \tag{3}$$

在此对积分(1)所导入的术語同样适用。

在最后这个情形，如取任意一数 a，可令

$$\int_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int_{A'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{A} f(x)\,dx,$$

并且对左边的积分 $A'\to-\infty$，$A\to+\infty$ 时极限的存在显然就等价于对右边的积分极限(1)及(2)分别存在。如此，由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分也可以用等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

来下定义，假設右边的积分分别存在的話①。这个定义事实上与点 a 的选擇无关。

例 1）函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在任何有限区間 $[0, A]$ $(A>0)$ 內可积而我們有

$$\int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} A.$$

因为这个积分在 $A\to\infty$ 时有一个有限极限 $\frac{\pi}{2}$，則由 0 至 ∞ 此积分收斂而有值

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} = \frac{\pi}{2}.$$

2） $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} (-\operatorname{arctg} A') = \frac{\pi}{2}.$$

① 只有这两个积分等于不同号无穷大的情形是例外。

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{0}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{0}=\pi.$

283. 积分学基本公式的应用 在上面所举的例子里我們先用原函数在有限区間内算出了积分，然后再取极限。这两个步驟可合并成为一个公式。

例如，設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, \infty]$ 內有定义并且連續，如此 $f(x)$ 在此区間內有原函数 $F(x)$（183 段），而按积分学基本公式（185 段）有

$$\int_a^A f(x)dx=F(A)-F(a)=F(x)\Big|_a^A.$$

由此显然非正常积分(1)的存在就等价于有限极限

$$\lim_{A\to\infty}F(A)=F(\infty)$$

的存在，于是

$$\int_a^\infty f(x)dx=F(\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^\infty.$$

同样

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{a},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

在此 $F(-\infty)$ 理解为 $\lim\limits_{A'\to-\infty}F(A')$。双重置换只有在其中的极限都存在且有限时才可能，可見这本身就已保証了該积分的存在。

現在再举几个例。

4) 我們首先来討論这个問題：在什么指数值 λ 之下存在非正常积分

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\lambda}\qquad(a>0).$$

設 $\lambda \neq 1$，于是

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^{\infty}.$$

在 $\lambda>1$ 时双重置换連带該积分都有一个有限的值，在 $\lambda<1$ 时則两式变成 ∞。在 $\lambda=1$ 时我們有

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{\infty} = \infty.$$

如此，該积分在 $\lambda>1$ 时收斂，而在 $\lambda\leqslant 1$ 时发散。

5）試看积分 $(a>0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx.$$

回忆其相应原函数［164 段，4)］立即得出

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

6）最后，积分

$$\int_0^{\infty} \sin x dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x dx$$

不存在，因为双重置换

$$-\cos x \Big|_0^{\infty}, \qquad \sin x \Big|_0^{\infty}$$

失去意义：$\cos x$ 及 $\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时沒有极限。

284. 与級数的相似性。簡单定理 以下我們将只限于討論(1)型的积分：所有对它們說的話全都不难搬到(2)与(3)的情形上去。在此我們总是假設，函数 $f(x)$ 是在任意界限 a 与 $A>a$ 之間常义可积分的，如此問題只在由 a 至 ∞ 的非正常积分。

在非正常积分$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$与数項級数$\sum_1^{\infty} a_n$之間存在深刻的相似性，这一点值得予以强調。

如果将依n的求和过程換成依x的积分过程，则表現出如下的相似性：

級数公項	被积函数
a_n	$f(x)$
級数部分和	正常积分
$\sum_1^N a_n$	$\int_a^A f(x)\,dx$
級数之和	非正常积分
$\sum_1^{\infty} a_n$	$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$
作为部分和在$N\to\infty$时的极限	作为前一积分在$A\to\infty$时的极限
級数余項	积分
$\sum_{N+1}^{\infty} a_n$	$\int_A^{\infty} f(x)\,dx$

我們来列举一些关于非正常积分的簡单定理，它們与235段那些关于級数的定理是相似的。其証明(可利用上述相似性)留給讀者去做。

1°. 如果积分$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$收斂，則积分$\int_A^{\infty} f(x)\,dx\ (A>a)$也收斂，其逆也眞。此时有

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\int_a^A f(x)\,dx+\int_A^{\infty} f(x)\,dx.$$

2°. 在积分$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$收斂的情形我們有

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^{\infty} f(x)\,dx=0.$$

3°. 若积分$\int_a^{\infty} f(x)dx$收敛，则积分$\int_a^{\infty} cf(x)dx$（c 为常数）也收敛，并且

$$\int_a^{\infty} cf(x)\,dx=c\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

最后：

4°. 如果积分$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 及 $\int_a^{\infty} g(x)dx$ 收敛，则积分$\int_a^{\infty}[f(x)\pm\pm g(x)]dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{\infty}[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^{\infty} f(x)\,dx\pm\int_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

285. 正函数情形的积分收敛性 如果函数 $f(x)$ 是正的（非负），则积分

$$\Phi(A)=\int_a^{A} f(x)\,dx \tag{4}$$

为变数A的单调递增函数。它在 $A\to\infty$时的有限极限存在问题很容易解决——根据单调函数极限定理（**47** 段）：

要非正常积分(1)——在函数$f(x)$是正的情形——收敛其必要而充分的条件是要积分(4)在A增大时保持上有界：

$$\int_a^{A} f(x)\,dx\leqslant L \quad (L\text{ 为常数}).$$

如其这条件不满足，则积分(1)有值∞〔参阅 **236** 段〕。

根据这定理可推出下面的正函数积分"比较定理"：

定理 1. 如果当 $x\geqslant A(A\geqslant a)$时成立不等式 $f(x)\leqslant g(x)$，则

由积分$\int_a^\infty g(x)dx$的收斂性可推知积分$\int_a^\infty f(x)dx$的收斂性也就是由$\int_a^\infty f(x)dx$的发散性可推知$\int_a^\infty g(x)dx$的发散性。

証明可仿照 **237** 段定理 **1**。

常常会用到下面这个定理，它是第一定理的推論：

定理 2. 如果存在极限

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{g(x)}=K \quad (0\leqslant K\leqslant+\infty),$$

则在 $K<+\infty$ 时由积分$\int_a^\infty g(x)dx$的收斂性可推知积分$\int_a^\infty f(x)dx$的收斂性，而在 $K>0$ 时由第一个积分的发散性可推知第二积分的发散性。

［如此，在 $0<K<+\infty$ 时两积分同时收斂或发散。］

証明 也与 **237** 段那相似的定理 2 一样。

选取具体的函数作比較，可由此得出积分$\int_a^\infty f(x)dx$收斂性或发散性的特殊檢驗法。有实际意义的是与函数$\frac{1}{x^\lambda}$作比較，后者在 $\lambda>1$ 时由 a 至∞可积而在 $\lambda\leqslant1$ 时则不可积［**283** 段，4)］。根据它可构成下列檢驗法。

設对充分大的 x 函数 $f(x)$ 有这样形状：

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda>0).$$

于是有：1） 如果 $\lambda>1$ 并且 $\varphi(x)\leqslant c<+\infty$，则积分$\int_a^\infty f(x)dx$收斂，2） 如果 $\lambda\leqslant1$ 并且 $\varphi(x)\geqslant c>0$，则积分发散。

証明要用到定理 1；比較函数是$\frac{c}{x^\lambda}$［**284** 段，3°］。

如果在 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 是 $\lambda>0$ 阶无穷小(与$\frac{1}{x}$比較)，则积分$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$收斂或发散就取决于 $\lambda>1$ 或 $\leqslant 1$。

这里要引用定理 2; 函数 $g(x)$ 就是$\frac{1}{x^\lambda}$。

例

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx,\quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

被积式在 $x\to\infty$ 时是无穷小，各为$\frac{1}{2}$阶及 2 阶。所以，第一个积分发散而第二个收斂。

286. 一般情形的积分收斂性 $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$收斂性問題按一般定义 (1) 非正常积分无非是 A 的函数 (4) 在 $A\to\infty$ 时有限极限的存在問題。应用波尔察諾-哥西定理 [53 段]于这个函数上就可将非正常积分收斂性条件表为如下形式:

要非正常积分$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$收斂，其必要而充分的条件是要对每个数 $\varepsilon>0$ 恒有这样一个数 $A_0>a$ 与之相应，使在 $A>A_0$ 并且 $A'>A$ 时成立不等式

$$|\Phi(A')-\Phi(A)|=\left|\int\limits_a^{A'} f(x)\,dx-\int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right|=\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

由这个准則很容易建立下列命題:

如果积分$\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$收斂，则积分$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$收斂更不待言。

事实上，应用所講的准則到积分$\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$上 (这积分我們假設是收斂的)，则我們知道，对任何 $\varepsilon>0$，恒可找到这样的 $A_0>a$,

使

$$\int_A^{A'} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

只要 $A' > A > A_0$。但显然

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^{A'} |f(x)|\,dx,$$

所以对同样 A, A' 更应成立不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

由此，按我們的准則推知积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收斂。

注意由后面的积分一般說来却并不能推出积分 $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ 的收斂性。根据这情况我們特别区分出下面的情形。如果积分 $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ 与积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 同时收斂，則积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 叫做**絕对收斂**的，而函数 $f(x)$ 叫做在区間 $[a, \infty]$ 內**絕对可积分的**[①]，非絕对收斂的例子，将在 287 段給出。

由所証明的定理可以建立变号函数 $f(x)$ 的积分的收斂性，这只要应用前段的檢驗法于正函数 $|f(x)|$：如果这个函数判明可积分，則函数 $f(x)$ 也可积分并且是絕对可积分。

例如，設有积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx$。因为

$$\left|\frac{\cos ax}{k^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2+x^2},$$

---

① 又是与无穷級数相似[参閱 243 段]。

而右边的函数的积分收斂，故[285段，定理1]左边的函数的积分也收斂，从而所設积分也就(絕对)收斂。

显然，这里对变号函数所講的办法——在順利的情形下——只能推出絕对收斂性来。如果所給的函数的积分发散或收斂而不絕对收斂，則要用对正函数所建立的檢驗法来判别这些情形是不行的。

287. 更精致的檢驗法 我們現在来講另一类型的檢驗法，它們可以确定許多非絕对收斂的非正常积分的收斂性。

設我們有两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$，在区間$[a,\infty)$內有定义并且連續；对函数 $g(x)$ 我們还假設其为单調的并且有連續导函数（显然，不变号）。我們关心的是保証乘积的积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \tag{5}$$

收斂的条件。

我們假設

(I) 1) 积分(4)

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)dx$$

是 A 的有界函数：

$$|\Phi(A)|\leqslant K \quad (K\text{为常数，}a\leqslant A<\infty)$$

（不过极限 $\lim\limits_{A\to\infty}\Phi(A)$，即非正常积分$\int_a^\infty f(x)dx$，也可不存在）；

2) $x\to\infty$ 时 $g(x)\to 0$。

于是积分(5)收斂。

对任意的 $A'>A>a$，我們分部积分而有：

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx=\Phi(A')g(A')-\Phi(A)g(A)-\int_A^{A'}\Phi(x)g'(x)dx;$$

如果对最后一积分应用广义中值定理[182段，10°]，則它可表为这样形状：

$$\int_A^{A'}\Phi(x)g'(x)dx=\Phi(\xi)\int_A^{A'}g'(x)dx=\Phi(\xi)[g(A')-g(A)]\quad(A\leqslant\xi\leqslant A')$$

而最后有

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx=[\Phi(A')-\Phi(\xi)]g(A')+[\Phi(\xi)-\Phi(A)]g(A). \qquad (6)$$

因由 1) 知两个括号絕对値不超过 $2K$，而由 2) 可找到这样一个 A_0，使在 $x>A_0$ 时

$$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4K}$$

(这里 $\varepsilon>0$ 是預先任意取定的)，則在 $A'>A>A_0$ 时

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|<\varepsilon,$$

由此推知积分(5)收斂[286 段]。

上述条件也可换成另外一套，对函数 f 的要求增强而对 g 所設的条件則減弱。即現在設

(Ⅱ) 1′) 存在非正常积分

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\Phi(A);$$

2′) 函数 $g(x)$ 有界：

$$|g(x)|\leq L \quad (L \text{ 是常数；} a\leq x<\infty)。$$

在这些条件之下积分(5)也收斂。

这回在(6)中第二因子有界而第一因子——取 A 和 A' 充分大——可以使其任意小，如此得出同样結果。

現在来看几个例。

积分

$$\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx, \quad \int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\lambda}}dx$$

($a>0$ 及 $\lambda>0$ 时) 按檢驗法 (Ⅰ) 收斂。現在可以各取 $\sin x$ 或 $\cos x$ 作函数 $f(x)$，因为

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right|=|\cos a-\cos A|\leq 2, \quad \left|\int_a^A \cos x dx\right|\leq 2,$$

虽然在无限区間內这些函数并不可积分[283 段, 6)]；$g(x)$ 則取 $\frac{1}{x^{\lambda}}$。

在 $\lambda>1$ 时这些积分是絕对收斂的，因为积分

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$$

收斂[283 段, 4)]; 而 $|\sin x|$ 和 $|\cos x| \leq 1$。反之, 在 $\lambda \leq 1$ 时两个积分都非絕对收斂。要証明这一点, 如对积分

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

来說只須确定积分

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

发散。事实上, 如果这积分收斂, 則由于不等式

$$|\sin x| \geq \sin^2 x$$

积分

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx$$

也就更不成問題是收斂的[285 段, 定理1];
加上明显收斂的积分

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

我們將得出这样的結論: 积分

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

收斂, 而事实上不然[283 段, 4)]。

附注 現在, 当我們确定积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ 及 } \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

收斂性后, 我們終于可以把第一卷第二分册中(339 頁)所講过的非初等函数 $\operatorname{si} x$("积分正弦")及 $\operatorname{ci} x$("积分余弦")的定义予以精确化。即設

$$\operatorname{si} x = -\int_{\substack{x \\ (x \geq 0)}}^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad \operatorname{ci} x = -\int_{\substack{x \\ (x > 0)}}^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

如果，比方說，把第二公式写成这样：

$$\operatorname{ci} x=\int_{1}^{x}\frac{\cos t}{t}dt-\int_{1}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt,$$

則按定积分的一个已知性质［183 段，12°］显然，$\operatorname{ci} x$ 的导函数事实上等于 $\frac{\cos x}{x}$。

§2. 无界函数的非正常积分

288. 无界函数积分定义 現在我們来考慮一个函数 $f(x)$，給定在区間 $[a, b]$ 內而在此区間內不可积分。我們更确定地假設，它在任一区間 $[a, b-\eta]$ $(0<\eta<b-a)$ 內可积分而在每个 b 点之左的区間 $[b-\eta, b]$ 內就不可积分了。这时点 b 称为奇点。

可以指出，此时在点 b 附近函数 $f(x)$ 必須是无界的，而正是因此它在 b 附近不可积分。函数 $f(x)$ 在点 b 寻常是"成为无穷"的(記住这只理解为在 $x\to b$ 时函数趋于无穷)。

积分 $\int_{a}^{b-\eta}f(x)dx$ 在 $\eta\to 0$ 时的有限或无限极限叫做函数 $f(x)$ 在 a 至 b 区間內的(非正常)积分并表示成

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_{a}^{b-\eta}f(x)dx. \tag{1}$$

在这种有限极限存在的情形我們說，积分 (1) 收斂，而函数 $f(x)$ 称为在区間 $[a, b]$ 內可积分的。在相反的情形就說該积分是发散的。

例 1) 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在任一区間 $[0, 1-\eta]$ $(0<\eta<1)$ 內有界并且可积分，而

$$\int_{0}^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\eta).$$

在点 $x=1$ 該函数成为无窮。显然，点 $x=1$ 就是奇点。

因为所算出的积分在 $\eta\to 0$ 时趋于极限 $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$，故存在非正常积分

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}=\frac{\pi}{2}.$$

現在設函数 $f(x)$ 在任一区間 $[a+\eta', b]$ $(0<\eta'<b-a)$ 內有界并且可积分，但在点 a（奇点）右边每个区間 $[a, a+\eta']$ 內它就变成不可积分了。于是函数 $f(x)$ 由 a 至 b 的（非正常）积分就以下面的等式来下定义：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

如果两点 a 和 b 都成奇点，则 a 至 b 的积分就以下面的等式作它的定义：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_{a+\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)\,dx. \tag{3}$$

定义(3)可換成为

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

假設的是 $a<c<b$ 而右边两个非正常积分存在（此时 c 点的选擇法沒有关系）[①]。

关于非正常积分(2)和(3)仍保持以前的术語。

例

2) $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，奇点为 -1，

① 参閱 111 頁底注。

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}\int_{-1+\eta'}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}[-\arcsin(-1+\eta')]=\frac{\pi}{2};$$

3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 两个奇点 -1 及 1,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}=\pi.$$

不难理解,在具有任何(有限)多个奇点时非正常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 应如何下定义。

最后,我們来考慮一个函数 $f(x)$,給定在无限区間內,比方說 $[a,\infty]$ 内,而在其中有有限多个奇点①,在其附近它不再可积分。設在每个有限区間 $[a,A]$ 内积分 $\int_a^A f(x)\,dx$ 存在,它可以是正常的,也可以是——按照上面所給定义——非正常的。于是,再一次取 $A\to\infty$ 时的极限可以用等式(1)[282 段]来下区間 $[a,\infty]$ 内的非正常积分的定义。

289. 积分学基本公式的应用 設函数 $f(x)$ 在区間 $[a,b)$ 内有定义并且連續,同时 b 是其奇点。对 $f(x)$ 在区間 $[a,b)$ 存在一原函数 $F(x)$,而

$$\int_a^{b-\eta}f(x)\,dx=F(b-\eta)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-\eta}$$

如此非正常积分(1)的收斂性就等价于有限极限 $\lim\limits_{\eta\to 0}F(b-\eta)$ 的存在。如果后者存在,則它自然可取作原函数在 $x=b$ 时的值 $F(b)$,由此 $F(x)$ 在全区間 $[a,b]$ 内都成了連續的。于是我們有了这寻常形式的公式来計算积分(1):

① 奇点可以无穷多,但在每个有限区間 $[a,A]$ $(A>a)$ 内只有有限多个(可以隨 A 增至无穷)。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{4}$$

同一公式在奇点位于区間內部或有若干个奇点时也仍成立，但須牢記，这有一定的条件：原函数 $F(x)$ 不但要除了在奇点上外到处有 $f(x)$ 为其导数，并且还要 $F(x)$ 在这些奇点上仍然連續。这种原函数的存在就保証了非正常积分的收斂性。如果原函数在区間端点上或內部成为无穷，則該积分发散。

現在来看几个例子。

4) 我們来討論在什么指数值 $\lambda>0$ 之下非正常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad (b>a)$$

收斂。

設 $\lambda\neq 1$，我們有

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda}\Big|_a^b;$$

如此該积分在 $\lambda<1$ 时收斂而在 $\lambda>1$ 时发散：原函数在端点 $x=a$ 上成为无穷。按同样理由該积分在 $\lambda=1$ 时也发散：

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a)\Big|_a^b.$$

5) 同样的結果可以对这个积分建立：

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (b>a,\ \lambda>0),$$

它与前例无本質差异。

6) 对积分 $\int_0^1 \ln x dx$；奇点为 $x=0$。我們有

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x - x\Big|_0^1 = -1,$$

因为在 $x\to 0$ 原函数有极限值 0。

290. 积分收斂性条件及檢驗法 我們只詳論与定义(1)有关的情形，因其他情形几可照抄而无困难。由于它与无限区間$[a, \infty]$的非正常积分完全相似，我們不再列举其簡單定理[参閱284段]，而只陈述一些关于积分存在問題的基本命題，——其証明則与上面的相似。在所有的情形，都假定所考慮的函数在任一区間$[a, b-\eta]$ $(\eta>0)$内依正常的意义可积分，而$x=b$是惟一奇点。

如285段一样：

要非正常积分(1)在函数$f(x)$为正的情形收斂，其必要而充分的条件是要积分$\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ $(\eta>0)$保持上有界：

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx \leqslant L \quad (L\text{ 为常数}).$$

如果这个条件不成立，則积分(1)有值$+\infty$.

285段关于正函数的几个比較定理在此也成立。我們不再重述，但陈述建立在它們上面的檢驗法。

設对充分接近于b的x值函数$f(x)$有这样的形狀：

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\lambda}} \qquad (\lambda>0).$$

于是：1)如果$\lambda<1$并且$\varphi(x)\leqslant c<\infty$，則积分$\int_a^b f(x)dx$收斂。2)如果$\lambda\geqslant 1$而$\varphi(x)\geqslant c>0$，則此积分发散。

便于实用的較特殊形式是：

如果$x\to b$时函数$f(x)$是$\lambda>0$阶无穷大(与$\frac{1}{b-x}$比較)，則积分$\int_a^b f(x)\,dx$收斂或发散依$\lambda<1$或$\lambda\geqslant 1$为轉移。

例

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

被积函数在 $x\to 1$ 时成为$\frac{1}{4}$阶无穷大:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad 若 x\to 1.$$

所以該积分收斂。

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx \quad (p\neq 0)$.

若 $p>0$, 則奇点为$\frac{\pi}{2}$, 而 $p<0$ 时奇点为 0。在两种情形被积式都是 $|p|$ 阶无穷大。如此,在 $|p|<1$ 时收斂而在 $|p|>1$ 时发散。

3) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

$a<1$ 时奇点为 0, $b<1$ 时奇点为 1。將該积分分解为二,比方說: $\int_0^1=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1$。因为被积函数在 $x\to 0$ 时为 $1-a$ 阶无穷大(若 $a<1$),則第一积分只在 $1-a<1$, 也即 $a>0$ 这条件下存在; 同样第二积分在 $b>0$ 时存在。如此,該积分在而且只在 $a>0$ 并且 $b>0$ 时收斂。

4) $\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

奇点为∞ 及 0 ($p<1$ 时)。$\int_0^1$只在 $p>0$ 时(与$\frac{1}{x}$比較成 $1-p$ 阶无穷大时)存在。$\int_1^{\infty}$則对任何 p 都存在,因取 $\lambda>1$ 我們有

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{\lambda}}}=\frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x}\to 0 \quad 若 x\to\infty;$$

$\int_0^{\infty}$在 $p>0$ 时存在。

附注 我們在第一卷第二分册（339 頁）講到过非初等函数 $\mathrm{li}\, y=\int\frac{dy}{\ln y}$（"积分对数"）。为了确定积分中所含任意常数設

$$\mathrm{li}\, y=\int_0^y\frac{dt}{\ln t}.$$

在 $y<1$ 时这个积分存在而成正常积分。但在 $y>1$ 时該积分失去意义——即使作为非正常积分来看，因为在 $t=1$ 时被积函数是一阶的无穷大（与 $\frac{1}{t-1}$ 比較）。在这情形上面所說的积分理解为极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{y}\right\}\frac{dt}{\ln t}.$$

这极限的存在性証明不講了。

在变号函数的情形应用波尔察諾-哥西檢驗法我們有这样一般的收斂性条件：

要非正常积分 $\int_a^b f(x)dx$（b 为奇点）收斂，其必要而充分的条件是要对每一个数 $\varepsilon>0$ 恒有这样一个数 $\delta>0$ 相应使 $0<\eta<\delta$ 及 $0<\eta'<\delta$ 时成立不等式

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

也如上面一样，由此推出：

如果积分 $\int_a^b|f(x)|dx$ 收斂，則积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收斂更不待言。

逆命題一般不真。所以这里特別分出积分 $\int_a^b|f(x)|dx$ 与积分 $\int_a^b f(x)dx$ 同时收斂的情形；此时第一个积分叫做**絕对收斂的**，而函数 $f(x)$ 叫做在区間 $[a,b]$ 内**絕对可积分的**。

§3. 非正常积分的变换及計算

291. 非正常积分的分部积分法 設函数 $u=u(x)$和 $v=v(x)$ 連同其一阶导函数在全区間 $[a,b]$ 内有定义并且連續，只除出点 b（它也可等于$+\infty$）。于是成立等式

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

这里双重置換理解为差式

$$\lim_{x\to b} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a).$$

在此假設等式的三个式子（两个积分及一个双重置換中）有两个是有有限値的：第三个就可由此推知也是如此。

事实上，取 $a<x_0<b$ 而写出对区間 $[a,x_0]$的尋常分部积分公式，其中所有积分都是正常的：

$$\int_a^{x_0} u dv = [u(x_0)\cdot v(x_0) - u(a)\cdot v(a)] - \int_a^{x_0} v du.$$

現在設在此等式中 x_0 趋于 b。按所設条件其中有两式在 $x_0\to b$ 时有有限极限①。所以，第三式也有有限极限，而所要証明的等式可由取极限而証实。

例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x\cdot\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx$$

——这里由分部积分可将非正常积分化为正常积分而由此証明非正常积分的存在。

---

① 当諸积分 $\int_a^b$ 中有某一成正常积分的情形这也还是眞的[183 段，11°]。

292. 非正常积分中的变数替换 設函数 $f(x)$ 在有限或无限区間 $[a,b)$ 內有定义而且連續，因此，在其每个不包含点 b（它也可以是 $+\infty$）的部分中是依正常意义可积分的；这个点 b 假設是函数 $f(x)$ 的惟一奇点。

現在我們来考慮一个单調增函数 $\varphi(t)$，它連同其导函数 $\varphi'(t)$ 都在区間 $[\alpha,\beta)$ 內連續，而 β 可以是 $+\infty$，并設 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$。最后一等式应理解为 $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$。

在这些条件之下成立等式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \tag{1}$$

但要假設这些积分中有一个是收斂的（另一个的收斂可由此推出）。第二积分可以是正常的，也可以是非正常的而有惟一奇点 β。

按反函数定理［71 段］显然 t 可看作一个在区間 $[a,b]$ 內单調递增而且連續的 x 的函数：$t=\theta(x)$，而 $\lim\limits_{x\to b}\theta(x)=\beta$。

現在設 x_0 和 t_0 为 x 和 t，于区間 (a,b) 及 (α,β) 內任意一对互相对应的值。于是借助正常积分中的变量替換我們将有

$$\int_a^{x_0} f(x)dx=\int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

如果比方說(1)中第二个积分收斂，則令 x_0 依任意方式逼近于 b；此时 $t_0=\theta(x_0)$ 趋近于 β，而我們就建立了公式(1) 同时也証明了左边的积分收斂。

我們的論証同时也可应用于单調递減函数的情形[1]，——此时 $\alpha>\beta$。至于奇点的其他可能分布情形也都可以完全类似地处

[1] 在非正常积分的情形当 $\alpha>\beta$ 时我們也設

$$\int_\alpha^\beta=-\int_\beta^\alpha$$

理。在确定变换后的积分限时总須記得，下限 α 要相应于下限 a，上限 β 相应于上限 b，不論是 $\alpha<\beta$ 还是 $\alpha>\beta$ 的情形。

例 1）計算积分

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

采用置换

$$x=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi.$$

这里 $\alpha=0$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，而所求积分化为正常积分

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\pi.$$

2）要确定积分 $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ 的收斂性我們在其中作变量置换：$x=\sqrt{t}$，$dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$，$a=\alpha=0$，$b=\beta=\infty$。如此得出明显收斂的积分[287 段] $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$，所以所求积分也收斂。值得注意的是，其中被积函数在 $x\to\infty$ 时不趋于任何极限而摆蕩于 -1 与 $+1$ 之間。

同样可解决积分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ 的收斂性問題。

3）积分

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

的計算可应用适当置换而大为簡化。

首先，采用置换 $x=\frac{1}{t}$（$a=0, b=\infty, \alpha=\infty, \beta=0$），可将积分

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}$$

化成所求积分，如此可写

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

如果現在采用置換 $x-\frac{1}{x}=z(a=0, b=\infty, \alpha=-\infty, \beta=\infty)$，則立即得出

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

293. 积分的技巧計算法 我們应用技巧的方法来計算一些重要的非正常积分。在此相应的原函数不能表为有限的形式，而不能利用。所有这些积分十八世紀的数学家都已知道(特别是欧拉)，只是沒有严密的推証。

1°. 設要計算积分

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx,$$

其存在我們已經知道[291 段]。

这一計算要用变量替換，設 $x=2t$ 我們有：

$$J=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

在最后一积分中令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，而將其化为 $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,du$ 的形式，如此，最后我們得出方程式

$$J=\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2+2J,\quad 即\ J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

来决定 J。

2°. 現在来計算

$$K=\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

这个在概率論中常見的积分[①]。为此我們預先来証明几个不等式。

---

① 这个积分的存在是不成問題的，因为($x>1$ 时) $e^{-x^2}<e^{-x}$，而 e^{-x} 的积分可立即算出。

用微分学中的寻常方法不难确定，函数$(1+t)e^{-t}$，在$t=0$取得其最大值1。所以对$t\neq 0$有

$$(1+t)e^{-t}<1.$$

在此設$t=\pm x^2$，我們得

$$(1-x^2)e^{x^2}<1 \text{ 和 } (1+x^2)e^{-x^2}<1,$$

由此有

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}.$$

第一不等式中令x的变化限于区間$(0,1)$內（如此$1-x^2>0$），第二不等式中将$x>0$看作任意的，而将所有諸式取n次方（n为任意自然数）；如此得①

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2} \quad \text{及} \quad e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

$$(0<x<1) \qquad\qquad (x>0)$$

在由0至1的区間內积分第一不等式，由0至∞积分第二不等式，如此得

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^\infty e^{-nx^2}dx<\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

但

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot K \quad (\text{用置換 } u=\sqrt{n}\cdot x),$$

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt=\frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

（用置換$x=\cos t$）

而最后，

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

（用置換$x=\operatorname{ctg} t$）.

我們在此利用$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$[187段，(5)]的巳知式子。如此，所求$K$值可以包含

---

① 对正項不等式两边取自然数次方幂是容許的。

在下列二式之間:

$$\sqrt{n}\cdot\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<K<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

如此,平方起来变成:

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}<K^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

由瓦里斯公式[188 段]有:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

現在不难看出,两端的式子在 $n\to\infty$ 时趋于同一极限$\frac{\pi}{4}$,所以

$$K^2=\frac{\pi}{4}\quad\text{而}\quad K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad(\text{因 }K>0)。$$

3°. 最后我們来看积分

$$L=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx,$$

其收斂性是已知的[287 段]。如果这个非正常积分

$$L=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx$$

的定义用"序列的語言"表出[32 段],則可特别令

$$L=\lim_{A\to\infty}\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx.$$

另一方面,求序列的极限可代之以求[234 段]下面的无穷級数之和:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\left\{\int_0^{\pi}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}+\left\{\int_0^{\frac{3\pi}{2}}-\int_0^{\pi}\right\}+\cdots=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+\cdots,$$

如此最后得

$$L=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx.$$

令 $\nu=2\mu$ 或 $2\mu-1$ 并相应地采用置换 $x=\mu\pi+t$ 或 $x=\mu\pi-t$, 我們有:

$$\int_{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi+t}dt$$

及

$$\int_{(2\mu-1)\frac{\pi}{2}}^{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu-1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi-t}dt.$$

由此得

$$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t\,dt.$$

因为級数

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)$$

在区間 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内均匀收斂，或被收斂級数 $\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-\frac{1}{4}}$ 所控制，則它所有各項均乘以有界函数 $\sin t$ 后可逐項积分。如此我們可以将 L 的表出式写成这样形状：

$$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right]dt.$$

我們以后将知道[**406** 段，3)，附注]，括号中的式子等于 $\frac{1}{\sin t}$，并且就是这个函数的所謂“簡单分式分解式”。此事实目前不加証明而应用于所求积分，終于得出

$$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

这种精彩的推导法出于罗巴切夫斯基，他最先注意到这个重要积分的旧算法不严密。

事实上罗巴切夫斯基用他的方法还得出了这个更一般的公式：

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx,$$

在此假設 $f(x+\pi)=f(x)$ 且 $f(\pi-x)=f(x)$；在所考慮的情形 $f(x)=1$。

附注　由所得結果可知

$$L(a)=\int_0^\infty\frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & a>0\text{ 时},\\ 0, & a=0\text{ 时},\\ -\dfrac{\pi}{2}, & a<0\text{ 时}.\end{cases}$$

在 $a>0$ 时这个积分可由簡单置換 $x=at$ 导至 L; a 变号时积分也跟着变号，而在 $a=0$ 时該积分显然等于 0。

这个屬于傅立叶的簡单附注給了其同时代人深刻的印象: a 的一个函数，在此变量不同值之下有不同的表示法，都同时又能有一个統一的“分析表出式”! [參閱 18 段, 3° 及下面 422 段和 423 段。]

第十八章　带参变数的积分

§1. 基本理論

294. 問題的提出　我們来考慮一个二元函数 $f(x,y)$，它对某一有限或无限区間 $[a,b]$ 內的所有 x 值及一集合 $\mathscr{Y}=\{y\}$ 內的所有 y 值都有定义。設对 $\mathscr{Y}$ 內的每个固定 y 值函数 $f(x,y)$ 都在区間 $[a,b]$ 內正常可积或非正常可积。于是积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \tag{1}$$

显然是輔助变数或参变数 y 的函数。

在 269 段我們曾說到函数序列 $\{f_n(x)\}$ 而考慮了积分

$$I_n=\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

它們是积分(1)的特例：这里自然数下标 n 就起参变数的作用。

关于函数 $I(y)$ 自然发生一系列問題——关于在取极限时极限的存在及表出式，特别是，关于其对 y 的連續性，关于其可微分性及其导数的表出式，以及关于其积分等。这些問題就是本章所要講的。

带参变数的积分(1)所表的函数性質的研究可以有独立的兴趣[关于这一点例如参閱 §4]。但此外这些性質讀者可以看出也有許多应用，特别是，应用于非正常积分計算問題。

295. 均匀趋于极限函数　这标題所指出的概念在下面的研究中占很重要的地位。設在一般情形函数 $f(x,y)$ 于二維集合 $\mathscr{M}=\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 內有定义，这里 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 分别表示变数 x 和 y 可取的

值的集合，而 $\mathscr{Y}$ 有一个聚点，比方說，有限数 y_0。

如果：1) 对函数 $f(x, y)$ 在 $y \to y_0$ 时存在一个有限的极限函数

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (x \text{ 属于 } \mathscr{X}) \tag{2}$$

并且 2) 对任一数 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样一个与 x 无关的数 $\delta > 0$，使对 $\mathscr{X}$ 內所有 x 值

$$\text{在 } |y - y_0| < \delta \text{ 时恒有 } |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \tag{3}$$

则称函数 $f(x, y)$ 对区域 $\mathscr{X}$ 中的 x 均匀地趋于极限函数 $\varphi(x)$。

不难将这个定义改写成 y_0 为非正常数如 $+\infty$ 时的情形：在此只要把 $|y - y_0| < \delta$ 这样的不等式换成 $y_0 > \Delta$ 这样的不等式。在第十六章[264 段]我們已搞过这种均匀趋于极限函数的特例；那里是对函数 $f_n(x)$ 而言的，其参变数是自然数下标 n。

在 265 段讲函数序列时我們証明过，均匀收斂的充要条件是收斂性原理的所謂"均匀实现"。对一般情形也可以这样做。卽，如果假設 y_0 有限的話：

1° 要函数 $f(x, y)$ 在 $y \to y_0$ 时有极限函数并对区域 $\mathscr{X}$ 內的 x 均匀趋于它，则其必要而充分的条件是要对每一数 $\varepsilon > 0$ 恒存这样一个与 x 无关的数 $\delta > 0$，使对 $\mathscr{X}$ 內一切 x 值恒成立不等式

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon, \tag{4}$$

只要

$$|y - y_0| < \delta, \quad |y' - y_0| < \delta \quad (y, y' \text{ 属于 } \mathscr{Y}). \tag{5}$$

[在 $y_0 = +\infty$ 的情形将最后二不等式换作 $y > \Delta$, $y' > \Delta$。]

必要性　設均匀收斂实現。在定义中以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 代 ε 并选取相应 δ 后我們由 $\mathscr{Y}$ 內取两个值 y 及 y'，使满足条件(5)。于是不論 x 如何我們将有

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 及 } |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由此就得到(4)式。

充分性　如果上述条件实现，則首先函数(2)显然存在。然后在不等式(4)取 $y' \to y_0$ 时的极限（这里 y 固定而且满足 $|y-y_0|<<\delta$），而得

$$|\varphi(x)-f(x,y)|\leqslant\varepsilon.$$

这就証明了函数 $f(x,y)$ 均匀趋于极限函数 $\varphi(x)$。

現在設集合 $\mathscr{X}$ 是一个有限区間 $[a,b]$。按 266 段定理 1*，如果連續函数序列 $\{f_n(x)\}$ 均匀收斂于一个极限函数，則此函数必須是連續的；这話也可搬到一般情形上来：

2° 如果函数 $f(x,y)$ 在 y 取 $\mathscr{Y}$ 内任何值时对区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 內的 x 值而言都是連續的并且在 $y\to y_0$ 时均匀趋于一个极限函数 $\varphi(x)$，則此函数也連續。

事实上，只要由 $\mathscr{Y}$ 内任取一个有极限 y_0 的序列 $\{y_n\}$ 使相应函数序列 $\{f(x,y_n)\}$ 均匀收斂于 $\varphi(x)$：例如，在 y_0 有限时，不等式

$$|f(x,y_n)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

将对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都成立，只要 n 充分大而使 $|y_n-y_0|<\delta$［参閱(3)］，剩下只要引証所說的定理就行了。

也不难推广地尼定理［267 段，定理 2*］；这回我們假設所有 $y<y_0$。

3° 設函数 $f(x,y)$ 在 y 取 $\mathscr{Y}$ 内任何值时都对区間 $\mathscr{X}=[a,b]$ 內的 x 值連續并且在 y 增大时单調遞增而趋于一个极限函数 $\varphi(x)$。于是对区間 $\mathscr{X}$ 內的 x 而言它也必定均匀趋于該极限。

証明时我們由 $\mathscr{Y}$ 内分出一个单調遞增的 y 值序列 $\{y_n\}$，趋于极限 y_0，并且考慮相应的函数序列 $\{f(x,y_n)\}$，它显然也是隨 n 而单調遞增的。

地尼定理可以肯定这个序列对区間 $\mathscr{X}$ 內的 x 而言均匀收斂于 $\varphi(x)$。所以給定任一 $\varepsilon>0$ 时恒可找到这样一个序号 n_0，使不等式

$$|\varphi(x)-f(x,y_{n_\varepsilon})|<\varepsilon$$

对$\mathscr{X}$内所有x值都成立。由于函数f随y而单調递增，故只要$y>y_{n_\varepsilon}$不等式

$$|\varphi(x)-f(x,y)|<\varepsilon$$

也就成立；如此証明了我們的斷言。

虽然所建立这个均匀逼近的特殊檢驗法看来是狹窄的，但它往往很有用处，因为可以不必再用别的方式来証实均匀逼近了。

296. 积分号下取极限 現在来看带参变数y的积分(1)，并首先限于有限区間$[a,b]$及連續函数的情形。

設参变数y的变域$\mathscr{Y}$有一聚点y_0，我們来討論函数(1)在$y\to y_0$时的极限問題。

定理 1. 如果函数$f(x,y)$在y值固定时对$[a,b]$内的x值連續而在$y\to y_0$时对x均匀地趋于一个极限函数(2)，則有等式

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

証明[①] 极限函数$\varphi(x)$已知为連續的[**295** 段，2°]。指定任意一数$\varepsilon>0$，我們来找这样一个数$\delta>0$，使(3)式成立。于是在$|y-y_0|<\delta$时将有

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f(x,y)-\varphi(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x,y)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon(b-a),$$

这就証明了公式(6)。

公式(6)也可写成这样形状：

---

① 为确定起見假設y_0有限。

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

在这情形我們說，关于参变数取极限容許"在积分号下"进行。

設所有 $y<y_0$ 則根据推广地尼定理有[295 段，3°]：

推論 如果函数 $f(x,y)$ 在 y 固定时对 $[a,b]$ 內的 x 值为連續的而在 y 增大时趋于一个單調递增的連續函数，則公式(6)正确。

最后我們在 $\mathscr{Y}$ 本身为一有限区間 $[c,d]$ 的假設之下来考慮函数(1)的連續性問題。

定理 2. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 內有定义并且連續，則积分(1)在区間 $[c,d]$ 內为参变数 y 的連續函数。

証明 旣然函数 $f(x,y)$ 是均匀連續的(137 段)，則对任意一 $\varepsilon>0$ 必可找到这样一个 $\delta>0$，使由不等式

$$|x''-x'|<\delta,\quad |y''-y'|<\delta$$

就可推出不等式

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon.$$

我們特別取 $x'=x''=x$, $y'=y_0$, $y''=y$；于是在 $|y-y_0|<\delta$ 时不論 x 如何将有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon.$$

如此，函数 $f(x,y)$ 在 y 趋于任一特殊值 y_0 时对 x 而言均匀地趋于 $f(x,y_0)$，在这种情形按定理 1 有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

或

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

这就証明了我們的断言。

297. 积分号下的微分法 在研究由含参变数 y 的积分所給

出的函数(1)的性质时該函数对参变数的导数問題具有重要意义。

在一定的假設之下計算导数 $I'(y)$ 可用公式

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx \tag{7}$$

或用哥西的更鮮明的表示法

$$D_y\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b D_y f(x,y)\,dx.$$

如果对 y 的导数号与对 x 的积分号可以这样对調，則称函数(1)可“在积分号下”对参变数微分。

1697 年萊卜尼茲最初将类似这样的方法函告約翰・貝努里，后者为之欣喜若狂。上面那計算导数的公式也就称为“萊卜尼茲法則”。

下面的定理建立这个法則适用的簡单充分条件。

定理 3. 設在矩形 $[a,b;c,d]$ 內有定义的函数 $f(x,y)$ 在任何 $[c,d]$ 內 y 的固定值之下对 $[a,b]$ 內的 x 而言連續。更設在全区域內偏导数 $f'_y(x,y)$ 存在，并且是一个二元的連續函数[①]。于是在 $[c,d]$ 內任何 y 值之下公式(7)都成立。

函数 $f(x,y)$ 对 x 的連續性保証了积分(1)的存在。指定任一值 $y=y_0$ 而給以增量 $\Delta y=k$，于是

$$I(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx,\quad I(y_0+k)=\int_a^b f(x,y_0+k)\,dx,$$

如此

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^b\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\,dx. \tag{8}$$

右边的积分依賴于参变数 k。我們要来証明当 $k\to0$ 时这里容

① 其实由这些条件已可推知函数 $f(x,y)$ 的連續性，但我們不利用这一点。

許积分号下取极限。由此也就可証明导数

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}$$

存在并且所要求的这个等式成立:

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}dx=$$

$$=\int_a^b \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}dx=$$

$$=\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx.$$

为此我們先按拉格朗日公式写

$$\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}=f'_y(x,y_0+\theta k)\quad (0<\theta<1). \qquad (9)$$

利用函数 $f'_y(x,y)$ 的均匀連續性，对任一 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$ 使在

$$|x''-x'|<\delta \text{ 及 } |y''-y'|<\delta$$

时成立不等式

$$|f'_y(x'',y'')-f'_y(x',y')|<\varepsilon.$$

这里令 $x'=x''=x$, $y'=y_0$, $y''=y_0+\theta k$ 并且認为 $|k|<\delta$ 如此由(9)得出对所有 x 有

$$\left|\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}-f'_y(x,y_0)\right|<\varepsilon.$$

由此明白，被积函数(9)在 $k\to 0$ 时对 x 而言均匀趋于极限函数 $f'_y(x,y_0)$。由此按定理1証实了可在积分号下取极限。

298. 积分号下的积分法 最后我們提出关于函数(1)依 y 的积分問題，比方說，是在区間 $[c,d]$ 内的积分。

我們特别感覺兴趣的是当这个积分可用公式

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

表出时的情形，它通常可不用括号而写成这样：

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{10}$$

在这情形我們説函数 (1) 可对參变数 y 在“(对变数 x 的)积分号下”积分。

关于两个累次积分的相等下列定理給出其最簡单的充分条件：

定理 4. 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 内对两个变数連續，則公式(10)成立。

我們来証明一个較一般的等式

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^\eta f(x,y)dy, \tag{10a}$$

这里 $c\leqslant\eta\leqslant d$。

在等式两边我們有參变数 η 的两个函数；算出其对 η 的导数。

左边外层的积分有被积函数(1)，它按定理 2 是对 y 連續的，所以它对变上限的导数等于被积函数在 $y=\eta$ 时的值，也卽等于积分

$$I(\eta)=\int_a^b f(x,\eta)dx.$$

在(10a)式右边有积分

$$\int_a^b \varphi(x,\eta)dx,\quad 而\ \varphi(x,\eta)=\int_c^\eta f(x,y)dy;$$

函数 $\varphi(x,\eta)$ 滿足定理 3 的条件。事实上，按定理 2[①] $\varphi(x,\eta)$ 对 x

① 这里 x 是參变数。

而言是連續的。然后，导函数

$$\varphi'_\eta(x,\eta)=f(x,\eta)$$

是两个变数的連續函数。所以在上面所說的积分上可应用萊卜尼兹法則：

$$D_\eta\int_a^b\varphi(x,\eta)dx=\int_a^b\varphi'_\eta(x,\eta)dx=\int_a^b f(x,\eta)dx=I(\eta).$$

如此，等式(10a)两边作为 η 的函数有相等的导函数，所以只能相差一个常数。但在 $\eta=c$ 时上面所說两式显然变成 0；所以，它們在所有 η 值上恒等而等式(10a)得証。

由此特別在 $\eta=d$ 时我們可得出等式(10)。

附注　这个等式于 1769 年首先由欧拉所指出(次年发表)。但他只以实例說明，"因为它的根据由微分及积分的本性看来是完全明显的"。

299. 积分限带参变数的情形　我們来考虑一个比較复杂的情形，此时不但被积函数含有参变数，連积分限也带参变数。在这情形积分有这样的形式：

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)dx. \tag{11}$$

我們只討論这类积分对参变数的連續性及可微分性問題。

定理 5. 設函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 內有定义并且連續，而曲綫

$$x=\alpha(y),\quad x=\beta(y)\quad(c\leqslant y\leqslant d)$$

連續并且不越出矩形的界限。于是积分(11)是 $[c,d]$ 內 y 的連續函数。

如果 y_0 是 y 的任意一个特殊值，則积分(11)可以写成这样形狀：

$$I(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}f(x,y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)}f(x,y)dx. \tag{12}$$

第一个积分——其中积分限已为常数——在 $y\to y_0$ 时趋于

$$I(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}f(x,y_0)dx,$$

(按定理 2)。剩下两个积分可作如下估计：

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right| \leqslant M \cdot |\beta(y)-\beta(y_0)|,$$

$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx\right| \leqslant M \cdot |\alpha(y)-\alpha(y_0)|,$$

其中 $M=\max|f(x,y)|$，因而——由函数 $\alpha(y)$ 及 $\beta(y)$的連續性——它們在 $y\to y_0$ 时趋于 0.

如此，終于有

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

这就証明了本定理。

定理 6. 如果上面所說的函数 $f(x,y)$，在矩形$[a,b;c,d]$內有連續导函数 $f'_y(x,y)$，并导数 $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$也存在，則积分(11)对参变数有导数，它可由下面的公式表出：

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y). \quad (13)$$

这里我們就由等式(12)出发。第一个积分在 $y=y_0$ 有导数，它是某一个导数的积分：

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)dx$$

(定理 3). 对第二积分(在 $y=y_0$ 时其值为 0)我們按中値定理有：

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx=\frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0}\cdot f(\bar{x},y),$$

而 $\bar{x}$ 在 $\beta(y_0)$与 $\beta(y)$之間。由此知第二积分在 $y=y_0$ 时的导数是

$$\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0),y_0).$$

它就是前式在 $y\to y_0$ 时的极限。同样得出第三积分在 $y=y_0$ 时的导数

$$-\alpha'(y_0)\cdot f(\alpha(y_0),y_0).$$

結合所有这些結果就証明了导数 $I'(y_0)$存在并得出上面那个公式。

附注 这两个定理当函数 $f(x,y)$只給定在曲綫

$$x=\alpha(y) \text{ 与 } x=\beta(y)$$

之間的区域內(并具有上述性質)时也仍成立。但为推論簡单起見，利用了在这区域外考慮該函数的可能性。

以这样的观点来看看所建立的各个結果是有益处的: 积分 $I(y)$ 可由

$$I(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)dx$$

这个含有三个参变数 y,u,v 的积分經过置換 $u=\alpha(y)$, $v=\beta(y)$ 得出。这个問題只要应用复合函数連續性及可微分性的一般定理即可完全解决。特別是公式(13)可按古典格式写出:

$$\frac{dI}{dy}=\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\alpha'(y)+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\beta'(y).$$

300. 例 1) 計算积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \qquad (0<a\leqslant b).$$

将被积式表为积分的形式:

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$$

并按定理4在累次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy$$

中对調依 x 与依 y 的积分立即得出結果

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

2) 如果把积分 I (在 a 固定时)看作参变数 b ($b\geqslant a$)的函数則也可給予这一計算以另外形式。按定理3:

$$\frac{dI}{db}=\int_0^1 x^b dx=\frac{1}{b+1}.$$

所以

$$I=\ln(b+1)+C.$$

但在 $b=a$ 时积分 I 显然等于0,因为 $C=-\ln(a+1)$。代入即得和上面一样的結果。

3) 在所考慮諸情形定理3或4的条件显然都实現。如果違背了这些条件,則該定理的結論可能不正确。我們来举一个这样的例子。

設在矩形[0, 1; 0, 1]内$f(x, y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$。于是

$$\int_0^1 f(x,y)dx=\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{1+y^2}\qquad (y>0),$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=\operatorname{arctg} y\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

同时

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=-\frac{\pi}{4}.$$

注意在点(0, 0)函数$f(x, y)$不連續。

§2. 积分的均匀收斂性

301. 积分均匀收斂性定义 在上述含参变数积分理論推广到非正常积分情形时积分均匀收斂性概念占特别重要的地位，我們現在預先闡明这个概念。

設函数$f(x, y)$对所有$x\geqslant a$及某区域$\mathscr{Y}$内所有y值有定义。更設对此区域内每个y值存在积分

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx. \tag{1}$$

按无限限非正常积分定义[282段]：

$$\int_a^\infty f(x,y)dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x,y)dx.$$

如此，积分

$$F(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx \tag{2}$$

成为A与y的函数而在y固定，并且$A\to\infty$时有极限$I(y)$。如果这个积分对区域$\mathscr{Y}$内的y均匀趋于$I(y)$，則称积分$I(y)$对参变数

y 在$\mathscr{Y}$内是均匀收斂的。

这就是說，对任一 $\varepsilon>0$ 恒可找这样一个与 y 无关的数 $A_0\geqslant a$，使得只要 $A>A_0$ 时不等式

$$\left|\int_a^{\infty} f(x, y) dx-\int_a^A f(x, y) dx\right|=\left|\int_A^{\infty} f(x, y) dx\right|<\varepsilon$$

就同时对$\mathscr{Y}$内所有 y 值都成立。

如果将含参变数 y 的积分(1)与无穷函数級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

(这里 x 起参变数的作用)对比，而回忆 284 段所說关于非正常积分与无穷級数之間的相似性，則上述定义与 264 段級数均匀收斂性定义之間的完全平行的情况就显示出来了。

蔡德尔与斯托克斯这两位最先把函数級数的均匀收斂性与非均匀收斂性区别开来的数学家[281 段]同时也对含参变数积分$\int_a^{\infty}$指出了类似的可能性。

例如，看积分

$$\int_0^{\infty} y e^{-xy} dx,$$

它在每个定值 $y\geqslant 0$ 之下都收斂。

我們直接来計算积分

$$\int_A^{\infty} y e^{-xy} dx.$$

在 $y=0$ 时它等于 0，不論 A 取何值；如果 $y>0$，則由置換 $xy=t$ 不难得出

$$\int_A^{\infty} y e^{-xy} dx=\int_{Ay}^{\infty} e^{-t} dt=e^{-Ay}.$$

当 y 固定时这式子在 $A\rightarrow\infty$ 时显然趋于 0，并且不論取怎样的 $\varepsilon>0$，不等式

$$e^{-Ay}<\varepsilon \tag{3}$$

将对所有 $A>A_0(y)$成立，这里

$$A_0(y)=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}$$

依赖于 y。

如果 y 的变化局限于区間$[c, d]$内而 $c>0$, 則可找到这样一个与 y 无关的数 A_0，使在 $A>A_0$ 时不等式(3)对所有 y 都成立：只要取 $A_0(c)$作 A_0，因为在 $A>A_0$ 时就有

$$e^{-Ay}\leqslant e^{-A_0}<\varepsilon \qquad (c\leqslant y\leqslant d).$$

换句話說，我們的积分对区間$[c, d]$内的 y 均匀收斂。

如果参变数 y 在区間 $[0, d]$ $(d>0)$ 內变化則情形就两样了。这回这样的 A_0 已不存在(至少当 $\varepsilon<1$ 时)。这一点甚至可以由此看出：不論取多大的 A, e^{-Ay} 式在 $y\to 0$ 时恒趋于 1，如此对充分小的 y 值它将大于任何数 $\varepsilon<1$。該积分的收斂在 y 变化于区間 $[0, d]$内时已不是对 y 均匀的了。

302. 均匀收斂性的条件及充分檢驗法 利用函数均匀趋于极限的一般檢驗法[295 段, 1°]可按当前情形将它陈述如下：

要积分(1)对 y 在区域$\mathscr{Y}$內均匀地收斂，其必要而充分的条件是要在給定任一 $\varepsilon>0$ 时恒可找到这样一个与 y 无关的数 A_0，使不等式

$$\left|\int_a^{A'} f(x, y)dx-\int_a^{A} f(x, y)dx\right|=\left|\int_A^{A'} f(x, y)dx\right|<\varepsilon$$

同时对$\mathscr{Y}$內一切 y 值都成立，只要 $A'>A>A_0$。

現在来建立几个遥常实际上用来判定积分均匀收斂性的方法。

1° 我們設函数 $f(x, y)$当 $x\geqslant a$ 时对 x 連續。如果存在这样一

个只与 x 有关的函数 $\varphi(x)$，在无限区間 $[a,\infty]$ 内可积，且使在 $\mathcal{Y}$ 内所有 y 值之下恒有

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)\qquad(\text{对 } x\geqslant a),$$

则积分(1)对 y（在 $\mathcal{Y}$ 内）均匀地收斂。

这可直接由不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,dx\right|\leqslant\int_A^{A'}|f(x,y)|\,dx\leqslant\int_A^{A'}\varphi(x)\,dx$$

推出，只要利用剛才所証明的檢驗法。

在上述条件之下有时也說函数 $f(x,y)$ 有一可积控制函数 $\varphi(x)$，或者說积分(1)由不含参变数的收斂积分 $\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 所控制。

不难看出这种檢驗法与維尔斯脫拉斯的函数級数均匀收斂性的著名檢驗法[265 段]的相似性。

例 1) 积分

$$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}\,dx\qquad\qquad(k\neq 0)$$

对参变数 α（在其任何变域内）均匀收斂，因它为不含 α 的收斂积分

$$\int_0^\infty\frac{dx}{k^2+x^2}$$

所控制。

2° 我們来看两个函数之积的积分

$$\int_a^\infty f(x,y)\cdot g(x)\,dx\quad(4a),\qquad\qquad \int_a^\infty f(x)\cdot g(x,y)\,dx\qquad(4б)$$

被积函数两因子中只有一个含有参变数 y，它在某区域 $\mathcal{Y}$ 内变化。对这些积分我們要陈述較精致的均匀收斂性檢驗法，它可摹仿 287 段而得。

函数 f 和 g（必要时取 $y=$常数）我們也如在那里一样看作是 x 的連續函数；而 g 还要是单調的并且对 x 有連續导函数。于是

(I) 如果 1) 积分

$$\Phi(A, y)=\int_{a}^{A} f(x, y) d x$$

对所有 A 及所有 y 均匀有界:

$$|\Phi(A, y)| \leqslant K \qquad (K \text{ 为常数})$$

并且 2) $x\to\infty$ 时 $g(x)\to 0$, 则积分(4a)对$\mathscr{Y}$内的 y 均匀收斂, 同样

(Ⅱ)如果 1′) 积分

$$\int_{a}^{\infty} f(x) d x$$

收斂, 而

2′) 函数 $g(x, y)$ 对所有 x 及所有 y 均匀有界:

$$|g(x, y)| \leqslant L \qquad (L \text{ 为常数}),$$

则积分(4б)对 y 均匀收斂。

至于証明, 則它其实仍与以前一样, 因为——由于常数 K 及 L 都与 y 无关——对积分

$$\int_{A}^{A'} f \cdot g d x$$

可得出与 y 无关的估値, 这就保証了均匀收斂性。

例 2) 积分

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin a x}{k^{2}+x^{2}} d x$$

对 a 在 $a \geqslant a_{0}>0$ 时均匀收斂(按檢驗法(I))。事实上, 令 $f(x, a)=\sin a x$ 我們有

$$\left|\int_{0}^{A} \sin a x\, d x\right|=\frac{1-\cos a A}{a} \leqslant \frac{2}{a_{0}}=K ;$$

另一方面, 函数

$$g(x)=\frac{x}{k^{2}+x^{2}},$$

単調递减(至少对充分大的 x 是如此)而在 $x\to\infty$ 时趋于 0 。

3) 积分

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a x} \frac{\sin x}{x} d x$$

按検驗法(Ⅱ)对 a ($a\geqslant 0$)均匀收斂。这里 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$由 0 至∞可积分，而(广义)单調遞減函数 $g(x, a)=e^{-ax}$以 1 为界。

303. 带有限积分限的积分 我們現在来考慮一个函数 $f(x, y)$，它对有限区間$[a, b]$內的 x 值及某区域$\mathscr{Y}$內的 y 值有定义；設 y 为常数时它对 x 由 a 至 b 可积分（正常意义或非正常意义）。于是无論积分

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{5}$$

是正常与否，它都是以 $\eta\to 0$ 时积分

$$\varphi(\eta, y)=\int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx \tag{6}$$

的极限。

如果这个积分在 $\eta\to 0$ 时对区域$\mathscr{Y}$內的 y 均匀趋于极限 $I(y)$，則称积分(5)对該区域內的 y 均匀地收斂。

这就是說，对任何一个 $\varepsilon>0$ 恒可找到这样一个与 y 无关的数 $\delta>0$，使得，只要 $\eta\leqslant\delta$ 时，不等式

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx-\int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx\right|=\left|\int_{b-\eta}^b f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon$$

就同时对$\mathscr{Y}$內所有 y 值都成立。

不难在此陈述均匀收斂性的必要而充分的条件，同样也可将 302 段的充分条件搬到当前的情形上来。这让讀者自己去做。

我們曾将由 a 至 b 的积分(5)看作由 a 至 $b-\eta$ 的积分(6)的极限并且注意后面的积分逼近它的极限的特性。如此，点 $x=b$ 在这里占特殊的地位（象 301 段中点 $x=\infty$ 一样）。但在某些情形（这种情形以后說明）也有必要給予区間內别的点以类似的地位。例如，同一积分(5)也可看作积分

$$\psi(\eta, y)=\int_{a+\eta}^{b} f(x, y)dx$$

在 $\eta\to0$ 时的极限。如果在 $\eta\to0$ 时后面的积分对 y 均匀地逼近它，则也可以說积分(5)均匀收斂。全部以上所說的都可搬到这情形上来。

如果遇到需要分清是哪一种均匀收斂的情形时則我們說，該积分各在 $x=\infty$, $x=b$ 或 $x=a$ 等等时均匀收斂(对某区域內的 y)。

要注意的是，对于比方說在 $x=b$ 时积分(5)的均匀收斂性，我們通常感兴趣的是当点 $x=b$ 就是积分 (5) 的奇点(指 **288** 段中的意义)——在 y 取某些値的时候——的那些情形，但这定义当积分(5)在一切値都正常的时候不仅形式上保持有效，而我們將看到在这情形也的确可能有用处。

例如，积分

$$\int_{0}^{1}\frac{y}{x^2+y^2}dx$$

对区間 $[0, d]$ $(d>0)$ 內每一个 y 值都將存在而且为正常积分。但对 y 的这一变化区間它的收斂性在 $x=0$ 时不是均匀的。事实上，只要 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ 不等式

$$\int_{0}^{\eta}\frac{ydx}{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{y}<\varepsilon,$$

就不能对一切 $y>0$ 的値都成立：不管 η 取多小，不等式左边在 $y\to0$ 时总趋于 $\frac{\pi}{2}$，因而对充分小的 y 值必定大于 ε。

§ 3. 积分均匀收斂性的应用

304. 积分号下取极限 現在我們来討論带无限积分限的积分

$$I(y)=\int_{a}^{\infty}f(x, y)dx, \tag{1}$$

它含有参变数 y(在区域 $\mathcal{Y}$ 内变化,(并且来证明一系列与 296—298 段对正常积分所建立的諸定理相类似的定理。由一些定理过渡到另一些定理时可遵循 266—270 段中由函数有限和性质过渡到无穷函数級数和情形时的同样步驟。正如那里函数級数均匀收斂性起决定性作用一样,这里(1)形积分均匀收斂性也起同样的作用。如此,我們的指导思想还是那无穷級数与非正常积分之間的相似性,这我們已屡次强調过了[284, 301 段]。

我們由伸展在无限区間上的积分的积分号下取极限問題开始。

296 段的定理 1 不能推广到这个情形上:在全无限区間內即使函数 $f(x, y)$在 $y\to y_0$ 时均匀趋于极限函数 $\varphi(x)$,积分号下取极限也仍可能是不容許的。

例如我們来看函数($n=1, 2, 3, \cdots$):

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{n}{x^3}\cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} & (x>0) \\ f_n(0)=0. \end{cases}$$

由寻常微分学方法不难确定,这个函数在 $x=\sqrt{\dfrac{n}{3}}$时达最大值,即等于$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}e^{-\frac{3}{2}}$。因为在 $n\to\infty$ 时这个值趋于 0,故由此可見,函数 $f_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时在全区間 $[0, \infty]$內均匀趋于 $\varphi(x)=0$。可是在 $n\to\infty$ 时积分

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=1$$

而完全不趋于0。

可能在积分号下取极限的充分条件由下面的定理給出:

定理1. 設函数 $f(x, y)$ 对 $x\geqslant a$ 及 $\mathcal{Y}$ 内的 y 有定义:1)对x連續并且2)$y\to y_0$时在每一有限区間$[a, A]$內对 x 均匀地趋于极限

函数 $\varphi(x)$。更設 3)积分(1)对区域$\mathscr{Y}$内的 y 均匀收斂。于是有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^\infty \varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

我們首先注意，函数 $\varphi(x)$ 也是連續的[295 段，2°]。按均匀收斂性条件[302 段]对任何 $\varepsilon>0$ 恒可找到这样一个 $A_0>a$，使

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon$$

对 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值同时成立，只要是 $A'>A>A_0$。这里在积分号下取 $y\to y_0$ 时的极限[296 段定理 1]我們得

$$\left|\int_A^{A'} \varphi(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

由此推知(286 段)函数 $\varphi(x)$ 在无限区間$[0, \infty]$内可积分。

其次，在任何 $A>a$ 之下我們有:

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)\,dx-\int_a^\infty \varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_a^A f(x, y)\,dx-\int_a^A \varphi(x)\,dx\right|+$$
$$+\left|\int_A^\infty f(x, y)\,dx\right|+\left|\int_A^\infty \varphi(x)\,dx\right|.$$

如果取任意一个数 $\varepsilon>0$，則可先指定 A 值使右边第二項及第三項变成$<\frac{\varepsilon}{3}$(与 y 无关!)，然后令 y 充分接近 y_0，而使第一項也$<\frac{\varepsilon}{3}$[296 段]。于是，对上述 y 值有

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)\,dx-\int_a^\infty \varphi(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

这就导至(2)。

由此应用推广地尼定理[295 段，3°]可得出

推論 設非負函数 $f(x,y)$ 对 x 在 $x\geqslant a$ 內連續并且隨 y 增大而递增地趋于极限函数 $\varphi(x)$，它也在該区間內連續。于是由积分

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx \tag{3}$$

的存在可推出积分 (1) 的存在(对 $\mathscr{Y}$ 內所有 y 值)并且公式 (2) 成立。

按所說的定理在該条件下函数 $f(x,y)$ 的趋于 $\varphi(x)$ 对任何有限区間內的 x 而言是均匀的。其次，由 285 段定理 1 积分 (1) 是存在的，因为

$$f(x,y)\leqslant\varphi(x).$$

函数 $\varphi(x)$ 同时也起到控制函数的作用 [302 段]，保証了积分 (1) 对 y 的均匀收斂性。如此，符合了所有应用前一定理的条件。

对函数序列 $\{f_n(x)\}$ 常常須用到积分号下取极限。如此，由序列过渡到无穷級数可以得出关于函数級数逐項积分的新定理。

例如，看看这时上面的推論成为什么形式：

設級数

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

由在 $x\geqslant a$ 时为正且連續的函数所組成而对这些 x 值有連續的和 $\varphi(x)$。如果和函数在区間 $[a,+\infty]$ 內可积分，則在此区間內該級数可逐項积分。

最后，下面这个关于积分 (1) 对参变数的連續性的定理也是定理 1 的簡单推論。

定理 2. 設函数 $f(x,y)$ (作为二元函数) 对 $x\geqslant a$ 及区間 $[c,d]$ 內的 y 值而言有定义并且連續。如果积分 (1) 对区間 $[c,d]$ 內的 y 而言均匀收斂，則它在此区間內是参变数 y 的連續函数。

事实上，如我們在 296 段中所見，当 x 在任何有限区間 $[a, A]$ 内变化时函数 $f(x, y)$ 于 $y \to y_0$ 时（y_0 为 y 的任一特殊值）对 x 而言均匀趋于极限函数 $f(x, y_0)$。而此时按定理 1 在积分(1)中可于积分号下取极限：

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0)\,dx = I(y_0),$$

这就証明了我們的断言。

也可很簡单地証明下面和地尼定理的类似的定理 [267 段]：

定理 3. 如果連續函数 $f(x, y)$ 非負，則由积分 (1) 作为参变数函数时的連續性可推出其收斂性是均匀的。

在这情形 y 的[按 296 段定理 2]連續函数

$$\int_a^A f(x, y)\,dx$$

随 A 俱增因此而 [按 295 段 30 推广地尼定理] 对 y 均匀趋于其极限(1)，这就是所要証明的。

305. 积分依参变数的积分法 先来証明下面这一定理：

定理 4. 在定理 2 的假設下成立公式：

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

事实上，在任何 $A > a$ 之下

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\,dx + \int_c^d dy \int_A^{\infty} f(x, y)\,dx;$$

但按 298 段定理 4

$$\int_c^d dy \int_a^A f\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f\,dy,$$

如此差式

$$\int_c^d I(y)dy-\int_a^A dx\int_c^d f dy$$

可写成这样:

$$\int_c^d I(y)dy-\int_c^d dy\int_a^A f dx=\int_c^d dy\int_A^\infty f dx.$$

如果現在——取任意小的 $\varepsilon>0$ 时——将 A 取得这样大,而使在所有 y 值之下

$$\left|\int_A^\infty f dx\right|<\varepsilon,$$

則上面的差数的絕对值将小于 $\varepsilon(d-c)$。在这情形

$$\int_c^d I(y)dy=\lim_{A\to\infty}\int_a^A dx\int_c^d f dy,$$

这就等价于(4)。

如果利用[**304** 段] 定理 3,則不难由此导出这样的

推論 在非負函数 $f(x,y)$ 的情形光是由积分(1)对 y 的連續性就可推出公式(4)。

如此,我們在一定条件下建立了这样两个积分彼此調換次序的合法性:一个伸展在无限区間上,而另一个伸展在有限区間上。

然而在許多情形,我們正是需要按下列公式对調两个都取在无限区間內的积分,对应的公式是:

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy. \tag{5}$$

要証实这种对調的合法性往往是一件复杂而細致的事情。

只有对很窄的一类情形能以一般方式建立公式(5);例如:

定理 5. 設函数 $f(x,y)$ 对 $x\geqslant a$ 及 $y\geqslant c$ 有定义而連續并且

非負，我們更假設两个积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx, \qquad \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy$$

是連續函数，——第一个是 y 的，第二个是 x 的。于是，如果下面两个累次积分中有一个存在：

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx, \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy, \tag{6}$$

則另一个也存在，并且等式(5)成立。

設积分(6)中第二个存在。按前面的推論，对任一有限的 $C>c$ 将有

$$\int_c^C dy \int_a^{\infty} f dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^C f dy. \tag{7}$$

右边积分的被积函数

$$\int_c^C f dy$$

作为 x 和 C 的函数是对 x 連續的 [296 段定理 2]并且——随着 C 的增至无穷——递增而趋于函数

$$\int_c^{\infty} f dy,$$

它按假設是連續的并且可以对 x 由 a 至 ∞ 可积分的。应用 304 段的推論到 (7) 式右边的积分上我們可以在这积分的积分号下取 $C\to\infty$ 时的极限。在这样的情形不但是(7)式右边的积分的极限(即积分(6)中第一个)，存在并且两个累次积分还彼此相等。

306. 积分依参变数的微分法 我們由前段定理 4 来导出一个关于这种微分法的定理，这正与以前依据 269 段定理 4 証明 270

段中的定理5的情形相似。

定理6. 設函数 $f(x,y)$ 对 $x\geqslant a$ 及 $[c,d]$ 内的 y 有定义，依 x 連續，并且对上述值有依两个变数連續的导函数 $f'_y(x,y)$。更設积分(1)对所有 $[c,d]$ 内的 y 值都收斂，而积分

$$\int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx \tag{8}$$

不但存在，并且在同一区間内还对 y 均匀收斂。于是对 $[c,d]$ 内任何 y 值成立公式

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx.$$

应用定理4于函数 $f'_y(x,y)$，只是 d 代之以任何 $y(c\leqslant y\leqslant d)$，我們有

$$\int_c^y dy\int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx=\int_a^\infty dx\int_c^y f'_y(x,y)\,dy=$$

$$=\int_a^\infty f(x,y)\,dx-\int_a^\infty f(x,c)\,dx.$$

因为左边积分的被积函数，即积分

$$\int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx,$$

是 y 的連續函数[按**304**段，定理2]，則它就是左边的积分对 y 的导函数[**183**段，12°]，等式右边的积分(1)既与左边积分只差一常数所以它也是积分(1)的导函数。如此本定理得証。

307. 关于带有限积分限的积分的一个纍注 我們已詳細討論积分

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx \tag{1}$$

的性质問題，对該积分 x 的惟一奇值为∞。类似的理論也可对这样的情形来建立：x 的奇值有限，比方說与积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \tag{9}$$

的上限 b 相同时。在所有已証明的論断里可以令 b 代替∞的地位，卽凡 $x=\infty$ 时的均匀收斂性到处都改成 $x=b$ 时的均匀收斂性 [303 段]。例如，定理 1 可改換成：

定理 1*。設函数 $f(x,y)$ 对 $a\leqslant x<b$ 及 $\mathcal{Y}$ 內的 y 值有定义而且：1) 对 x 連續 2) $y\to y_0$ 时在每个区間 $[a,b-\eta]$ 內对 x 均匀趋于极限函数 $\varphi(x)$；如果此外 3) 积分 (9) 在区域 $\mathcal{Y}$ 內对 y 均匀收斂，则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

当然，有时同一积分 (1) 中可以有两个奇值 x，比方說 $x=a$ 及 $x=\infty$。所有那些論断也仍可搬到这情形上来；但常常比較方便的还是就把积分 (1) 表为两个之和的形式：

$$\int_a^\infty=\int_a^b+\int_b^\infty \qquad (a<b<\infty)$$

再把所講的理論各別应用于每一項上。

308. 一些非正常积分的計算 带参变数的积分的理論可用来計算許多古典的非正常积分。

1°. 我們来計算下面的积分（欧拉）

$$E=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

首先来确定，这个积分一般对哪些参数值 a 有意义。奇值是 $x=\infty$, $x=0$ ($a\geqslant 1$ 时第二点就不是奇值了)。我們把这积分分解

成两个：

$$E=E_1+E_2=\int_0^1+\int_1^\infty;$$

第一个在 $a>0$ 时存在，因为(如果 $a<1$)被积函数在 $x\to0$ 时比起 $\frac{1}{x}$来成 $1-a<1$ 阶的无穷大[290 段]，而第二个在 $a<1$ 时存在：此时被积函数在 $x\to\infty$ 时比起$\frac{1}{x}$来成 $2-a>1$ 阶的无穷小[285 段]。如此該积分在 $0<a<1$ 时收斂；我們就在这假設之下来計算它。

对 $0<x<1$ 我們有級数展开式

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu x^{a+\mu-1},$$

它只要 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant1-\varepsilon'<1$ 就均匀收斂。但其部分和在 $[0,1]$ 中有可积分的控制函数

$$0\leqslant\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^\mu x^{a+\mu-1}=\frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x}<x^{a-1},$$

所以它的积分在 $x=0$ 及 $x=1$ 时都均匀收斂。按修改过的定理 1 逐項积分。得：

$$E_1=\sum_{\mu=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^\mu x^{a+\mu-1}dx=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{a+\mu}.$$

积分 E_2 由置換$x=\frac{1}{z}$化为

$$E_2=\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}dx.$$

应用上面已經得到的展开式我們求出：

$$E_2=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{a-\mu}.$$

如此，

$$E=\frac{1}{a}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{a+\mu}+\frac{1}{a-\mu}\right).$$

我們已經知道函数$\frac{1}{\sin t}$的“簡单分式分解”[**293** 段，3°；参閱下面 **406** 段，3）附注]：

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right).$$

这里設 $t=\pi a$，我們得最后的結果：

$$E=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi a}\qquad(0<a<1).$$

2°．要計算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

[参閱 **293** 段，3°]我們来考慮一个比較一般的含参变数的积分：

$$I(a)=\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx\qquad(a\geqslant 0),$$

前一积分可由此取 $a=0$ 而得。我們已經知道，积分 $I(a)$ 在 $a\geqslant 0$ 时对 a 均匀收斂[**302** 段，3)]，并且因此按 **304** 段定理 2 对那些值而言是参变数 a 的連續函数。特别是

$$I(0)=\lim_{a\to 0}I(a).\tag{10}$$

現在我們来求 $a>0$ 时的导数 $I'(a)$。在积分号下微分，我們得

$$I'(a)=-\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin x dx=-\frac{1}{1+a^2}$$

[283 段, 5)]。这个积分对 $a \geqslant a_0$ 均匀收斂 a_0 是任一指定的数，大于 0)，因为它被收斂积分

$$\int_0^\infty e^{-a_0 x} dx$$

所控制[302 段, 1°]；所以，至少对上述 a 值应用 306 段定理 6 是可以的。但不論 $a>0$ 如何取法，总可选取这样一个 $a_0>0$ 而使 $a>a_0$。这就是說，所得結果对任何 $a>0$ 都是对的。在这样的情形对 $a>0$ 我們有

$$I(a) = C - \operatorname{arctg} a.$$

要决定常数 C 我們令 a 趋于∞；因为

$$|I(a)| \leqslant \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

故在此 $I(a) \to 0$，而得出 C 等于$\frac{\pi}{2}$。最后由(10)有

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3°. 要重新来計算积分

$$K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

[参閱 293 段, 2°]，我們令其中 $x = ut$ 而 u 是一个任意的正数；如此得

$$K = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2} dt.$$

現在将这等式两边乘以 $e^{-u^2}du$ 而依 u 由 0 至∞积分之：

$$K\int_0^\infty e^{-u^2} du = K^2 = \int_0^\infty e^{-u^2} u du \int_0^\infty e^{-u^2t^2} dt.$$

不难看出，在此把两积分对調就可很快地得出結果。事实上，对調后得

$$K^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}\cdot udu=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},$$

因此(因为显然$K>0$)

$$K=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

要証实上述积分的对調是合理的我們利用 305 段定理 5 。虽然积分

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

对所有 $t\geqslant0$ 是 t 的連續函数，积分

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udt=e^{-u^2}K$$

則只对 $u>0$ 連續，而 $u=0$ 时它等于 0，在这点上就不連續了。所以不能直接应用定理 5 于矩形$[0,\infty;0,\infty]$；我們将它应用于矩形$[u_0,\infty;0,\infty]$$(u_0>0)$，这里利用了，积分

$$\int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}e^{-(1+t^2)u_0^2}$$

对所有 $t\geqslant0$ 都是 t 的連續函数。由此証实了等式

$$\int_{u_0}^\infty du\int_0^\infty e^{-u^2(1+t^2)}udt=\int_0^\infty dt\int_{u_0}^\infty e^{-u^2(1+t^2)}udu.$$

剩下只要把 u_0 变小而取 $u_0\to0$ 的极限，在此右边的极限能在积分号下来取——根据 304 段的推論。

4°. 最后，来看所謂拉普拉斯①积分:

$$y=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx \text{ 及 } z=\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx.$$

首先我們指出第一积分 y 对参变数 a 均匀收斂，因此(由定理2)也就对 a 連續，并且是对一切值 $a\geqslant 0$ [参閱 302 段, 1)]。假定 $a>0$, 由积分号下对 a 微分(定理 6)我們建立

$$\frac{dy}{da}=-z; \tag{11}$$

这里我們依据的是第二积分 z 对所有 $a\geqslant a_0$ 的均匀收斂性，而 a_0 是一个任意指定的正数[参閱 302 段, 2)]。

再对 a 在积分号下进行微分是不可能了，因为这样微分的結果已将得出发散的积分。

但是，如果在上面的等式和等式(参閱上面 2°)

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx②,$$

两边相加，則得

$$\frac{dy}{da}+\frac{\pi}{2}=k^2\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(k^2+x^2)}dx.$$

这里积分号下的微分又成为可能了，如此我們得出

$$\frac{d^2y}{da^2}=k^2\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx,$$

所以

$$\frac{d^2y}{da^2}=k^2y.$$

---

① P. S. Laplace(1749—1827)，是法国杰出天文学家数学家兼物理学家。

② 但是下面我們完全不需要这个积分的值；只要知道它在所有 $a>0$ 之下恒为常数，而这不难由簡单置换 $t=ax$ 看出。

对这个簡单的带常系数二阶綫性微分方程不难依“特征方程”的根$\pm k$組成通解

$$y=C_1e^{ka}+C_2e^{-ka},\tag{12}$$

这里C_1和C_2是常数。但在所有a值之下变数y是有界的：

$$|y|\leqslant\int_0^\infty\frac{dx}{k^2+x^2}=\frac{\pi}{2k},$$

这就是說，必須$C_1=0$（否則$a\to\infty$时y将无限制增大）。要决定C_2我們令$a=0$，因为由于y的連續性关系式(12)在这个a值上仍保持有效；于是显然

$$C_2=\frac{\pi}{2k}.$$

最后，

$$y=\int_0^\infty\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-ka}\qquad(a\geqslant0).$$

因此z又可由微分定出[参閱(11)]：

$$z=\int_0^\infty\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ka}\quad(a>0).$$

§4. 欧拉积分

309. 第一类型欧拉积分 根据勒让德尔的提議称具有如下形状的积分为第一类型欧拉积分：

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\tag{1}$$

这里$a,b>0$。它代表一个双参变数a,b的函数：B-函数（讀如“貝他函数”）。

我們知道所考慮的积分对a和b的正值（卽使小于1）是收斂

的[1]。因此它的确可以作为B函数的定义。我們来建立它的一些性質。

1°. 首先立即可以得出(由置换 $x=1-t$):

$$\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a),$$

如此，B-函数对 a 与 b 是对称的。

2°. 由公式(1)的分部积分在 $b>1$ 时我們得[2]:

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 (1-x)^{b-1}d\left(\frac{x^a}{a}\right)=$$

$$=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\bigg|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx=$$

$$=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=$$

$$=\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b),$$

由此有

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1). \tag{2}$$

这个公式可用来逐步减小 b，直到它不大于 1 为止；如此恒可使第二自变数变成 $\leqslant 1$。

但是这对第一个自变数也同样可以做到，因为由于 B 的对称性也成立另一个递推公式:

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a-1,b)\quad(a>1). \tag{2'}$$

如果 b 等于自然数 n，則累次应用公式(2)可得:

---

① 反之，参变数 a,b 之值如有一个 $\leqslant 0$，則該积分发散。

② 我們在此利用恒等式

$$x^a(1-x)^{b-2}=x^{a-1}(1-x)^{b-2}-x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}B(a,1).$$

但

$$B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}.$$

所以对 $B(a,n)$ 和 $B(n,a)$ 同时可得出这最后的式子

$$B(n,a)=B(a,n)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}.\qquad(3)$$

如果 a 也等于一个自然数 m, 則

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

如果 $0!$ 这个符号理解为 1, 則这个公式在 $m=1$ 或 $n=1$ 时也可应用。

3°. 我們給 B-函数另外一种解析表出法, 它也常常有用。卽, 如果在积分(1)中作置換 $x=\frac{y}{1+y}$, 而 y 是一个新变数, 由 0 变至 ∞, 則又得出

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy.\qquad(4)$$

这里令 $b=1-a$ (假設 $0<a<1$) 我們得

$$B(a,1-a)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}dy.$$

上面算出的那个积分, 也与欧拉有关, 它是讀者巳經知道的了[308段, 1°]。代入其值得公式

$$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}\quad(0<a<1).\qquad(5)$$

如果特別取

$$a=1-a=\frac{1}{2},$$

則得

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\pi.$$

我們只講B-函数的这几个性质，因为下面[311段，4°]可以知道它能很簡单地以另一种函数——"伽馬函数"——表出，这种函数我們将講得較为詳細。

310. 第二类型欧拉积分 这个名称勒让德尔用来指这个重要的积分：

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \tag{6}$$

它对任何 $a>0$ 都收斂[290段，4)][①]，而定义一个Γ-函数(伽馬函数)。Γ-函数是在分析及其应用上最重要的函数之一，仅次于初等函数。Γ-函数的性质如由其积分定义(6)出发来研究則同时也可作为以前所講含参变数积分理論的最好应用实例。

如果在(6)中令

$$x=\ln\frac{1}{z},$$

則得：

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}dz.$$

我們知道[65段，2)]

$$\ln\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right),$$

这里 $n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$ 隨 n 俱增而趋于其极限[②]。在这情形根据304段

---

① $a\leqslant 0$ 时該积分发散。

② 这只要将 $\frac{1-z^{\alpha}}{\alpha}$ 一式看作 α 的函数即可由微分学方法看出。

(推論)及 307 段有

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1 (1-z^{\frac{1}{n}})^{a-1}dz$$

或用置换 $z=y^n$ 而成

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy.$$

但按(3)有

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy=\mathrm{B}(n,a)=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}.$$

如此，終于得出下面著名的欧拉-高斯公式:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}.$$

这个公式欧拉于 1729 年已写信告訴古尔特巴赫(Goldbach)，但被遗忘。后来高斯即根据它作函数 $\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$ 的定义。勒让德尔及罗巴切夫斯基都对 Γ-函数有很多研究，而罗氏的出发点是他对 Γ-函数的独特定义，这个定义利用了无穷級数。

311. Γ-函数的简单性質 1°. 函数 $\Gamma(a)$ 在所有 $a>0$ 値之下連續且有各阶連續导函数。这只要証明各个导函数存在就行了。在积分号下微分积分(6)，得

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx. \tag{7}$$

因为两个积分

$$\int_0^1 x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx \text{ 及 } \int_1^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx$$

都对 a 均匀收斂: 第一个在 $x=0$ 时对 $a\geqslant a_0>0$ 均匀收斂（控制

函数为 $x^{a_0-1}|\ln x|$)，第二个在 $x=\infty$ 时对 $a\leqslant A<\infty$ 均匀收斂(控制函数是 $x^A e^{-x}$①)；所以在此可应用萊卜尼茲法則。

同样方式可証二阶及其他高阶导函数也都存在：

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx,\ \text{等等。} \tag{7*}$$

2°. 由(6)用分部积分法立卽得出：

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=x^a e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty x^a e^{-x}dx,$$

卽

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a). \tag{8}$$

重复施用这个公式可得

$$\Gamma(a+n)=(a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\dots\cdot(a+1)\cdot a\Gamma(a). \tag{8*}$$

这样要对任意自变数值 a 計算 Γ 时可归結为对 $0<a\leqslant 1$ (或对 $1<a\leqslant 2$ 也可隨方便而定)的計算。

如果在(8*)中取 $a=1$ 而注意

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1, \tag{9}$$

則得

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{10}$$

如此，Γ-函数就是 $n!$ 的自然推广，——后者本来只对自然数有定义，現在推广到自变数值是任何正数的范圍。

3°. Γ-函数的变化情況。現在我們可以对函数 $\Gamma(a)$ 在 a 由 0 增至∞时的变化情况有一个全盘的概念。

由(9)及(10)我們有：$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$，如此按洛尔定理在 1 与 2 之間导函数 $\Gamma'(a)$ 应該有一个根 a_0。这个导函数总是上升

① 对 $x>0$ 显然 $\ln x<x$。

的，因为二阶导数由其表出式(7*)可以看出总是正的。所以，在 $0<a<a_0$ 时导数 $\Gamma'(a)<0$ 而函数 $\Gamma(a)$ 下降，在 $a_0<a<\infty$ 时 $\Gamma'(a)>0$ 而 $\Gamma(a)$ 上升；在 $a=a_0$ 有一极小值。可算出(計算步驟不写出来了)：

$$a_0=1.4616\cdots, \min\Gamma(a)=\Gamma(a_0)=0.8856\cdots$$

还有值得来确定的是 $\Gamma(a)$ 在 a 趋于0或∞时的极限。由(8)(并由1°)显然在 $a\to+0$ 时

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{a}\to+\infty.$$

另一方面由(10)知道只要 $a>n+1$ 就有

$$\Gamma(a)>n!$$

即在 $a\to+\infty$ 时也有 $\Gamma(a)\to+\infty$。

函数 $\Gamma(a)$ 的图象如图5。

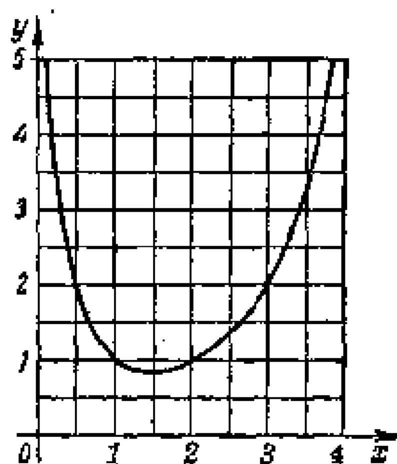


图 5

4°. B-函数与Γ-函数間的关系。要建立这种关系我們用置换 $x=ty\,(t>0)$ 将(6)变为这样的形式：

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy. \tag{11}$$

在此以 $a+b$ 替代 a 同时以 $1+t$ 替代 t，如此得

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

现在将这个等式两边乘以 t^{a-1}，而对 t 由0至∞积分之：

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^\infty t^{a-1}dt\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

左边的积分我們認出就是函数 $B(a,b)$[参閱(4)]；右边則我們将两个积分号調换次序。結果得出[考慮到(11)和(6)]：

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=$$

$$=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy=$$

$$=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

由此最后有

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{12}$$

这个欧拉关系式的上述精彩的推导法出于狄利希莱。但还須証明这里积分次序可以对調。

我們首先在假設 $a>1$, $b>1$ 之下来証明这一点。于是函数

$$t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}$$

滿足 305 段定理 5 的所有条件:这个函数对 $y\geqslant 0$ 及 $t\geqslant 0$ **連續**(并且是正的),而积分

$$t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy=\Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

及

$$y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=\Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}$$

也都是**連續**函数:第一个对变数 t 在 $t\geqslant 0$ 时而言,第二个則对变数 y 在 $y\geqslant 0$ 时而言。如此按該定理知积分次序的調換是合理的并且也就对 $a>1$, $b>1$ 的情形証明了公式(12)。

如果只知道 $a>0$, $b>0$, 則按已証我們有

$$\mathrm{B}(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

由此,利用 B-函数的递推公式(2),(2′)及Γ-函数的递推公式(8),不难重新得出公式(12),这回已沒有不必要的限制。

5°. 余元公式。如果在公式(12)里令$b=1-a$(認为$0<a<1$)則由(5)和(9)可得出关系:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{13}$$

它叫做余元公式。

在 $a=\frac{1}{2}$时由此可求得(因为 $\Gamma(a)>0$):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

在积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz=\sqrt{\pi}$$

中作置換 $z=x^2$ 我們重新得出巳知的积分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6°. 勒訨德尔公式。如果在下列积分

$$\mathrm{B}(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

中作置換

$$\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t},$$

則得

$$\mathrm{B}(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt=\frac{1}{2^{2a-1}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},a\right).$$

我們将两个 B-函数都换成它們的 Γ 表出式(12):

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

約去 $\Gamma(a)$ 并将 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$用它的值$\sqrt{\pi}$代入[參閱(14)]，即得下面的**勒讓德尔公式**:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

还有許多别的足以显露 Γ-函数深入性质的公式，我們不能在此細講了；同样也不能講 Γ-函数本身及其对数值的近似計算法。我們只能提一提，勒讓德尔已經利用 Γ-函数的性质及无穷級数工具做成了 $\Gamma(a)$ 的常用对数値表，a 由 1 至 2 以間隔 0.001 給出，开始是带 7 位数字的，后来是 12 位的。

这种已经不是初等的新函数 Γ 也如通常所謂初等函数一样地被我們所掌握了。

312. 例 現在我們举一些应用 Γ-函数的例子。

1) 积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx \quad (p, q, m>0)$$

由置换 $x^m=y$ 可立即化为第一类型欧拉积分:

$$\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

2) 我們来計算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi \quad (a, b>0).$$

如果令 $x=\sin\varphi$，則它化为积分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}dx.$$

利用前例有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

特例，在 $b=1$ 时由此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

不难驗証，这一个公式就包含 187 段的两个公式(5)。

如果在原积分中取 $a=1+c$，$b=1-c$，而 $|c|<1$，則得(应用余元公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

3) 最后，我們再来看一个积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{\frac{p}{q}}x}{x}dx,$$

这里 p 和 q 是互素奇数。

将該积分改写为

$$\int_0^{\infty}\sin^{\frac{p-q}{q}}x\cdot\frac{\sin x}{x}dx,$$

而在它上面应用 135 頁上講过的罗巴切夫斯基一般公式。使这个公式能成立的条件：

$$f(x+\pi)=f(x) \text{ 及 } f(\pi-x)=f(x),$$

对函数

$$f(x)=\sin^{\frac{p-q}{q}}x$$

而言是满足的。如此得[参閱 2)]

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{\frac{p}{q}}x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{p}{q}-1}x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2q}\right)}.$$

由这几个例子讀者已可明白，Γ-函数的引入使得以有限形式用已知函数表出积分的可能性增大了多少。有时即使最后結果不含Γ-函数也因利用了这种函数的性質而使結果得来容易一些。

313. 关于两个极限运算次序对調的史話 这結尾一段的目的是要將本书各处所講一切关于两极限运算对調的話作一对比。所謂"极限运算"我們在此理解为对所論函数某自变数的直接的极限过程，并且也指其他最后归結为这种极限过程的极限运算，如：无穷級数求和，函数的微分法，函数在常数限間的积分法(依正常意义或非正常意义)等。

在131段已講到两个累次极限的相等：

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y). \tag{15}$$

我們已看到，这样的等式不是总成立的，并且建立了一些保証其成立的条件。在147段里对两个混合导数的相等也有类似的情形：

$$D_yD_xf(x,y)=D_xD_yf(x,y). \tag{16}$$

第十六章("函数序列及級数")主要地就講的是当前这种問題：那里討論了在什么条件之下无穷級数求和运算容許与寻常极限过程对調[266, 268段]，与微分法对調[270段]，与积分法对調[269段]。本章內容也正如此。这回运算之一总指的是积分运算，而我們在一定条件之下逐一考慮其与別的极限运算对調[296—298, 304—307各段]。

远在这里講的那些运算被理解为"极限"运算之前(这一过程大家知道是十九世紀初才完成)两个这种运算的对調已在数学实踐中成了牢固的傳統。甚至連奠基者事实上也已这样做：試回忆牛頓，莱卜尼茲及其同时代的人对級数的微分法与积分法以及关于积分依參变数的微分法的"莱卜尼茲法則"就是如此。在整个十八世紀期間的文献中，我們不断地可看到这种对調，常常是沒有根据的，有时固然有証明，但当然也限于当时的严密性水平；例如欧拉和克萊罗奠立两个微分运算的对調时(1739年)所用的論証就是如此。我們可以說，在数学分析史中两个极限运算的对調恒为得出一般結論及个別数学事实的有力武器。但用得不正当时它就会成为錯誤与自相矛盾的根源。两个极限运算不是永远准許对調，这种思想本身就在分析錯誤的基础上慢慢

成熟起来，而在十九世紀中叶成为大家共有的知識。对这种对調在分析中常見的那些情形的严密基础，則大約到該世紀之末才奠定。

关于两个极限过程对調的較簡単問題自然是很早就搞明白的。在十八世紀与十九世紀之交，已經以簡单的例子指出等式(15)可以不成立，即累次极限有时与取极限次序有关。在1815年哥西的一篇扎記里(发表于1827年)我們可看到这个問題的正确而透彻的叙述。

高斯也与哥西一样知道，在累次积分中求积分的次序在被积函数不連續时(例如趋于无穷)是不能无条件改变的。但关于两极限运算对調的一般情形还远未搞清楚。

我們在281段已經有机会提到过哥西这种未成功的尝試：他甚至想証明連續函数級数之和是連續的，并且这种級数可以逐項积分。前者立即被亚培尔所推翻，后者則后来引起了契貝謝夫的异議。在此我們再补充一句：1823年哥西对可无条件应用含参变数积分微分法的"萊卜尼茲法則"也同样給了不正确的証明，虽然此时已經有了該法則不适用的实例。在1828年奧斯脫罗格拉德斯基已經明白了解，在被积函数趋于无穷的情形可能不容許积分号下的微分法。这情形后来还有別人指出过。

在无穷小分析教本中直到四十年代还常常可碰到关于这些問題的不正确結論。同时强調对这些必須謹愼的例子也增多了。我們只举一个最早的，还是傅立叶所指出的：

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

(293段附注)。显然，

$$\lim_{\alpha\to\pm 0}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} dt \neq \int_0^\infty \lim_{\alpha\to\pm 0}\frac{\sin \alpha t}{t} dt = 0,$$

另一方面，这个积分在积分号下对变数 α 微分則导至这样的結果：

$$\int_0^\infty \cos \alpha t\, dt,$$

它在一切 α 值均无意义［283段，6)］。

各种极限运算可对調的条件，漸漸感到其有明确化的必要了。促进这明确化的是四十年代末出現的級数均匀收斂概念［281段］及其接近的积分均匀收斂概念。但这类問題的叙述中所不可少的严密性却还要經过几十年才

逐漸建立起来。例如，公式(16)的最先严密奠基是1873年希瓦尔茨的事情。在1892年比利时科学院还因德·拉·瓦莱·布聊①的論著給出无穷区間上积分号下微分法与积分法等等的条件而授与了奖金。

① C. de la Vallée Poussin (生于1866年)是当代比利时数学家。

第十九章　隐函数·函数行列式[①]

§1. 隐函数

314. 一元隐函数概念　設有两个变数 x 和 y，其值由一个方程式彼此联系起来，若这方程的一切項都移至左边，它一般有这样的形式：

$$F(x,y)=0. \tag{1}$$

这里 $F(x, y)$ 是給定在某区域上的一个二元函数。如果对某区間內每个 x 值恒存在一个或多个 y 值，与 x 一起滿足方程(1)，則由此确定了一个单值或多值的函数 $y=f(x)$，能使

$$F(x,f(x))=0 \tag{2}$$

对 x 成恒等式。

例如，取方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{1a}$$

它显然在区間$[-a, a]$內确定 y 为 x 的一个双值函数，即

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

如果在方程(1a)里以这个函数替代 y，則得一恒等式。

这里我們已找出了 y 的一个很簡单的 x 的解析表出式，并且是一个初等函数，但这决不是永远能做到的事情。

一个函数 $y=f(x)$ 如果由未对 y 解出的方程(1)所給出，則称为隐函数；如果考慮的是 y 对 x 的直接关系，則它成为显函数。讀

① 第一卷第八章与第九章之續。

者当可明白，这些名称只对函数 $y=f(x)$ 的表出法而言，并与函数的本性无关。严格說来，函数表出法的隐式与显式之分只有显式被理解为显的解析表出式时才具有完全明确的意义；如果以任何法則［17段］来表出的函数都認作显函数，則 x 的函数 y 用方程(1)的表出法也并不劣于任何别的表出法。

在最簡单的情形，当(1)是代数方程时，即 $F(x,y)$ 为 x 与 y 的多項式时，則它确定的 x 的隐函数 y（一般是多值的）称为代数函数。如方程次数（对 y 而言）不高于4，則代数函数能以根式表为显式，次数高于 4 时則这种表出式只在例外情形才可能。

現在我們感覺兴趣的只在"隐"函数的存在問題及单值問題（以及其其他性質）而不論它能否用分析公式表示为"显"式与否。但是，这問題对我們并不新鮮；其特例我們在談反函数存在及性質时已碰到过，并且曾以方程

$$y-f(x)=0$$

将变量 x 确定为 y 的"隐"函数。

有教益的是本問題的几何解釋。方程(1)在某些条件之下表示一条平面曲綫［例如方程(1a)大家知道表示的是一个椭圓（图6）］；而在这情形它就称为該曲綫的隐式方程。問題就在于，曲綫(1)（或其一部分）是否能用象 $y=f(x)$ 这样右边带单值函数的寻常方程式表出；用几何語言来説这就是，該曲綫（或其一部分）只与 y 軸的平行綫交于一点。

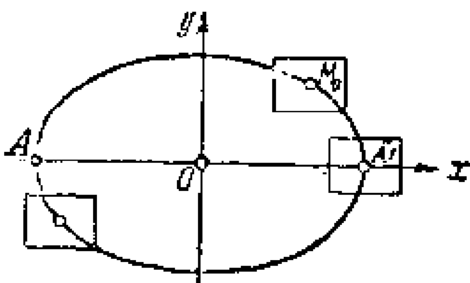


图 6.

由此椭圓的例子可見，如果我們要有单值的函数，則不但 x 的变域要有限制，y 的变域也要有所限制。

如果在区間 (a,b) 内的每点上方程(1)有一个，并且也只一个在区間 (c,d) 内的根 $y=f(x)$，則我們为簡单起見就説，方程(1)在

矩形$(a, b; c, d)$内将 y 确定为 x 的单值函数 $y=f(x)$。

我們要牢記，在所說条件之下，方程

$$F(x, y)=0 \text{ 和 } y=f(x)$$

在矩形$(a, b; c, d)$内完全等价，即为这个矩形内的点所满足。

寻常我們感觉兴趣的是满足方程(1)的点$M_0(x_0, y_0)$已經确定(在曲綫上)而所說的矩形就是这个点的一个邻域。例如，在椭圓(图 6)的情形，显然可以肯定，方程(1a)在椭圓的任何一点的一个充分小的邻域内都将縱标 y 确定为横标 x 的单值函数，只有长軸两端点 A, A' 是例外。

315. 隐函数的存在及性質 現在我們来指出一些关于已知函数 $F(x, y)$的简单而易于驗証的条件，它們不仅保証一个单值隐函数 $y=f(x)$ 的存在，并且也保証这函数有連續性及可微分性。

定理 1. 設 1) 函数 $F(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义并且連續，其偏导函数 F'_x 及 F'_y 也連續；

2) $F(x, y)$ 在这一点上等于 0: $F(x_0, y_0)=0$, 但

3) 导函数 $F'_y(x, y)$在这一点上异于 0: $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$。

于是：

a) 在点$M_0(x_0, y_0)$的某一邻域

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta')$$

内方程 (1) 把 y 确定为 x 的一个单值函数: $y=f(x)$;

б) 在 $x=x_0$ 时这个函数取这个值 y_0: $f(x_0)=y_0$;

в) 在区間$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内函数 $f(x)$。連續并且

г) 它在这区間内有連續的导函数。

証明 a)設，比方說，$F'_y(x_0, y_0)>0$。按假設 1) 导函数 F'_y 是連續的，所以这导函数在点(x_0, y_0)充分小的邻域内[①]是正的

① 例如，在满足这不等式的邻域内：

$$|F'_y(x, y)-F'_y(x_0, y_0)|<F'_y(x_0, y_0).$$

$$F'_y(x,y)>0.$$

我們取一个閉矩形

$$\mathscr{D}=[x_0-\delta',x_0+\delta';\ y_0-\delta',y_0+\delta'],$$

完全落在該邻域內，如此上面那不等式在其所有点上都成立。

由此立卽推知，在区間 $[x_0-\delta',x_0+\delta']$ 內任何常数 x 之下 $F(x,y)$ 对 y 而言是单調上升函数[111 段]。

我們先令沿通过点 $M_0(x_0,y_0)$ 的鉛垂綫而移动（图 7），卽固定 $x=x_0$；于是所論函数 $F(x,y)$ 成为一个变数 y 的函数 $F(x_0,y)$。由

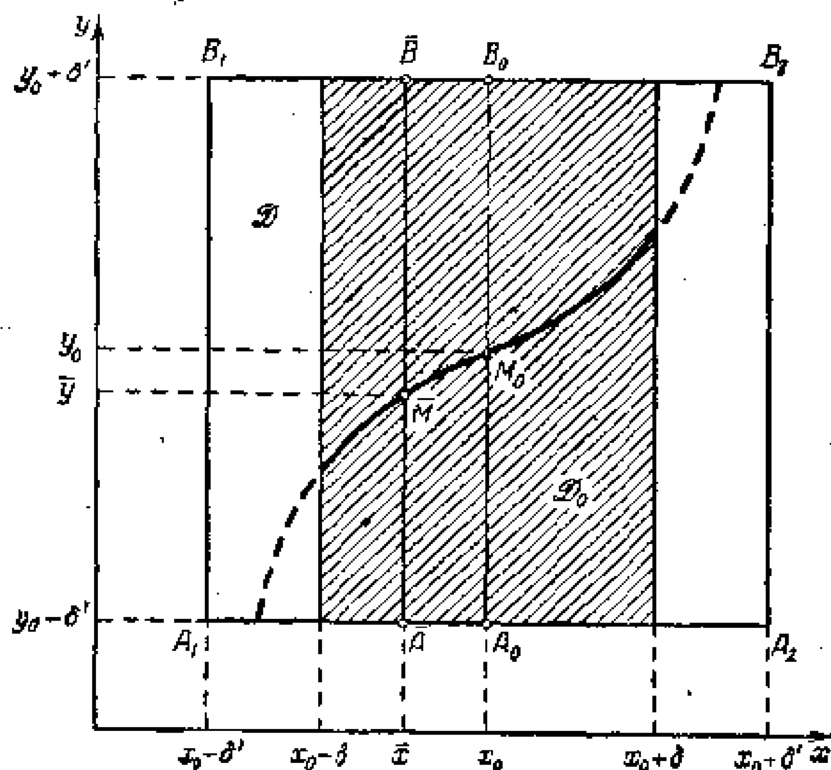


图 7.

2）它在 $y=y_0$ 时等于 0。同时我們剛才証明了函数 $F(x_0,y)$ 随 y 而上升，如此对 $y<y_0$ 其值将小于 0，而对 $y>y_0$ 其值将大于 0。所以，在特例，它于点 $A_0(x_0,y_0-\delta')$ 及 $B_0(x_0,y_0+\delta')$ 将有正負号不同的值，卽

$$F(A_0)=F(x_0,y_0-\delta')<0,\quad F(B_0)=F(x_0,y_0+\delta')>0.$$

現在我們来看通过这 A_0 及 B_0 两点的水平綫，卽这回我們固

定 $y=y_0-\delta'$ 或 $y=y_0+\delta'$。如此对 x 而言得到两个一元函数：$F(x, y_0-\delta')$ 及 $F(x, y_0+\delta')$，在 $x=x_0$ 时第一个函数有負值而第二个函数有正值。但按条件 1) 这两个函数是連續的[1]，因此可以找到点 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(0<\delta\leqslant\delta')$，在这里面两个函数保持其正負号[2]，如此，在 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时

$$F(x, y_0-\delta')<0,\ \ F(x, y_0+\delta')>0.$$

換句話説，沿着矩形下底及上底 A_1A_2 及 B_1B_2 上各以 A_0 及 B_0 为中心而长 2δ 的綫段，所給函数 $F(x, y)$ 各有負值及正值。

我們在区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 內指定任意一个值 $x=\bar{x}$ 并且来考慮一条連結点 $\bar{A}(\bar{x}, y_0-\delta')$ 和 $\bar{B}(\bar{x}, y_0+\delta')$ 的鉛垂綫。沿此綫我們的函数又成为一个变数 y 的函数 $F(\bar{x}, y)$。因为它是連續的[3]，并且依照剛才説的，在区間 $[y_0-\delta', y_0+\delta']$ 两端有不同的正負号：

$$F(\bar{A})=F(\bar{x}, y_0-\delta')<0,\ \ F(\bar{B})=F(\bar{x}, y_0+\delta')>0,$$

則按波尔察諾-哥西定理[68 段]在某一介于 $y_0-\delta'$ 与 $y_0+\delta'$ 間的值 $y=\bar{y}$ 上这个函数 $F(\bar{x}, y)$ 等于 0：

$$F(\bar{x}, \bar{y})=0.$$

这里仍由函数 $F(\bar{x}, y)$ 的单調性推知在 $y\gtrless\bar{y}$ 时将相应地有 $F(\bar{x}, y)\gtrless 0$，如此 $\bar{y}$ 是区間 $(y_0-\delta', y_0+\delta')$ 內惟一的一个能与 $x=\bar{x}$ 一起滿足方程 (1) 的 y 值。在每一鉛垂綫段 $\bar{A}\bar{B}$ 上都可找到唯一的一点 $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ 使該方程左边等于 0。

如此，在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta, x_0+\delta;\ y_0-\delta', y_0+\delta')$$

里方程(1)事实上将 y 确定为 x 的一个单值函数 $y=f(x)$。

---

[1] 我們假設了函数 $F(x, y)$ 对变数 x, y 总起来連續；但这时它对每一变数各別也連續。

[2] 这可由 37 段 2) 推知。参閱 184 頁底注。

[3] 参考足注[1]。

б) 由 2)前面的論証同时也就証明了 $f(x_0)=y_0$。事实上，由 $F(x_0, y_0)=0$，我們看出 y_0 就是区間 $(y_0-\delta', y_0+\delta')$ 内那一个能与 $x=x_0$ 一起滿足方程(1)的唯一的 y 值。

в) 現在来証明 в)及 г)，我們将 y 理解为就是那个由方程(1)所确定并且恒等地滿足該方程的隱函数 $y=f(x)$。給 x 以增量 Δx；增大后的值 $x+\Delta x$ 将相应于函数值 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$，二者一起滿足方程(1)：$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$。显然，增量

$$\Delta F(x, y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0.$$

現在利用有限增量公式来变換这个等式如下[102 段]：

$$\begin{aligned}
0 &= F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)= \\
&=[F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)]+ \\
&\quad+[F(x, y+\Delta y)-F(x, y)]= \\
&=F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x+F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y \\
&\qquad (0<\theta, \theta_1<1),
\end{aligned}$$

由此有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)}. \tag{3}$$

首先来証明，$\Delta x\to 0$ 时則也 $\Delta y\to 0$，卽函数 $y=f(x)$ 連續。我們有

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=\frac{|F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)|}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)}.$$

但在 $\mathscr{D}$ 内連續的函数 $|F'_x|$ 有有限的上界 M[137 段]

$$|F'_x|\leqslant M,$$

同时正連續函数 F'_y 在 $\mathscr{D}$ 内有最小值 m[137 段]，m 也是正的，因此就是 F'_y 的一个下界：

$$F'_y\geqslant m>0.$$

現在不难得出估計式：

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leqslant \frac{M}{m}$$

或

$$|\Delta y| \leqslant \frac{M}{m}|\Delta x|,$$

由此推出所要証明的結論。

г) 再看等式(3)，現在假設 $\Delta x \to 0$。因为我們已經知道，此时有 $\Delta y \to 0$，故由函数 F'_x 和 F'_y 的連續性并考慮到 $F'_y \neq 0$ 得右边的极限

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

这也就是等式(3)左边的极限，如此存在 y 对 x 的导函数：

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{4}$$

在此以 $f(x)$ 代 y，得

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

因为分子分母都是連續函数的連續函数并且分母不等于 0，由此明白 $f'(x)$ 也是連續函数。至此本定理完全証明。

如此，由直接給出的函数 $F(x, y)$ 的性質我們能判断沒有直接給出的函数 $y = f(x)$ 的函数的性質！

我們已經在 **314** 段講过这里所討論的問題的几何解釋。如果曲綫是由隱式方程(1)給出的，并且在其某一点上 $F'_y \neq 0$，則在此点邻近該曲綫可以用这样的显式方程表出：$y = f(x)$。当然，x 与 y 可以調換地位：如果在某点 $F'_x \neq 0$，則在其邻近該曲綫可用另一种显式方程表为：$x = g(y)$。只在同时 $F'_x = 0$ 且 $F'_y = 0$ 的"奇点"上[**210** 段]我們的定理才沒有用处。

316. 多元隱函数 与方程(1)相似，也可考慮变数較多的方

程。例如，設我們有一个三元方程:

$$F(x, y, z)=0. \tag{5}$$

在一定条件下，这个方程将 z 确定为两个变数 x 和 y 的"隐"函数:

$$z=h(x, y)$$

它一般說来是多值的。如果以它代 z，則有

$$F(x, y, h(x, y))=0 \tag{6}$$

这已經是对 x, y 的恒等式。

如果对矩形

$$(a, b; c, d)$$

內任何一点 (x, y) 方程 (5) 在区間 (e, f) 內有一个且只有一个根 $z=h(x, y)$，則我們說方程(5)在长方体

$$(a, b; c, d; e, f)$$

內把 z 确定为 x 和 y 的单值函数。

在这情形之下，方程

$$F(x, y, z)=0 \text{ 与 } z=h(x, y)$$

在长方体 $(a, b; c, d; e, f)$ 內就完全等价。

这种长方体通常就是所考慮的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域。

現在陈述一个关于方程(5)的定理。

定理 2. 我們假設

1) 函数 $F(x, y, z)$ 連同其偏导函数都在某一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻近有定义并且連續;

2) 函数 F 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于 0; 并且

3) 导函数 F'_z 在这一点上不等于 0。

于是:

a) 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域

$$\mathscr{E}_0=(x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0+\Delta'; z_0-\Delta'', z_0+\Delta'')$$

內方程(5)将 z 确定为 x 和 y 的单值函数 $z=h(x, y)$;

б) 在 $x=x_0, y=y_0$ 时 $h(x_0, y_0)=z_0$;

в) 函数 $h(x, y)$ 对其自变数总起来連續并且

г) 它有連續的偏导函数 h'_x, h'_y。

証明完全与定理1相似,故从略。

这回方程 (5) 的几何形象是曲面。在 $F'_z\neq 0$ 的条件下在相应点邻近这曲面可表为显式方程 $z=h(x, y)$ 的形式。如果在某一点上同时有 $F'_x=F'_y=F'_z=0$ 則本定理不能应用——这时該点是“奇点”[213 段]。

317. 由方程組所定的隱函数 最后,在最一般的情形,可以給出一組带有 $n+m$ 个变数的 m 个方程:

$$\left.\begin{array}{l}F_1(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0,\\ F_2(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_m(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0.\end{array}\right\}\tag{7}$$

这里要討論的是由这組方程将 m 个变数 $y_1, \cdots, y_m$ 确定为 n 个变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数:

$$y_1=f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \quad y_m=f_m(x_1, \cdots, x_n),$$

而代入(5)可得一組对 $x_1, \cdots, x_n$ 的恒等式。

我們来討論一个最簡单的情形——三元二式联立方程組:

$$\left.\begin{array}{l}F(x, y, z)=0,\\ G(x, y, z)=0.\end{array}\right\}\tag{8}$$

如果在对区間 (a, b) 内每个 x 值方程組 (8) 在矩形 $(c, d; e, f)$ 内有一組且只有一組解 $(y=f(x), z=g(x))$, 則称这組方程在长方体

$$(a, b; c, d; e, f)$$

内将 y 及 z 确定为 x 的单值函数: $y=f(x), z=g(x)$。

在这些条件下显然方程組 (8) 在长方体范圍内等价于方程組

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x), \\ z=g(x). \end{array}\right\}$$

我們已看到，在由一个方程(1)[或(5)]所确定的单值隱函数存在問題中起决定性作用的条件是，要在某一滿足該方程的点上导函数 F'_y[或 F'_z]不等于 0，即对所要确定为隱函数的变数的偏导函数要不等于 0。我們就将討論的，由方程組(8)所确定的单值隱函数 y, z 存在問題中起类似作用的是一个行列式，它由方程組(8)左边諸函数对所要确定的变数 y 及 z 的四个偏导函数所組成:

$$J=J(x, y, z)=\begin{vmatrix} F'_y, F'_z \\ G'_y, G'_z \end{vmatrix}. \tag{9}$$

定理 3. 設:

1) 函数 $F(x, y, z)$ 及 $G(x, y, z)$ 連同其所有偏导函数都在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 某邻域內有定义并且連續;

2) 点 P_0 滿足方程組(8):

$$F(x_0, y_0, z_0)=0, \quad G(x_0, y_0, z_0)=0;$$

3) 行列式 $J(x, y, z)$ 在这一点上不等于 0: $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$。

于是:

a) 在点 P_0 某一邻域

$$\mathscr{M}=(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta'; z_0-\delta'', z_0+\delta'')$$

內方程組(8)将 y 及 z 确定为 x 的单值函数: $y=f(x)$, $z=g(x)$;

б) 在 $x=x_0$ 时这些函数各具有值 y_0, z_0: $f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=z_0$;

в) 在区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 內函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 連續;并且

г) 有連續导函数 $f'(x), g'(x)$。

証明　因为行列式 J 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 不等于 0，故其第二列至少有一元素在这一点上也不等于 0; 比方說，設

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

在这情形按定理 2 在点 P_0 某邻域

$$\mathscr{E}_0=(x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0+\Delta'; z_0-\Delta'', z_0+\Delta'')$$

內方程(8)的第一式将 z 确定为 x 及 y 的单值函数: $z=h(x, y)$, 它具有該定理結論 б), в), г) 中所列举的性質。在方程組(8)中将第一式用它的等价方程(在 $\mathscr{E}_0$ 范圍內等价) $z=h(x, y)$, 代替得一等价方程組

$$\left.\begin{aligned} G(x, y, z)=0, \\ z=h(x, y). \end{aligned}\right\}$$

最后, 如果在 $\mathscr{E}_0$ 內以 $h(x, y)$ 代 z, 則得一組更簡单而仍等价的方程

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y)=0, \\ z=h(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这里为簡单起見令

$$\Phi(x, y) \equiv G(x, y, h(x, y)). \tag{11}$$

如此, 我們把問題化为要証明在点 P_0 的某一(包含在 $\mathscr{E}_0$ 內的)邻域 $\mathscr{M}_0$ 內方程組(10)将 y 及 z 确定为 x 的单值函数, 且具有一切所要求的性質。利用方程組(10)第一式只含变数 x, y 这一有利情形而将其化为已証明的定理 1: 如果能証明这方程把 y 确定为 x 的单值函数 $y=f(x)$, 則 z 也不难由方程組(10) 第二式确定为 x 的单值函数:

$$z=h(x, f(x))=g(x). \tag{12}$$

我們着手来驗証对函数 Φ 定理 1 的条件都实現; 首先看出

$$h(x_0, y_0)=z_0 \tag{13}$$

[б)定理 2], 并且由函数 $h(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的連續性这函数在点 M_0 近处的值可与 z_0 任意接近。于是在点 M_0 充分小的邻域內函数 $\Phi(x, y)$ 連同其偏导函数都将連續, 因为組成它的函数 $G(x, y, z)$ (在 P_0 近处)及函数 $h(x, y)$ (在 M_0 近处)都是如此的[參閱(11)]:

同样，由(12)，(13)及本定理假設 2)，定理 1 的条件 2) 也实現:

$$\Phi(x_0, y_0) = G(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = G(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

剩下只要驗証定理 1 的条件 3)。将(11)对 y 微分之得

$$\Phi'_y(x, y) = G'_y + G'_z \cdot h'_y. \tag{14}$$

但 h'_y 可以就恒等式(6)对 y 微分而得·

$$F'_y + F'_z \cdot h'_y = 0, \quad 由此有\ h'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

将此式代入(14)。即得結果

$$\Phi'_y(x, y) = G'_y - G'_z \cdot \frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{J}{F'_z},$$

但右边自变数 z 处处应代以 $h(x, y)$。由(13)，左边的点 $M_0(x_0, y_0)$ 相应于右边的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$。因为按条件 3) 行列式 J 在点 P_0 异于 0，故导函数 Φ'_y 在点 M_0 也异于 0。

現在我們已經能应用定理 1 到方程 $\Phi(x, y) = 0$ 而肯定在点 M_0 某一邻域

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta')$$

$(0 < \delta < \Delta,\ 0 < \delta' < \Delta')$ 内这个方程的确将 y 确定为 x 的单值函数 $y = f(x)$，于是(如上面已指出过)公式(12)也将 z 确定为 x 的单值函数。

作为 а) 中所說的邻域 $\mathscr{M}_0$，可以取长方体

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta'; z_0 - \delta'', z_0 + \delta''),$$

并令 $\delta'' = \Delta''$。本定理的結論 б)，в)及 г)可由定理 1 和 2 中所陈述的函数 $f(x)$ 及 $h(x, y)$ 的性質来証实。

这里定理也可給以几何的解釋。方程組 (8) 一般說来表示一条空間曲綫——即两曲面之交綫，每一曲面各由一个方程表出。如果在某点上有偏导函数矩陣

$$\begin{pmatrix} F'_x, F'_y, F'_z \\ G'_x, G'_y, G'_z \end{pmatrix}$$

的某一个二阶行列式，比方說，行列式(9)异于0，則在所考慮的点的邻域內有两个坐标(在当前情形是 y 和 z)可以看作是第三个(x)的函数，卽該曲綫可用显式方程 $y=f(x)$, $z=g(x)$ 表出。这个定理只在"奇点"上不能应用，此时矩陣的三个行列式同时全等于0。

对方程組(7)的一般形式也可用数学归納法証明类似的定理。归納法是依方程个数进行的，就象剛才把两个方程的情形化归为一个方程的情形一样。这个一般定理我們不来陈述和証明了。要注意的只是，在方程組(7)所确定的隐函数組 $y_1, \cdots, y_m$, 存在問題中起决定性作用的是行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

它应該在給定的点(其邻域是我們所考慮的)上异于0。

附注 讀者要注意所有隐函数存在定理的局限性总是对一点的某一邻域而言。但卽使在这种形式下这些定理也已很有用处了；例如，研究几何形象在其上一給定点处的性质时只要限于其緊邻就完全够了。

318. 隐函数导数的計算 在建立隐函数存在定理的論証过程并不一定对隐函数(一阶)导数的計算法有所指示。关于高阶导数更完全談不到。現在我們来专講这个重要問題。

我們由方程(1)已給出时的最簡单情形开始。設在所考慮的点的邻域內定理1的条件已实現；以后起重要作用的是 $F'_y \neq 0$ 这个条件。

因为 x 的隐函数 y 本身及其导函数 y'_x 的存在預先已經知道，則这个导

函数的計算手續可以由等式(1)

$$F(x,y)=0,$$

对 x 的微分来实現，这等式如果将 y 理解为就是由此所定的隱函数，則化为恒等式。我們得到[如 141 段 4)已有]

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'_x=0, \tag{15}$$

由此重新得出已知的公式(4)

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

現在我們可以継續下去。如果函数 $F(x,y)$ 有二阶連續导数，則公式(4)右边的式子可以依 x 微分，因此也存在 y'_x 的导数，即隱函数 y 的二阶导数 y''_{x^2}。进行微分并每次将 y'_x 代以其表出式(4)，如此得出:

$$y''_{x^2}=\frac{(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot F'_x-(F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x)\cdot F'_y}{F'^2_y}=$$

$$=\frac{2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy}-F'^2_y\cdot F''_{x^2}-F'^2_x\cdot F''_{y^2}}{F'^3_y};$$

由此可見，二阶导函数是 x 的連續函数。

如果函数 $F(x,y)$ 有三阶的連續导函数，則显然也存在隱函数的三阶导函数 y'''_{x^3}；其表出式又可以由 y''_{x^2} 的式子直接微分得出，如此类推。不难用数学归納法証明，函数 $F(x,y)$ 如果有直达 k 阶为止的連續导函数($k>1$)則可保証隱函数也有同样各阶的連續导函数。

在証明了隱函数相継各阶导函数的存在以后，它們的計算可以用較簡单的办法进行，只要把 y 看作 x 的函数而逐次微分恒等式(15)就行了。例如，由这个恒等式第一次微分得

$$F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x+(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot y'_x+F'_y\cdot y''_{x^2}=0,$$

由此有(注意 $F'_y\neq 0$)

$$y''_{x^2}=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'_x+F''_{y^2}\cdot y'^2_x}{F'_y};$$

将 y'_x 代之以其表出式(4)即得已經求出的 y''_{x^2} 的表出式；其余类推。

例 1) 設 y 与 x 由下面的方程式

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

联系着。逐次依 x 微分之(y 看作 x 的函数)，首先得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2} \text{ 或 } x+yy'=xy'-y;$$

然后得

$$1+y'^2+yy''=xy'';\cdots$$

由第一个方程算出

$$y'=\frac{x+y}{x-y},$$

由第二个方程算出(如以所求得 y' 值代入)

$$y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$$

如此类推。

方程(5)

$$F(x, y, z)=0$$

的情形也相似。这里我們假設定理 2 的条件已实現。如果 z 理解为由这个方程所定的隐函数，則此方程成恒等式，可依 x 微分，也可依 y 微分。結果得

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

(第二等式我們本来已在定理 3 証明中以同样方法得出)

如果函数 F 有二、三、…阶的連續导函数，則函数 z 也有这样的导函数：这全与上面所說关于方程(1)的情形讲过的一样。

如果需要所有一、二、三、…各阶的导数，則比較簡单的是一下子算出 dz, $d^2z, \cdots$。对我們的恒等式两边求全微分，即令其左边的全微分等于 0 (在此利用143 段一阶微分形式的不变性)：

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

如此

$$dz=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

同时

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

既然 dx 和 dy 是任意的，故显然有①

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

和以前所得一样。

再微分一次，得

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dz\right]dx+\cdots+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0$$

然后决定 d^2z，这导至

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

的表出式，其余如此类推。我們可看到，在所有这些計算中条件

$$F'_z=\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

起基本作用。

例 2) 設 x, y 的隐函数 z 由下面方程所決定：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

我們相継有

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0,\qquad dz=-\frac{c^2x}{a^2z}dx-\frac{c^2y}{b^2z}dy,$$

如此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

然后有

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{zd^2z}{c^2}=0,$$

由此得（如利用 dz 的已知表出式）

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

这給我們

---

① 等式 $Adx+Bdy=A'dx+B'dy$ 在 dx 和 dy 的值任意时只能当 $A=A'$ 并且 $B=B'$ 时才能成立。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

如此等等。

現在來看方程組(8):

$$\left.\begin{array}{l}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{array}\right\}$$

我們假設，在所取的点邻近定理3的条件实現。还是要注意条件$J\neq0$所起的作用。

我們知道，x的隱函数y和z有对x的导函数。它們可这样計算：将y和z理解为所說的隱函数因而由(8)得出一恒等式。将此恒等式对x微分得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

这是一組关于未知数$\frac{dy}{dx}$及$\frac{dz}{dx}$的綫性方程，其行列式J异于0。两个对x的导函数不难由此决定。

我們不在此重复关于利用全微分及关于高阶导数存在和計算的附注。

以上說的全都可以推广到一般的情形。

例 3) 設給了一組方程

$$x+y+z+u=a,\qquad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2\qquad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$

将y,z,u确定为x的函数。我們有

$$1+y'+z'+u'=0,\qquad x+yy'+zz'+uu'=0,$$

$$x^2+y^2y'+z^2z'+u^2u'=0.$$

設行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ y&z&u\\ y^2&z^2&u^2\end{vmatrix}=(z-y)(u-y)(u-z)$$

不等于0，由此有

$$y'=-\frac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)},\text{ 如此等等。}$$

§2. 隐函数理論的一些应用

319. 相对极值 我們来討論 $n+m$ 元函数 $f(x_1, \cdots, x_{n+m})$ 的极值問題。假設这 $n+m$ 个变数間还有 m 个"約束方程"

$$\Phi_i(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})=0.$$

$$(i=1, 2, \cdots, m)$$

我們来明确化这种相对极值的概念并且指出其求法。

如果对满足約束方程的点 $P_0(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$ 某邻域内所有满足該方程的点 $(x_1, \cdots, x_{n+m})$, 不等式

$$f(x_1, \cdots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$$

$$(\geqslant)$$

都成立, 則称函数 $f(x_1, \cdots, x_{n+m})$ 在点 $P_0(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$ 上有一相对极大值(极小值)。

例如, 如果所談的是函数 $u=f(x, y, z)$, 其三个变数間还有一約束方程

$$F(x, y, z)=0,$$

則求函数 u 的相对极值其几何意义就是要在上式所表的曲面上找极值: 极值点本身及与它对比的点都应落在这个曲面上。如果有两个約束方程

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0,$$

則显然問題就是要在这些方程所表的曲綫上来考慮了。

現在来詳細叙述这个問題, 而为写起来簡单起見只限于四元函数

$$u=f(x, y, z, t)$$

其各变数間有两个約束方程

$$F(x, y, z, t)=0, \quad G(x, y, z, t)=0. \tag{1}$$

設函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 有一相对极值。我們假設函数 f 以

及F和G在該点邻近对所有自变数都有連續偏导函数。其次，設偏导数矩陣

$$\begin{pmatrix} F'_x F'_y F'_z F'_t \\ G'_x G'_y G'_z G'_t \end{pmatrix}$$

中至少有一个二阶行列式在点P_0上不等于0①，比方說，这是行列式

$$J=\begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}. \tag{2}$$

于是，如果限于点P_0的适当邻域内（依据一个与**317**段定理3相似的定理），方程組(1)就等价于形如

$$z=\varphi(x,y),\quad t=\psi(x,y), \tag{3}$$

的一組方程，这里φ，ψ是(1)所定的隐函数。換句話說，要变数x,y,z,t的值满足約束方程(1)这一条件可代之以假設变数z和t是x和y的函数(3)。如此，四元函数$f(x,y,z,t)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0,t_0)$的相对极值問題就变成了二元复合函数

$$f(x,y,\ \varphi(x,y),\ \psi(x,y)) \tag{4}$$

在点$M_0(x_0,y_0)$上的寻常（絕对）极值問題。

这种想法也指示我們找函数$f(x,y,z,t)$达到相对极值的点的实际途徑：如果我們实际上会解出約束方程比方說对变数z和t并且会找函数(3)的显式；則問題就化为要找复合函数(4)的絕对极値。其实，我們在一系列早先所解的問題中[**153, 154**段]正是这样做的，例如，在$x+y+z+t=4c$条件下找乘积$xyzt$的最大值，等等。

現在我們指出另一途徑来找点$P_0(x_0,y_0,z_0,t_0)$，而不假設我們有（隐）函数(3)的显式，虽然这些函数的存在我們在此也要用到。

① 在这情形我們說該矩陣（在点P_0）为有秩2。

如此，設在点 P_0 函数 $f(x,y,z,t)$ 有一相对极值，或者說，复合函数(4) 在点 M_0 有一絕对极值。

于是在这一点上函数(4)的对 x 及对 y 的导数都等于 0，所以其微分也等于 0。按 143 段的一阶微分形式不变性这个条件也可写成这样：

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0, \tag{5}$$

这里 dz 和 dt 可理解为函数(3)在点 M_0 的微分，而各偏导数則在点 P_0 計算，因为

$$\varphi(x_0,y_0)=z_0,\quad \psi(x_0,y_0)=t_0. \tag{6}$$

当然不能由(5)断定微分的系数等于 0，因为这些微分不全是任意的。为了将問題化为任意选取的微分，即自变数的微分 dx 及 dy，我們設法由此消去因变数的微分 dz 及 dt。这不难做到，只要把約束方程(1)两边取全微分，而将 z 和 t 理解为函数(3)[①]：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0,\\ \frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz+\frac{\partial G}{\partial t}dt=0.\end{aligned} \tag{7}$$

这里，也和上面一样，由(6)，偏导数在点 P_0 計算。因为按假設行列式(2)在这一点上不等于 0，故 dz 及 dt 可由此表为 dx 和 dy 的一次式。如果将这些表出式代入(5)，則得形如

$$A\,dx+B\,dy=0$$

的等式，其中 A 和 B 表示对函数 F, G 的偏导数的有理式，并且这偏导数是取在点 P_0 上的。因为在这等式上只出現自变数的微分 dx, dy，即完全任意的数，故在点 M_0 我們有

$$A=0,\quad B=0.$$

① 說精确点，我們要微分那些恒等式，它們由方程(1)将其中 z 及 t 代之以隐函数(3)而得出。以后我們将一律采用这样类似的說法。

連同約束方程我們共有四个方程来决定未知数 x, y, z, t。

当然，我們只建立了点 $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 的极值的必要条件。但卽使这样的条件甚至也可用来找函数 f 在条件(1)之下的最大(或最小)值，只要按問題的性質能預知在所考慮的区域內部应有达到最大值或最小值的点存在，或者在推論的过程中先作这样的假設，以后再将所求出的点用其他办法来証实。

实例見下面 321 段。

320. 拉格朗日不定乘数法 在上面所講的方法里，变数之間不成对称：有些当作自变数，有些当作因变数；有些微分被消去，而有些保留。这有时会使計算大为复杂化。拉格朗日提出一种方法，使所有变数都保持平等的地位。

将等式(7)各乘以暫时任意的(非負)乘数 λ, μ 而将結果逐項与(5)相加，如此得等式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}\right)dt=0, \qquad (8)$$

这里 dz 及 dt 仍旧表示隱函数(3)的微分(在推导中我們暫时保持变数的不平等)；导数都在点 P_0 上計算。

現在我們这样选取 λ 和 μ 的值，使因变数的微分 dz 和 dt 的系数等于0:

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}=0. \qquad (9)$$

这是做得到的，因为用以决定 λ 和 μ 的綫性方程組(2)的行列式不等于 0。在所选取的乘数值之下等式(8)就成这样的形狀:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy=0. \qquad (10)$$

这里我們又只有自变数的微分了，所以它們的系数应該等于 0，卽

与(9)式并列我們还有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}=0. \tag{9*}$$

如此，为了决定四个未知数 x, y, z, t 以及两个乘数 λ 和 μ 我們恰好有一样多的方程，即两个約束方程及四个方程(9)和(9*)。

为了使这些方程写起来方便一点，通常采用一个輔助函数

$$\Phi=f+\lambda F+\mu G;$$

于是所說的方程可以写成这样：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}=0. \tag{11}$$

它們看起来象是函数 F 的寻常极值条件。但这只能看作是一种便于記忆的方法。

拉格朗日方法也只能导出必要条件。在此还可重述一下前段末尾所說的話。

附注　在所講理論中关于偏导数矩陣之秩的假定起了重要作用，我們已三度用到了。在用上述方法之一来解决問題时，为了証实使函数达到相对极值的点一个都沒有遺漏，应預先确定这个假定，在所考慮区域內所有满足約束方程的点上都已实现。在簡单情形这让讀者去做。

我們来看几个例題。

321. 例及习題　1)設要找函数 $u=xyzt$ 在条件 $x+y+z+t=4c$ 下的极值；变数的变域由不等式 $x\geqslant0, y\geqslant0, z\geqslant0, t\geqslant0$ 所定。这个問題，我們在 **153** 段2)里已利用由后一条件实际表出 t 而解决了。

应用拉格朗日方法于同一問題而引入輔助函数

$$\Phi=xyzt+\lambda(x+y+z+t)①$$

并且列出条件

$$\Phi'_x=yzt+\lambda=0,\ \cdots,\ \Phi'_t=xyz+\lambda=0,$$

① 如果記得这个函数的作用，则可明白这里 Φ 中常数项无妨省略。

由此得

$$yzt = xzt = xyt = xyz, \quad \text{如此} \quad x = y = z = t = c.$$

2)回到那并联电路中导綫最經济截面問題[154 段 3)]。仍采用該处的記号，我們来找函数

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n$$

在条件

$$F(q_1, q_2, \cdots, q_n) = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1} + \frac{\rho l_2 J_2}{q_2} + \cdots + \frac{\rho l_n J_n}{q_n} = e$$

下的极值；在此我們不必象以前那样引入别的变数来替换$q_1, q_2, \cdots, q_n$了，因为用我們的新方法問題可以很簡单地解决。

如此，将方程 $F=0$ 两边取全微分，然后得出下面这个 dq_n 的表出式：

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left\{\frac{l_1 J_1}{q_1^2} dq_1 + \cdots + \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2} dq_{n-1}\right\}.$$

代入等式 $df = l_1 dq_1 + l_2 dq_2 + \cdots + l_{n-1} dq_{n-1} + l_n dq_n = 0$ 得出这結果：

$$\left(l_1 - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_1 J_1}{q_1^2}\right) dq_1 + \cdots + \left(l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right) dq_{n-1} = 0.$$

因为 $dq_1, \cdots, dq_{n-1}$ 已經是任意的，則它們各别的系数都等于0.

由此得

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \cdots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2$$

并且

$$q_1 = \lambda\sqrt{J_1}, \quad q_2 = \lambda\sqrt{J_2}, \quad \cdots, q_n = \lambda\sqrt{J_n}. \tag{12}$$

比例乘数 λ 不难由約束方程决定：

$$\lambda = \frac{\rho}{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i \sqrt{J_i}.$$

如果应用拉格朗日方法，則須作輔助函数①

$$\Phi(q_1, q_2, \cdots, q_n) = l_1 q_1 + \cdots + l_n q_n + \lambda^2\left(\frac{l_1 J_1}{q_1} + \cdots + \frac{l_n J_n}{q_n}\right)$$

并令其导数等于0：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0, \quad \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

① "不定乘数"我們为方便計取成 λ^2 形式，常数 ρ 包含在內。

由此重新得出(12)，如此等等。

3) 作为一个較复杂的例子我們来考虑这个問題：三軸椭圓面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$被一个通过其中心的平面 $lx+my+nz=0$ 所截；要决定所得椭圓截口的半軸。換句話說，要来找函数 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 的极值，这里諸变数間有上面那两个关系方程。

消去因变数的微分的方法[319 段]在此会引起复杂的計算；所以我們即运用拉格朗日方法。

为了証实矩陣

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

的秩在椭圓面与平面的所有交点上都等于 2 ①，我們用反証法。設二阶行列式全等于 0，因此上下两行元素将成比例；但这样等式 $lx+my+nz=0$ 势将导至$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，这是不可能的。

作成輔助函数

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\mu(lx+my+nz),$$

令其导数等于0：

$$x+\lambda\frac{x}{a^2}+\mu l=0,\quad y+\lambda\frac{y}{b^2}+\mu m=0,\quad z+\lambda\cdot\frac{z}{c^2}+\mu n=0. \tag{13}$$

將这些方程各乘以 x, y, z 而加起来，得(考虑到約束方程) $\lambda=-r^2$。

如果为确定起見設 l, m, n 沒有等于 0 的，則由 (13)可看出 r 不等于 a 或 b 或 c。于是方程(13)可写成这样：

$$x=-\mu\frac{la^2}{a^2-r^2},\quad y=-\mu\frac{mb^2}{b^2-r^2},\quad z=-\mu\frac{nc^2}{c^2-r^2}.$$

由此不难找出 μ 并从而得出 x, y, z；但也可以避免这样做，而把这些等式預先各乘以 l, m, n 然后加起来，如此得出方程

① 参閱 320 段附注。

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-r^2}=0,$$

由此可直接定出两个我們所要的 r^2的极值。

因为这些极值的存在是預先知道的,如此本問題完全解决了。

322. 函数独立性概念 我們来考慮一組函数

$$\left.\begin{array}{l} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{array}\right\} \tag{14}$$

在某 n 維开区域$\mathscr{D}$内連同其偏导函数都有定义并且連續可能其中有一个,例如 y_j,是其余的函数①:

$$y_j=\Phi(y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m)^{①}, \tag{15}$$

这里Φ也假設在一个$(m-1)$維区域$\mathscr{E}$内是所有自变数的連續函数并有連續偏导函数;該区域則包含当 n 維点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$遍历区域$\mathscr{D}$时这些函数所取的一切可能值組 $y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m$。此时我們理解等式(15)在区域$\mathscr{D}$内对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒等地成立。于是称在这区域内函数 y_j 依賴于其余函数。特例,如果 y_j 是常数时也称其为如此;在这情形可令Φ=常数。

一般地說,函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$,如果有一个(隨便哪个都一样)依賴其余,則称为在区域$\mathscr{D}$内相依的。

如果在区域$\mathscr{D}$内或其任何部分内象(15)那样的恒等式都不成立,則函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 称为在区域$\mathscr{D}$内独立的。

要解答函数独立性問題可考慮所謂函数矩陣,它是由这些函数对所有自变数的偏导函数所組成的:

---

① 要紧的是,函数 Φ 的直接自变数中不包含 x。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

設 $n \geqslant m$, 我們首先有这样一个定理

定理 1. 如果由矩陣(16)的元素所組成的 m 阶行列式中至少有一个在区域$\mathscr{D}$内不等于0，則在此区域内函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 独立。

証明 設

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

如果不等于0的行列式不是这一个，而是另外某一个，則总可改編变数的下标而使其化为(17)的情形。

这定理我們用反証法来証明。設諸函数中有一个，比方說 y_m, 可由其余的表出，如此

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}), \tag{18}$$

至少是在区域$\mathscr{D}$的某一部分$\mathscr{D}_0$里。

依每一变数 $x_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 微分这个恒等式我們得一系列恒等式(在$\mathscr{D}_0$内)如下

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i}=\frac{\partial y_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial y_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_i}+\cdots+$$

$$+\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,m).$$

可見，行列式(17)最末一行諸元素可由前 $m-1$ 行相应元素各乘以$\frac{\partial y_m}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$后相加得之。这种行列式大家知道是等于0的。这与定理的条件違反，故証明等式(18)是不可能的。

323. 函数矩陣之秩 至于一般情形，我們先給出如下定义。所謂函数矩陣(16)的秩乃指其中最高阶的在区域$\mathscr{D}$內不恒等于0的行列式的阶数而言。当然也可以有矩陣(16)的所有元素都恒等于0的时候(此时說該矩陣的秩是0)，但这情形不值得注意，因为这里干脆所有函数

$$y_1, y_2, \cdots, y_m$$

都成常数。如果矩陣(16)的秩是 $\mu\geqslant 1$，則至少存在一个由該矩陣的元素所組成的 μ 阶行列式(当然有 $m\geqslant\mu$，$n\geqslant\mu$)并且在$\mathscr{D}$內不恒等于0，而所有較高阶的行列式(如果有的話)則恒等于0。如果所說 μ 阶行列式在点 P_0 异于0，則我們說該矩陣在点 P_0 达到它的秩 μ。

定理 2. 設函数矩陣(16)在区域$\mathscr{D}$內的秩是 $\mu\geqslant 1$，并且它在点 M_0 达到此秩。于是在此点某一邻域 $\mathscr{D}_0$ 內 m 个函数中有 μ 个是独立的，而其余 $m-\mu$ 个都依賴着它們。[并且独立的函数就是这个在点 M_0 异于0的行列式中各偏导数所对应的那些函数]

証明 为写起来簡单一点我們只对一个特例来証明。設給了三个三元函数：

$$y_1=f_1(x_1,x_2,x_3),\quad y_2=f_2(x_1,x_2,x_3),\quad y_3=f_3(x_1,x_2,x_3),\qquad(19)$$

而函数矩陣

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (16^*)$$

的秩为二并且在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ 达到此秩。設在該点某一行列式比方說是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \qquad (20)$$

异于 0。既然諸偏导函数是連續的，故在点 M_0 某一邻域内也如此，因而按定理 1 函数 y_1 和 y_2 在此邻域内独立。

令

$$f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = y_1^0, \quad f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = y_2^0,$$

而对

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) - y_1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) - y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

这具有五个变数 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的方程組在滿足它們的点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0)$ 上应用一个与 **317** 段定理 3 相似的定理。就是說利用方程組(21)左边对 x_1, x_2 諸偏导函数所組成的行列式异于 0，我們可肯定在此点某一邻域

$$\mathscr{M}_0 = (x_1^0 - \delta_1, \ x_1^0 + \delta_1; \ x_2^0 - \delta_2, x_2^0 + \delta_2; \ x_3^0 - \delta_3, x_3^0 + \delta_3; \\ y_1^0 - \Delta_1, \ y_1^0 + \Delta_1; \ y_2^0 - \Delta_2, \ y_2^0 + \Delta_2)$$

由方程組(21)将 x_1 和 x_2 确定为 x_3, y_1 及 y_2 的单值函数：

$$x_1 = \varphi_1(x_3, y_1, y_2), \quad x_2 = \varphi_2(x_3, y_1, y_2). \qquad (22)$$

我們記得，——如果限于区域 $\mathscr{M}_0$ 内——方程組 (21) 与(22) 是完全等价的：在該区域内的点只要滿足其中一組也就滿足另一組。

由我們所依据的定理可推知，如果将函数(22)替代(21)中的x_1和x_2，则对变数x_3, y_1, y_2在长方体

$$(x_3^0-\delta_3,\ x_3^0+\delta_3;\ y_1^0-\Delta_1,\ y_1^0+\Delta_1;\ y_2^0-\Delta_2,\ y_2^0+\Delta_2)$$

内得一个恒等式。但我們感覺兴趣的是另一个：如果在(22)中以函数f_1和f_2替代y_1和y_2，则对变数x_1, x_2, x_3得一恒等式——至少是在点$M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$的某一邻域内。即只要选取这个邻域为

$$\mathscr{D}_0=(x_1^0-\bar{\delta}_1,\ x_1^0+\bar{\delta}_1;\ x_2^0-\bar{\delta}_2,\ x_2^0+\bar{\delta}_2;\ x_3^0-\bar{\delta}_3,\ x_3^0+\bar{\delta}_3)$$

而使

$$0<\bar{\delta}_1\leqslant\delta_1,\quad 0<\bar{\delta}_2\leqslant\delta_2,\quad 0<\bar{\delta}_3\leqslant\delta_3,$$

并且使对其中各点由(21)定出的y_1和y_2，即函数f_1和f_2之値，与y_1^0和y_2^0之差各小于Δ_1和Δ_2[①]。事实上，这时候点$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$落在$\mathscr{M}_0$内而等式(22)应与(21)同时成立。

现在来看第三个函数

$$y_3=f_3(x_1, x_2, x_3);$$

这里以(22)諸函数代x_1及x_2而得

$$y_3=f_3(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3)\equiv\Phi(x_3, y_1, y_2). \quad (23)$$

根据上面的話，如果在这等式里函数f_1, f_2及f_3各代之以y_1, y_2, y_3，则它对区域$\mathscr{D}_0$内的諸x成恒等式。

要証明函数y_3依賴y_1及y_2，只剩下要証明函数(23)中的Φ事实上不含自变数x_3，如此(23)可写成这样：

$$y_3=\Phi(y_1, y_2).$$

为此显然只要証明对x_3, y_1, y_2有恒等式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=0 \quad (24)$$

---

① 这是做得到的，因为在点M_0函数f_1及f_2是連續的，并在該点取值y_1^0和y_2^0。

就行了。按Φ的定义有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \tag{25}$$

另一方面，如果将方程(21)依 x_3 微分之而将 x_1 及 x_2 看作 x_3, y_1, y_2 的函数，则得等式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

这是$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}$及$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}$的一次式。由这两个一次等式(26)又可推出第三个一次等式

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0, \tag{26*}$$

因为由上述各量的系数及自由項所組成的三阶行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

恒等于0(矩陣(16)的秩是二)。将等式(26*)与(25)比較就得出所求的恒等式(24)。

例　我們来看一組函数

$$y_1=x_1+x_2+x_3,\quad y_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$
$$y_3=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1.$$

不难驗証函数矩陣

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3\\ x_2+x_3 & x_3+x_1 & x_1+x_2\end{pmatrix}$$

在全空間內有秩 2。因此諸函数中有一个依賴其余两个，例如

$$y_2=y_1^2-2y_3.$$

§3. 函数行列式及其形式的性質

324. 函数行列式 在前一段里重要的研究工具是由偏导数組成的特殊类型的行列式；它們对一組函数所起的作用就与寻常导数对一个函数所起的作用相似[例如参閱**315, 317**段定理 1 和 3 正文]。我們在此討論它們的一些形式的性質（也提到寻常导数的相应性質），这些性質使上述行列式今后用起来容易一些。

設給了 n 个 n 元函数

$$\left.\begin{array}{l} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{array}\right\} \tag{1}$$

它在某一 n 維区域 $\mathscr{D}$ 內有定义并且在其中对所有变数都有連續的偏导函数。我們由这些导函数組成行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

这个行列式叫做函数組(1)对变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**函数行列式**并为簡单起見用記号

$$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

表示之，这正与寻常导数的表示法相似。

函数行列式是由雅谷比和奧斯脫罗格拉德斯基几乎同时（1833 年終及

1834 年初)并且連系着同一問題(多重积分变数替换)引进科学里来的[參閱后面355, 359, 384 各段]。稍后(1841 年)雅谷比发表了一篇論文，其中討論了这种行列式的性質，并且詳細給出了它在上述問題及隐函数理論上的应用。因此函数行列式通常也就称为雅谷比行列式或雅谷比式。上面所給函数行列式的表示法是后来英国人凋金氏所提出的。

325. 函数行列式的乘法 为写起来簡单起見我們限于比方設三阶的行列式，而所得結果完全具有一般性。如此，我們就由函数組

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \tag{1*}$$

出发，它們在一个(三維)区域$\mathscr{D}$內有定义并且在其中对所有变数有連續的偏导函数。除函数組(1*)外我們更取一組函数

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, t_3), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, t_3), \\ x_3 &= \varphi_3(t_1, t_2, t_3), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在(三維)区域$\mathscr{P}$內有定义并有連續导函数。設点(t_1, t_2, t_3)在$\mathscr{P}$中变动时相应点(x_1, x_2, x_3)不出区域$\mathscr{D}$之外，而 y_1, y_2, y_3 可看作 t_1, t_2, t_3 的通过 x_1, x_2, x_3 为媒介的复合函数。現在我們把(1*)組的函数行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

乘以(2)組的函数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix}.$$

在此我們利用已知的行列式乘法定理，它可由公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

表出，其中

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (i, k = 1, 2, 3,)$$

(行乘以列)。在我們的情形

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k},$$

即(按复合函数导数公式)

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

結果得出行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \frac{\partial y_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial t_1} & \frac{\partial y_3}{\partial t_2} & \frac{\partial y_3}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

而这就是函數組 y_1, y_2, y_3 对变数 t_1, t_2, t_3 而言的函数行列式。如此，用簡单的表示法就有

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}. \tag{3}$$

如果我們有 x 的一个函数 y，而 x 又是变数 t 的一个函数，則

将得出寻常复合函数导数公式$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$；所得公式(3)就是它的推广。

我們指出当 t_1, t_2, t_3 与y_1, y_2, y_3 相同时这一特例，如此函数組(2)就是函数組(1)的“反轉”結果(在此假設这反轉的可能性)。于是上面所得关系就变成

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}=1 \tag{4}$$

或

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}=\frac{1}{\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}}. \tag{5}$$

写成这样的形式它就与反函数导数公式相似了。

326. 函数矩陣的乘法 这里我們举例来說明一种特殊形式的矩陣的乘法的一般結果。我們先来看数矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

大家知道，它們的乘积就是指方陣

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

而

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k} \quad (i, k=1, 2).$$

这个方陣的相应二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

就等于相乘两矩陣中二阶行列式两两相乘的乘积之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{21} b_{22} \\ b_{31} b_{32} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} a_{11} \\ a_{23} a_{21} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{31} b_{32} \\ b_{11} b_{12} \end{vmatrix}.$$

这恒等式不难由展开諸行列式直接驗証之(在高等代数里也建立了关于矩陣乘法的一般定理)。

現在我們将这結果应用到函数矩陣上。設我們有两个三元函数

$$y_1=f_1(x_1,x_2,x_3),\quad y_2=f_2(x_1,x_2,x_3),$$

而变数 x_1, x_2, x_3 又都是两个变数 t_1, t_2 的函数:

$$x_1=\varphi_1(t_1,t_2),\quad x_2=\varphi_2(t_1,t_2),\quad x_3=\varphi_3(t_1,t_2).$$

設所有函数都有連續偏导函数,我們来找变数 t_1 及 t_2 的函数組 y_1 及 y_2 的函数行列式的表出式。为此我們把这两个函数矩陣乘起來:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix}.$$

在这情形

$$a_{ij}=\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \qquad (i=1,2;\ j=1,2,3)$$

$$b_{jk}=\frac{\partial x_j}{\partial t_k} \qquad (j=1,2,3;\ k=1,2)$$

而最后有

$$c_{ik}=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\frac{\partial y_i}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial t_k}.$$

这里应用上面的結果得恒等式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2}\end{vmatrix},$$

它簡写起来就成这样:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)}=\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}\cdot\frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)}+\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)}\cdot\frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)}+$$

$$+\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)}\cdot\frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \qquad (6)$$

如果我們只有一个函数 y, 它通过三个中間变数 x_1, x_2, x_3 而后者又依賴于变数 t, 則得到寻常复合函数微分公式:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{dy}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\frac{dy}{dx_3}\cdot\frac{dx_3}{dt};$$

公式(6)就是它的推广。

以后我們还要深入討論导数与函数行列式間的相似性 [**354** 段 2°; **383**段]。

第二十章　綫积分

§1. 第一型綫积分

327. 第一型綫积分　我們通过一个力学問題来自然地导出这个新的积分概念。

設給了一条有长的簡单[①]平面曲綫(K)(图8)，沿曲綫分布着質量，并且已知曲綫上每点M处的綫性密度$\rho(M)$。現在要来求全曲綫(K)的質量m。

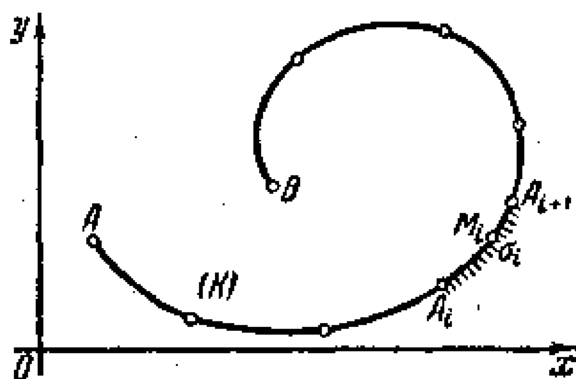


图 8.

为此我們在曲綫两端A与B之間任意地插入一系列的点$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$(并将$A$写成$A_0$，$B$写成$A_n$，以求記号一律)。为确定起見，我們認为这些点是按$A$至$B$的方向标号碼的；当然，采取相反的方向标号碼也无妨碍。

在弧A_iA_{i+1}上任取一点M_i，算出該点上的密度$\rho(M_i)$。把这一段弧的每点上的密度都近似地算作相等而以σ_i表該弧之长，則該弧的質量近似地为：

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而所求的全質量为

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

---

① 所謂簡單曲綫是指这样的連續曲綫：它由參变式給出，而相应于每一点只有一个參变值；在閉曲綫的情形則"閉合点"是例外：它相应于两个极端參变值。

此式的誤差是由上面所作的近似假設而引起的。如所有各段弧長 σ_i 趋于 0 时这个誤差也趋于 0。

如此，以 λ 表弧長 σ_i 中最大者，則只要取极限就得出精确的公式：

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(M_i)\sigma_i.$$

我們以一般形式来研究这种极限。現在撇开所考慮的力学問題而取一个任意的"点函数"$f(M)=f(x,y)$，它沿着一条有长連續平面曲綫(K)[1] 被給定，并重复上面所說的过程：将曲綫(K)分成弧段(弧元素)A_iA_{i+1}，在每段上各任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i)$，而算出这些点上的函数值 $f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$并組成总和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\sigma_i;$$

它也是一种积分和。

此和在 $\lambda=\max\sigma_i$ 趋于 0 时的有限极限称为函数 $f(M)=$ $=f(x,y)$沿曲綫或路綫(K)的第一型[2]綫积分而表成

$$\int_{(K)}f(M)ds=\int_{(K)}f(x,y)ds \tag{1}$$

(这里 s 是曲綫的弧長而 ds 象征长度元素 σ_i)。

这极限过程的精确描述让讀者自己去做。

如此，前面所得物質曲綫的質量可以写成这样：

$$m=\int_{(K)}\rho ds. \tag{2}$$

特别指出的是，在上面的定义里路綫(K)的方向不起作用。比

---

[1] 在此假設所依据的是直角坐标系。

[2] 这是和下面要讲的[330段]第二型綫积分不同的。

方說，当(K)不是封閉曲綫时(AB)和(BA)虽然是方向不同的曲綫，但

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

同样，我們可以建立沿空間曲綫(K)的积分概念：

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x,y,z)ds^{①}.$$

这里沒有什么新的原則性东西，不需再詳加解释了。

328. 化为寻常定积分 我們假設在曲綫(K)上两个可能方向中任意选定其一，如此曲綫上每点M的位置可由弧长$s=\overset{\frown}{AM}$来决定，这里弧长是由点A算起的。于是曲綫(K)可由参变方程表出如下：

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S),$$

而沿曲綫各点給定的函数$f(x,y)$就化为变数s的复合函数$f(x(s),y(s))$.

如果以$s_i(i=0,1,\cdots,n)$表示和弧AB上所选分点A_i相应的弧的值，則显然$\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$。以$\bar{s}_i$表示决定点$M_i$的$s$值（显然$s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$），于是可以看出綫积分中的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i),y(\bar{s}_i))\Delta s_i,$$

同时也就是寻常定积分中的积分和，如此我們立即有：

$$\int_{(K)} f(M)ds=(R)\int_0^S f(x(s),y(s))ds^{②}, \tag{3}$$

而由一个积分的存在就可推出另一积分的存在。

---

① 所依据的是一个直角坐标系。函数f只在曲綫(K)的点上有定义。

② (R)表示积分理解为寻常的黎曼积分。

特例，在函数 $f(M)$ 連續①的时候，这个积分显然是存在的。今后我們也就假設所論函数总是連續的。

現在設曲綫 (K) 由任意参变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

給出，而函数 φ 及 ψ 連同其导函数 φ' 及 ψ' 都連續；此外我們假設曲綫上沒有重点。于是該曲綫显然是有长的，并且如果弧 $s=\overset{\frown}{AM}=s(t)$ 随参变数 t 一起增大，則

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[**201, 202** 段]。在(3)式右边积分中作变量替换，立即得出：

$$\int_{(K)} f(M)ds=(R)\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt. \tag{4}$$

如此，要計算第一型綫积分时須在被积函数中将变数 x 和 y 代以坐标的参变式同时 ds 也代以弧长微分的参变形式。

如果在参变数 t 增大时弧 $\overset{\frown}{AM}$ 变小，則只要改为弧 $\overset{\frown}{MB}$，就可重新得出公式(4)。总之，无論曲綫的参变式如何，在这公式里右边的积分下限必須小于上限。

在曲綫由显式方程

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

給出的情形，則公式(4)变成：

$$\int_{(K)} f(M)ds=(R)\int_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \tag{5}$$

---

① 我們指的是在曲綫 (K) 的点上沿該曲綫的連續性。以"ε-δ"語言来說，这就表示，对 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$，使在 $\overset{\frown}{MM'}<\delta$（$M$ 及 M' 为曲綫上之点）时 $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$。在此假設下只要 $x(s)$ 和 $y(s)$ 連續則对 s 复合函数 $f(x(s), y(s))$ 也就連續。

这个关系式还可取另一形式，在函数 $y(x)$ 連同其导函数 $y'(x)$ 都連續的假設之下曲綫 (K) 在每点上將有一定的与 y 軸不平行的切綫。以 α 表切綫与 x 軸的交角，得

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x), \quad |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

所以

$$\int_{(K)} f(M)\,ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}dx. \tag{6}$$

在特例，因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

(这里 S 表示曲綫(K)之全長)于是

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附注　公式(7)我們是以形式变換得出的。如果將曲綫弧長定义为外切(不是內接)折綫全長的极限，則在曲綫以显式給出时这个定义將直接导至公式(7)。这一点讀者可以自已驗明。

329. 例　1) 設(K)是椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的四分之一，我們来計算

$$I = \int_{(K)} xy\,ds.$$

由椭圓参变式 $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ 出发我們有

$x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$.

計算可按公式(4)来进行：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2} + b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

这里我們令 $\cos 2t = z$，于是 $\sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}dz$ 而

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

附注 大多数經常遇到的曲綫（椭圓、双曲綫、正弦型曲綫等等）其弧长都不能表为初等函数，因为 ds 不能积分成有限的形式。但是对这些曲綫，$\int\limits_{(K)} f(x, y)ds$ 这个积分却有时可以算出是初等函数（如前例），这是因为乘上了 $f(x, y)$就改变了积分号下微分式的整个結构。

有关沿物質曲綫連續分布的質量問題可以很自然地导至这种类型的綫积分。

2）我們在第十二章［206 段］曾經在"綫性密度" $\rho=1$ 的假設之下計算过平面曲綫对坐标軸的靜力矩以及其重心的坐标。讀者不难將那里所得公式推广到質量連續分布的一般情形。如果利用所引入的綫积分概念，則結果可写成下面的形状：

$$K_y=\int\limits_{(K)}\rho x ds,\quad K_x=\int\limits_{(K)}\rho y ds,$$

$$x_c=\frac{K_y}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho x ds}{\int\limits_{(K)}\rho ds},\quad y_c=\frac{K_x}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho y ds}{\int\limits_{(K)}\rho ds}.$$

3）我們还指出第一型綫性积分的一种应用——应用于物質曲綫对質点的引力問題。

我們知道，按牛頓定律，一个質量为 m 的質点 M 吸引一个質量为 m_0 的質点 M_0 时，引力的方向是由 M_0 至 M，引力的大小則等于 $k\frac{mm_0}{r^2}$，这里 r 是距离 M_0M，而 k 是隨所采用量度单位而定的系数，为簡单起見通常可算它等于1。

如果一个質点 M_0 被一組質量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的質点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所吸引，則合力可由各質点的引力的几何加法得出。同时合力在諸坐标軸上的投影就等于各力的投影的代数和。

如果以 X 与 Y 表示合力在坐标軸上的投影，而以 θ_i 表示分矢量 $\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{M_0M_i}$

与 x 軸的交角(图 9), 則显然

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

这里 r_i 如慣例表示矢量 $\overrightarrow{r_i}$ 之长。

現在設吸引質量沿曲綫 (K) 連續分布。为了計算引力我們將該曲綫分段, 并且將每段的質量集中于在它上面任意选取的一点 M_i 上而来求合力在坐标軸上的投影的近似值:

$$X\doteq\sum_{i}\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,$$

$$Y\doteq\sum_{i}\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

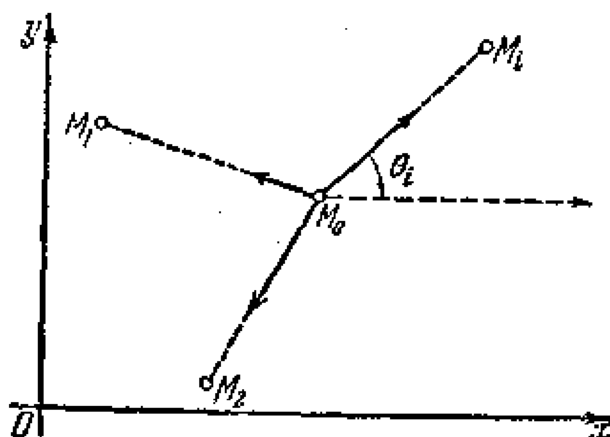


图 9.

因为在这情形各段的質量近似地等于 $\rho(M_i)\sigma_i$。如果令所有 σ_i 趋于 0, 則在极限情形得出精确的等式而总和变成了积分:

$$X=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds,\quad Y=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds;\tag{8}$$

这里 r 表示矢量 $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$ 之长, 而 θ 表示其与 x 軸所成之角。

例如我們来求一个均匀半圓周($\rho=1$)对其中心处一个单位質量的引力。

将坐标原点取在半圓周的中心而 x 軸通过其两端(图 10)。

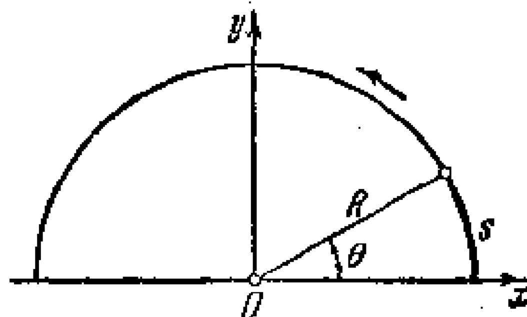


图 10.

由于对称性可推想到 $X=0$, 如此

只要找出投影Y就行了。按公式(8)

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}ds.$$

但在当前这情形$r=R$(半圆周的半徑)而$ds=Rd\theta$。所以

$$Y=\frac{1}{R}\int_0^\pi \sin\theta d\theta=\frac{2}{R}.$$

§2. 第二型綫积分

330. 第二型綫积分定义 現在来討論实际上更重要的第二型綫积分的概念。我們在此直接由它的定义开始，而其应用則等以后再講[例如見**335**段]。設給定了一条簡单曲綫(AB)(暫假設它是非閉曲綫)并設沿該曲綫又給定了一个函数$f(x,y)$①。将曲綫用$A_i(x_i,y_i)$諸点分为n段而在每段A_iA_{i+1}上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i)$并像以前一样算出該点上的函数值$f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$。但此值这次不是乘以弧A_iA_{i+1}之长而是乘以此弧在坐标軸上的投影，比方說，x軸上的投影$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$;然后組成积分和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$

此和在$\mu=\max A_iA_{i+1}$趋于0时的有限极限就叫做$f(M)dx$沿曲綫或路綫(AB)所取的(第二型)綫积分并用符号表为

$$I=\int_{(AB)}f(M)dx=\int_{(AB)}f(x,y)dx. \qquad (1)$$

同样，将$f(M_i)$值乘以弧A_iA_{i+1}在y軸上的投影Δy_i(而不是乘以Δx_i)并組成和式

$$\sigma^*=\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\Delta y_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

① 参閱220頁第一个底注。

则其极限即为 $f(M)dy$ 的(第二型)綫积分:

$$I^{*}=\int_{(AB)} f(M)dy=\int_{(AB)} f(x,y)dy. \tag{2}$$

如果沿曲綫定义了两个函数 $P(M)=P(x, y)$ 及和 $Q(M)=$ $=Q(x,y)$ 并且存在积分

$$\int_{(AB)} P(M)dx=\int_{(AB)} P(x,y)dx,$$

$$\int_{(AB)} Q(M)dy=\int_{(AB)} Q(x,y)dy,$$

则它們的和也叫做綫积分("一般形式")而令

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int_{(AB)} P(x,y)dx+\int_{(AB)} Q(x,y)dy①. \tag{3}$$

現在我們来比較两种类型綫性积分的定义[参閱本段(1)或(2)与327段(1)]。两个定义除明显的相似之外还有重要的差异,这我們再一次强調指出:在第一型积分里組成积分和时函数値 $f(M_i)$ 是乘以弧段 A_iA_{i+1} 之长 $\sigma_i=\Delta s_i$,而在第二型里则 $f(M_i)$ 値是乘以該弧段在 x 軸(或 y 軸)上的投影 Δx_i(或 Δy_i)。

我們已經看到,积分路綫 (AB) 的方向在第一型积分的情形不起作用,因为弧 A_iA_{i+1} 之长 σ_i 与这方向无关。第二型积分情形就不同了:該弧在各坐标軸上的投影主要取决于弧的方向并且方向反过来时投影也就变正負号。如此,对第二型积分有

$$\int_{(BA)} f(x,y)dx=-\int_{(AB)} f(x,y)dx$$

同样,

---

① 关于綫积分历史考証讀者可查350段附注。

$$\int_{(BA)} f(x,y)dy = -\int_{(AB)} f(x,y)dy,$$

这里由一边积分的存在可推知另一边积分也存在。

用同样方式可建立沿空間曲綫 (AB) (姑且說非封閉的)的第二型綫积分的概念。即，如果函数 $f(M)=f(x, y, z)$ 給定在此曲綫的点上，則我們如前組成"积分和"

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$$

并且考虑它在 $\mu=\max \overline{A_iA_{i+1}}$ 趋于 0 时的极限。这个极限就叫做 $f(M)dx$ 的(第二型)綫积分并用符号表为

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x,y,z)dx.$$

同样可定义积分:

$$\int_{(AB)} f(M)dy = \int_{(AB)} f(x,y,z)dy$$

及

$$\int_{(AB)} f(M)dz = \int_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

最后，也可考虑"一般形式"的积分

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz.$$

这里积分的正負号也随积分方向而改变。

最后注意寻常定积分的簡单性質都不难搬到綫积分上来；对此不必細講了。

331. 第二型綫积分的存在及其計算 設曲綫 $(K)=(AB)$ 由参变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{4}$$

給出，而 φ 和 ψ 是連續的并且参变数 t 由 α 变至 β 时曲綫即依 A 至 B 的方向描出，沿曲綫 (AB) 的函数 $f(x, y)$ 也假設是連續的①。

如果对积分(1)来說，則还須补充导函数 $\varphi'(t)$ 存在并連續这个条件。

在这些假設之下綫积分(1)就存在并且成立等式

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt. \quad (5)$$

如此，要計算綫积分(1)，須在被积函数中将其变数 x 和 y 代以其参变表出式(4)，而 dx 則代以 x 的参变式的微分。在最后积分中积分限的次序要和曲綫上所选取的方向相应。

証明　設曲綫上所取的点 $A_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 由参变数值 t_i 决定，而在弧 A_iA_{i+1} 上所选取的点 M_i 由参变数值 τ_i 决定（显然 $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$）。于是积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

考慮到

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt,$$

它可写成：

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt.$$

另一方面，(5)式中右边的积分②也可表为和的形式：

---

① 类似222頁底注中的話也适用于此，只是要将弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 代以弦 MM'。

② 因为被积函数連續，故該积分显然是存在的。

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t)dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

由此有

$$\sigma-I=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))-f(\varphi(t),\psi(t))]\varphi'(t)dt$$

任意指定一个 $\varepsilon>0$, 而現在假設所有 Δt_i 都充分小, 使在区間 $[t_i, t_{i+1}]$ 中連續函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 的摆幅小于 ε。既然連續函数 $\varphi'(t)$ 是有界的: $|\varphi'(t)|\leqslant L$, 則有

$$|\sigma-I|<\varepsilon L|\beta-\alpha|.$$

如此, 在 $\lambda=\max\Delta t_i$ 趋于 0 时①

$$\lim\sigma_1=I,$$

由此同时証明了綫积分的存在及所求的等式。

在連續导函数 $\psi'(t)$ 存在的条件下, 对于积分(2), 也可由类似方式确定其存在并可証明公式

$$\int_{(AB)} f(x,y)dy=(R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (5^*)$$

最后, 对于一般形式的积分

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中 P 和 Q 是連續函数, 則在曲綫 (AB) 上我們加一条件: 要求两函数(4)都有連續导函数。在这假設下則成立公式

① 在非封閉曲綫的情形这就等价于最大弦趋于 0 [200 段]。

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=(R)\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt. \quad (6)$$

綫积分的定义及这里所講的将它記为寻常定积分的方法都可直接推广到曲綫(4)自身相交的情形，只要在它上面的方向仍与前面一样由参变数 t 单調的自 α 变化至 β 而定。

最后我們指出綫积分中一些計算起来特别簡单的情形。

設积分(2)沿一条由显式方程

$$y=y(x)$$

所給的曲綫来取，而当 x 由 a 变至 b 时曲綫上的点由 A 移至 B。

于是对曲綫除連續性外不必加任何假設我們就有

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dx=(R)\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))dx. \quad (7)$$

同样，如果积分(2*)沿另一种由显式方程

$$x=x(y)$$

給定的連續曲綫，而 y 由 c 变至 d，則有

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dy=(R)\int\limits_{c}^{d} f(x(y),y)dy. \quad (7^*)$$

最后，如果积分(7)展布在平行于 y 軸的一段直綫 (AB) 上，則它等于0(因此时所有 Δx_i，因而同时和 σ，都等于0)。同样，积分(2*)沿平行于 x 軸的一段直綫来取时也等于0。

附注　如果一条曲綫 (K) 分割成彼此衔接的有限多段而綫积分沿每段分别存在并且可按上述公式之一計算出来，則不难算出沿全曲綫 (K) 的积分，即沿各段的积分之和。

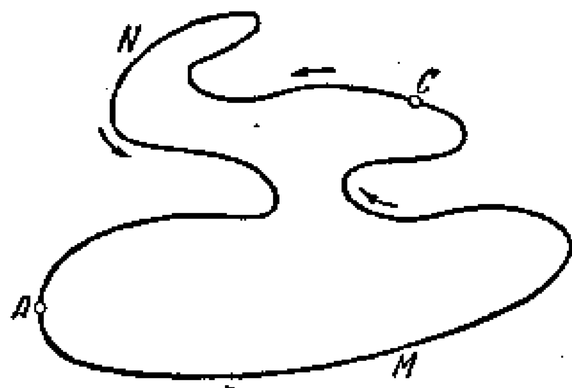


图 11.

332. 閉路綫的情形。平面的定向法 我們来討論閉路綫(K)的情形，即积分路綫的起点A与終点B重合为一的情形。在曲綫上取一与A不同的点C，而按照曲綫上所选定的方向(如图 11 箭头所指)令

$$\int_{(K)} = \int_{(AMC)} + \int_{(CNA)}$$

作为定义，在此假設右边的积分是已知其存在的。

不难証明这个积分的存在及数值均与点A和C的选擇法无关。此外，对閉路綫(K)的情形前段所导出(5)、(5*)、(6)諸公式都可应用。

当前这情形的特点在于：起点及(与它重合的)終点的指定，此时并不能决定描出曲綫(K)的方向。可以在每一情形都特别說明取的是什么方向。对空間曲綫来說必須这样处理。在平面閉路綫(K)的情形則通常采取別的办法。

由一个平面的两种可能旋轉方向——“逆鐘方向”及“順鐘方向”——选取其一作为正的：如此就建立了平面的定向法。如果逆鐘向旋轉的方向算作正的，則这种平面定向法称为右定向法，另一情形則称为左定向法。

在平面右定向法的情形我們就根据逆鐘方向旋轉来定义簡单閉路綫上的正向(图 12a)。当然，这个定义只有路綫近似于圓时才有充分明显的性質。所以我們更将条件予以明确化如下：所謂簡单閉路綫的环行正向指的是这样的方向，一个观察者循該方向沿路綫环行时，路綫所圍区域靠近他的部分落在他的左边(图12a)。

在平面左定向法的情形則正向指的是順鐘方向环行，而此时

路綫所围区域总落在观察者右边(图 12б)。

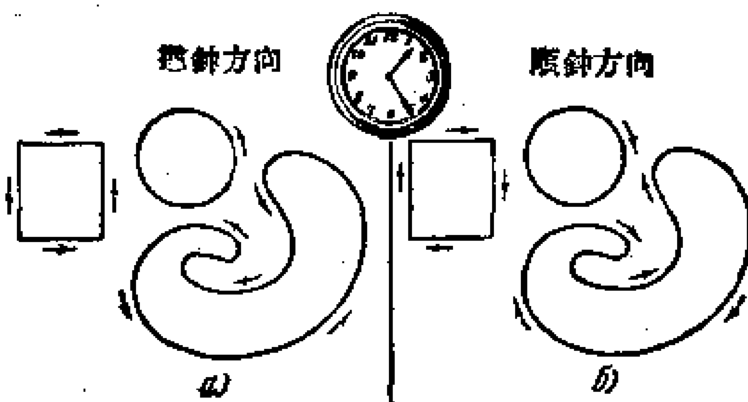


图 12.

平面上坐标軸的摆法与其定向法有一定的关系：在右定向法之下 y 軸可由 x 軸循逆鉠方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 之角而得，在左定向法之下則循順鉠方向旋轉而得(图 13a,б)。第一种情形称为右手坐标系，第二种情形称为左手坐标系。

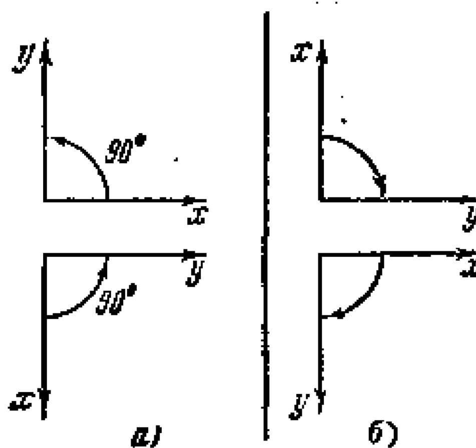


图 13.

經此說明后我們可以永远約定：如果积分路綫(K)是一条簡单閉曲綫，則

$$\int_{(K)} Pdx+Qdy$$

这个記号在不指明路綫环行方向时恒理解为积分是循正向来取的。当然，这种約定并不妨碍我們必要时考虑循負向的积分，但我們将表之以

$$-\int_{(K)} Pdx+Qdy.$$

333. 例 1) 我們来計算綫积分

$$H=\int_{(L)} 2xydx+x^2dy,$$

积分路綫是連結点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 的曲綫 (L)。設 (L) 是(a)直綫 $y=x$，(б)抛物綫 $y=x^2$，(в)抛物綫 $x=y^2$，(г)三次抛物綫 $y=x^3$(图 14)。

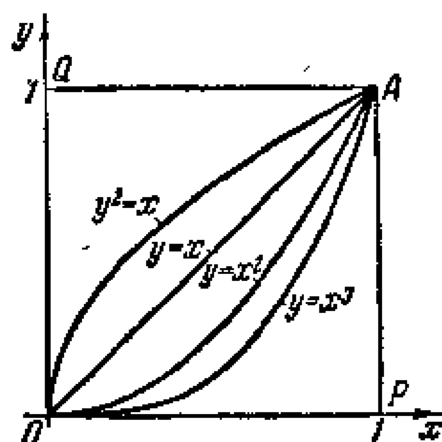


图 14.

(a)因为 $dy=dx$，于是

$$\int_{(L)} 2xydx+x^2dy=\int_0^1 3x^2dx=1;$$

(б) $dy=2xdx$，$H=\int_0^1 4x^3dx=1$;

(в) $dx=2ydy$，$H=\int_0^1 5y^4dy=1$;

(г) $dy=3x^2dx$，$H=\int_0^1 5x^4dx=1$.

2) 計算綫积分

$$G=\int_{(L)} xydx+(y-x)dy,$$

积分路綫同上。

答案 (a) $\frac{1}{3}$，(б) $\frac{1}{12}$，(в) $\frac{17}{30}$，(г) $-\frac{1}{20}$.

3) 求綫积分

$$I=\int_{(OA)}(x-y^2)dx+2xydy,$$

积分路綫是下列連結点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 諸綫之一(图 14)。(a)一段直綫 $OA(y=x)$；(б)由 x 軸上綫段 $OP(y=0)$ 与直綫 $x=1$ 上的綫段 PA 所組成的折綫 OPA；(в)由 y 軸上 $(x=0)$ 綫段 OQ 与直綫 $y=1$ 上綫段 QA 所組成的折綫 OQA。

(a)因为 $y=x$ 及 $dy=dx$，于是

$$I=\int_0^1 (x+x^2)dx=\frac{5}{6}.$$

(б)在这情形自然可将积分路綫分为两段:

$$I=\int_{(OPA)}=\int_{(OP)}+\int_{(PA)}=I_1+I_2.$$

沿 OP 我們有: $y=0$ 及 $dy=0$，如此

$$I_1=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

沿 PA 則有：$x=1$ 及 $dx=0$，故

$$I_2=\int_0^1 2ydy=1.$$

如此最后得 $I=\frac{3}{2}$.

(в)与前面同样我們有(因沿綫段 OQ 积分等于 0)：

$$I=\int_{(QA)}=\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{2}.$$

4) 在同样条件下求积分

$$I=\int_{(OA)}(y^2+2xy)dx+(2xy+x^2)dy.$$

答案　在所有情形 $I=2$。

附注　讀者或許已注意到例 1)、例 4)的結果与例 2)例 3)的結果之間的差别。1)与 4)中的积分之值与連結起点終点的路綫无关。反之，在例 2)与例 3)里則我們所碰到的积分的值隨連結起点終点的路綫而变。下一章(§4)我們將专門討論这个問題并闡明其重要性。

5) 我們来計算积分

$$K=\int_{(L)}y^2dx-x^2dy,$$

这里(L)是一个圓，其半徑为1，圓心在(a)坐标原点或(б)在点(1, 1)。

(a)由參变方程 $x=\cos t,\ y=\sin t$ 出发，这里 t 由 0 变至 2π，于是按公式(6)有

$$K=-\int_0^{2\pi}(\sin^3 t+\cos^3 t)dt=0.$$

(б)同样用參变表示法

$$x-1=\cos t,\quad y-1=\sin t$$

得

$$K=-\int_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)dt=-4\pi.$$

334. 两种类型綫积分間的关系 我們来考慮一条光滑的簡单曲綫[①] $(K)\equiv(AB)$ 并且取弧 $s=\breve{AM}$ 作参变数而将它用方程式

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S)$$

表出[201,202]；函数 $x(s)$, $y(s)$ 有連續导函数 $x'(s)$, $y'(s)$。如果以 α 表示切綫与 x 軸所成之角，切綫指向弧增长的一边，則我們知道[211 段，(4)]

$$\cos\alpha=x'(s),\quad \sin\alpha=y'(s).$$

如果沿曲綫 (K) 給定了一个連續函数 $f(M)=f(x,y)$，則我們逐步有

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,dx=\int\limits_0^S f(x(s),y(s))\,x'(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_0^S f(x(s),\,y(s))\cos\alpha\,ds=\int\limits_{(K)} f(M)\cos\alpha\,ds,$$

如此第二型綫积分化成了第一型綫积分。

同样可得

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,dy=\int\limits_{(K)} f(M)\sin\alpha\,ds.$$

如果沿曲綫 (K) 給定了两个連續函数 $P(M)=P(x,y)$ 和 $Q(M)=Q(x,y)$，則

$$\int\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{(K)} (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,ds. \tag{8}$$

着重指出，在所有这些公式里角 α 都按照切綫的相应于曲綫 (K) 本身方向的那个方向来計算。如果改变曲綫的方向，則不但左边的积分变号，并且由于切綫方向的改变，角 α 要变动 $\pm\pi$，从而右边的积分也就变号。

---

① 曲綫(4)称为光滑曲綫是指函数 φ 和 ψ 有不同时等于 0 的連續导函数。

显然，所推出的公式对逐段光滑[①]的簡单曲綫也仍适用；这只要对每一段光滑曲綫写出相应的公式并逐一加起来就可明白。

类似的想法也可以推广到沿空間曲綫的綫积分。結果得出公式

$$\int_{(K)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(K)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds, \qquad (9)$$

这里 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是切綫的方向余弦，并假設切綫的方向相应于积分路綫的方向。

335. 在物理問題上的应用 最后我們来講两个力学及物理中的重要問題，讀者由此可以对本段所建立諸概念的实用意义有一个印象。

1) 力場之功 設在 xy 平面（或其一部分）的每点 M 处所放的单位質量上加一力 $\vec{F}$，其大小与方向只与点 M 的位置有关；如果在 M 处質点的質量 m 不等于1，則加于該点的力将等于 $m\vec{F}$。在这些条件下該平面（或其中被考慮的一部分）称为一个（平面的）力場，而加于单位質量上的力称为場的强度。要給出力 $\vec{F}$ 的大小与方向只要給出其在坐标軸上的投影 X, Y 也是一样的，而这些投影显然就是点 M 的坐标 x, y 的函数：

$$X=X(x,y),\quad Y=Y(x,y).$$

如果 φ 是矢量 $\vec{F}$ 与 x 軸所成的角，則（图15）

$$X=F\cos\varphi,\quad Y=F\sin\varphi. \qquad (10)$$

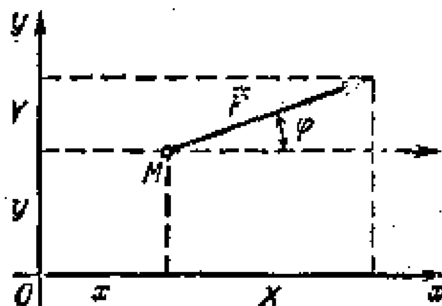


图 15.

現在設力場中一个具有单位質量的質点 $M(x,y)$ 运动而以一定的方向描出一条連續曲綫 (K)，問題是要計算在这运动下力場所做的功 A。

如果加于該点的力保持固定的大小 F 并有固定方向，而点的位移沿直綫进行，則我們知道功 A 可表为位移 l 乘以力在位移方向上的投影：

$$A=Fl\cos\theta,$$

这里 θ 是力 $\vec{F}$ 与位移方向間的角。

如果运动不是直綫的并且力不是固定的，則功要用一种极限过程来决

① 这就指的是由几段相互銜接的光滑曲綫所組成的曲綫。

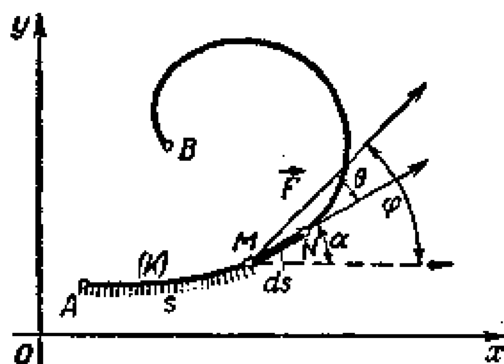


图 16.

定①。我們以弧 $\breve{AM}$ 之长 s 来决定曲綫 (K) 上点 M 的位置(图 16)。考虑曲綫的无穷小元素 $MN=ds$; 把它当作直綫的并且近似地认为力 $\vec{F}$ 及其与位移 ds 的角 θ 都不变其值。于是相应功元素为

$$dA=F\cos\theta\, ds.$$

現在只剩下把这些功元素沿全曲綫 (K) "加起来", 結果功 $\boldsymbol{A}$ 就表成第一型綫积分:

$$\boldsymbol{A}=\int_{(K)} F\cos\theta ds. \tag{11}$$

我們引入元素 ds 的方向(即曲綫在点 M 的切綫的方向)与 x 軸間的角 α。显然, $\theta=\varphi-\alpha$, 如此

$$\cos\theta=\cos\varphi\cdot\cos\alpha+\sin\varphi\cdot\sin\alpha,$$

而由(10)积分元素可写成:

$$(X\cos\alpha+Y\sin\alpha)ds.$$

功的表出式(11)就成这样的形式:

$$\boldsymbol{A}=\int_{(K)}(X\cos\alpha+Y\sin\alpha)ds.$$

現在由表示两型綫积分关系的公式(8)力場之功最后表成了第二型的綫积分:

$$\boldsymbol{A}=\int_{(K)} Xdx+Ydy. \tag{12}$$

这就是功 $\boldsymbol{A}$ 的最常用的表出式, 便于研究一系列有关功的重要問題, 如: 所作功与連結两定点的軌綫形式是否有关? 沿閉軌綫的全功是否恒等于 0? [关于这点參閱下面 348-351 段]。

2) 不可压縮流体的平面稳定流动。这种运动的特征是, 第一, 垂直于某平面的同一垂綫上的所有各質点都有同一速度, 所以要描述整个运动时只要

① 这里及以后我們宁采取第一卷中[204 段]所用的簡单說法。极限过程不明白說出来了。

研究其在一个平面上的运动就行了①；第二，流体各质点的速度 $\bar{c}$ 只与各质点的位置有关而与时間无关。如此，对該平面（或其一部分）的每个几何点子总有一个大小与方向都一定的速度与之对应連系着；换句話說，給定了一个“速度場”。

如果以 φ 表示矢量 $\bar{c}$ 与 x 軸所成的角，而以 u 和 v 表示該矢量在坐标軸上的投影，則（图 17a）

$$u=c_x=c\cos\varphi,\quad v=c_y=c\sin\varphi.$$

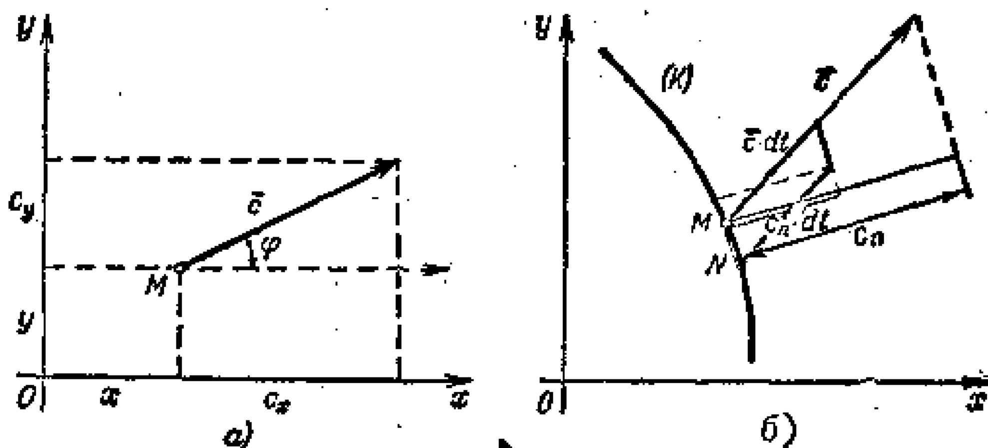


图 17.

現在我們在 xy 平面上取一任意曲綫(K)而来决定单位时間內通过曲綫流向曲綫某側的流体的分量 Q。假設該流体是不可压縮的，則流体的量即可用它所掩蓋图形的面积来量度。如事实上流体向着和所取的相反一側流动，則流体的流量算作負的。

取曲綫(K)的一个元素 $MN=ds$。在时間 dt 內通过这一元素的流量等于

$$c_n ds\, dt, \tag{13}$$

这里 c_n 是速度 $\bar{c}$ 在元素 ds 的法綫 n 上的投影，法綫是指向所选定的曲綫的那一側的。事实上，这个量就等于以 ds 及 cdt 为边的平行四边形的面积，其高恰为 $c_n dt$（图 17б）②。要計算单位时間內流体通过元素 ds 的流量，只要将(13)式依元素 dt 求和，得出 $c_n\, ds$。将所得式子再依曲綫(K)的所有元素求和，即得所求流量 Q，表为第一型綫积分的形式：

---

① 我們就选这个平面作 xy 面。

② 在此把元素 ds 当作直綫的，且認为它的所有各点上流体質点的速度都相同，在时間元素 dt 內其大小方向均保持为常数。

$$Q=\int_{(K)} c_n ds.$$

如果按慣例以 α 表示切綫与 x 軸間之交角，則 $\lambda=\alpha+\frac{\pi}{2}$ 給出法綫与該軸之交角，于是速度 $\bar{c}$ 的方向与法綫間之角将为 $\varphi-\lambda=\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2}$，而

$$c_n=c\cdot\cos\left(\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=c\cdot\sin(\varphi-\alpha)=$$
$$=c\cdot\sin\varphi\cdot\cos\alpha-c\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha=v\cos\alpha-u\sin\alpha,$$

如此

$$Q=\int_{(K)}(v\cos\alpha-u\sin\alpha)ds.$$

再由公式(8)又可轉变为第二型綫积分

$$Q=\int_{(K)} vdx-udy. \tag{14}$$

特別要注意的是，曲綫上的方向应这样选取，使得相应的切綫方向与預先选定的法綫間之角等于 $+\frac{\pi}{2}$，因为当初公式(14)正是在这假設之下导出的。

如果(K)是閉路綫而积分(14)是沿正的方向取的[这是慣例，見 332 段]，則为了适合剛才所說的条件法綫应指向路綫(K)所圍的区域的內部，所以在这情形公式(14)就給出单位时間內流体通过边界(K)流向区域內部的流量。如果要得出由界綫(K)所圍区域流向域外的流量，只須改变公式(14)的正負号就可以了。

其次，如該場中流体旣无"泉源"也无"漏洞"，則在任一有界区域內流量保持不变。所以，无論取怎样的閉曲綫，沿它所取的积分(14)总应該等于 0。

所以，如果 u 和 v 是不可压縮流体在平面穩定流动中的分速度，則当沒有泉源和漏洞时，无論(K)是怎样的閉路綫总有

$$\int_{(K)} vdx-udy=0.$$

以后[351 段，2)]我們将看到，这个由物理想法所得出的結果也可以給出函数 u 和 v 的一种分析的特征。

第二十一章　二重积分

§1. 二重积分定义及簡单性質

336. 柱体体积問題　正如曲綫梯形面积問題引出了簡单定积分的概念一样［175 段］，現在柱体体积問題同样也引出一种新的概念——二重（定）积分。

我們試看一个立体(V)，它的上面以曲面

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

为界，側面为柱面，其母綫平行于z軸，下面則以xy平面上一个平面图形(P)为底（图 18）。現在要来求它的体积V。

要解决这个問題，我們采取尋常积分学中的方法：将所求的量分为部分——元素，取每部分的近似值，加在一起，然后求其极限。如此，我們把区域(P)用曲綫网分为許多小区域(P_1)，(P_2)，…，(P_n)，并且来考虑一系列柱形細条，它們以这些小区域为底，而合起来就組成該立体。

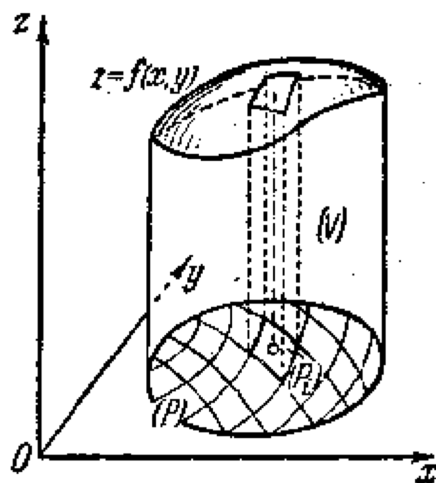


图 18.

为了要算出各柱形細条的体积我們在每个小区域(P_i)內任取一点(ξ_i, η_i)。如果把每个柱形細条就近似地看作是一个以z坐标$f(\xi_i, \eta_i)$为高的眞正柱体形，則各柱形細条的体积就近似地等于

$$f(\xi_i, \eta_i)P_i,$$

这里P_i表示图形(P_i)的面积。在这样的情形下該立体的整个体

积就可近似表为

$$V \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

要提高这个等式的精确度我們可縮小(P_i)的面积而增加其数目。命所有小区域(P_i)中最大的直徑也趋于0，在极限情形这个等式便成为精确的，如此

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

而所提的問題就解决了。

这种形式的极限就是函数 $f(x, y)$ 在区域 (P) 上的二重积分；表成

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

于是上面所得的体积公式就成为：

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP^{①}. \tag{2}$$

如此，二重积分就是把簡单定积分概念直接推广到二元函数的情形，在計算种种不同的几何量及物理量时它同样起着重要的作用。

337. 化二重积分为累次积分 継續将二重积分几何地解釋为柱体的体积，我們在此也指出如何用化为累次积分的方法来計算它。

在第一卷里我們已处理过按立体横断面来計算其体积(V)的問題[198 段]。我們再提一下这里有关的公式。設立体界于平面

---

① 在曲面(1)連續并且图形(P)可求积的情形下，这个公式的推导不难，并且可以有完全严密的形式；参閱340段附注。

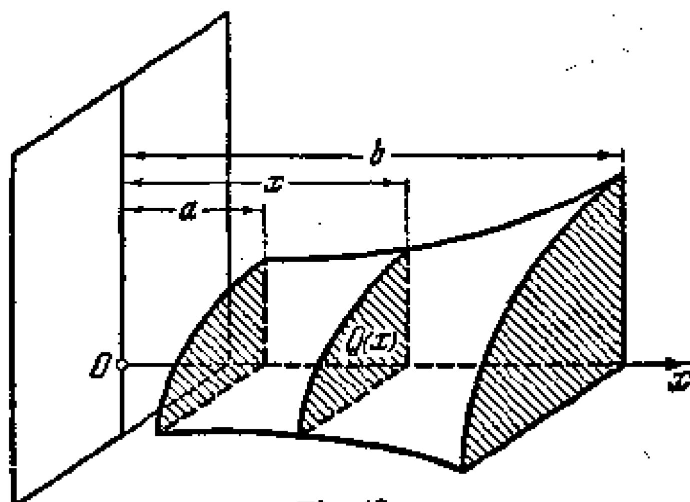


图 19.

$x=a$ 及 $x=b$ 之間(图 19)。又設立体被一个与 x 軸垂直而相应于横标 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 的平面所截时所得截面面积为 $Q(x)$。于是該立体体积,如果存在的話,可由公式

$$V=\int_a^b Q(x)dx \tag{3}$$

表出。

現在我們应用这个公式来計算上段所說柱体的体积。先由柱体底面为矩形 $[a,b;c,d]$ 的这一簡单情形說起(图 20)。

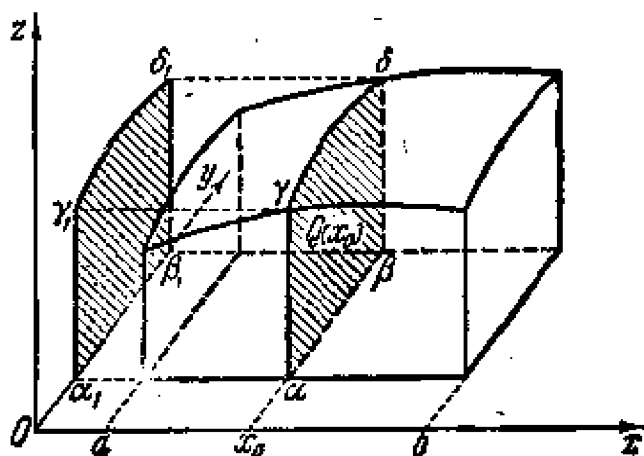


图 20.

柱体被平面 $x=x_0$ $(a\leqslant x_0\leqslant b)$ 截成一曲綫梯形 $\alpha\beta\delta\gamma$。要計算其面积我們将此图形投射到 yz 平面上如此得一与其全等的梯形 $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$,因为投射时并无变形。所以

$$Q(x_0)=\text{面积 } \alpha\beta\delta\gamma=\text{面积 } \alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1,$$

但 yz 平面上曲綫 $\gamma_1\delta_1$ 的方程显然是

$$z=f(x_0,y)\quad(c\leqslant y\leqslant d).$$

利用已知的曲綫梯形的定积分表出式我們有

$$Q(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)dy.$$

既然这种論証是对任一截面而言的，則一般地对 $a\leqslant x\leqslant b$ 恒有

$$Q(x)=\int_c^d f(x,y)dy^{①}.$$

将 $Q(x)$的值代入公式(3)，得

$$V=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

但对体积 V 我們也有表出式(2)，所以

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \tag{4}$$

——如此二重积分化成了累次积分。

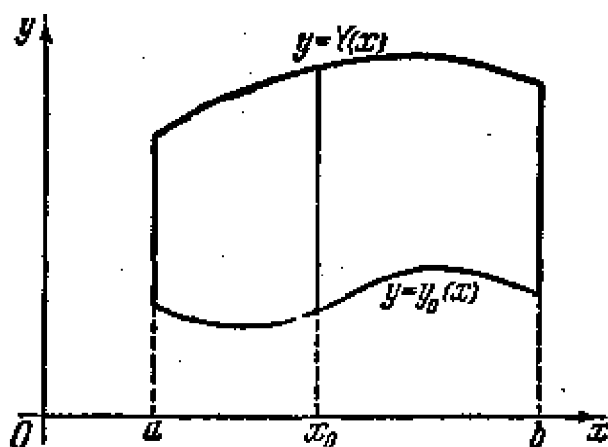


图 21.

同样的結果也可对这較一般的情形得出：xy 平面上的区域 (P) 是一个由两条曲綫

$$y=y_0(x),\quad y=Y(x)$$
$$(a\leqslant x\leqslant b)$$

及两条縱坐标綫 $x=a$ 与 $x=b$ 所围的曲綫梯形(图21)。与前面所考慮过的情形对比起来，其差別在于：以前是对任何

① 这个 x 的函数也是連續的[296段]，这是我們在推导公式(3)时所作的假設。

固定的 $x=x_0$, y 总在同一区間 $[c,d]$ 中变化, 而現在則 y 的变化区間

$$[y_0(x_0),\ Y(x_0)]$$

本身也与 x_0 有关, 如此

$$Q(x_0)=\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0,y)dy.$$

最后我們得出

$$V=\iint_{(P)} f(x,y)dP=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy^{①}. \tag{5}$$

如此我們利用几何解釋向讀者介紹了二重积分的概念及其計算法。

338. 二重积分定义 現在由純解析的观点对这問題作較一般的叙述。但在此我們也并不迴避几何或至少不迴避几何的語言 [**124**—**127** 段]。我們将說到所考虑的二元函数有定义的, "二維区域", 用"曲綫"将它分成小"区域", 取这些"区域"的"面积", 等等。其实这乃是算术的二維空間中的"区域"及"曲綫", 它們的"点"无非就是数偶。但平常所有这些所謂"形象"为便利起見就代以相应的眞正的几何形象, 而不加什么区别。特别是, 算术二維空間中的"区域面积"总是理解成相应几何区域的面积。

我們回忆一下, 要一个以某曲綫为界的区域能求积, 其充要条件是要这边界曲綫有等于 0 的面积 [**193** 段]。这种曲綫一大类是显式方程所表的連續曲綫或有限段这种曲綫所組成的曲綫; 特别是, 光滑或逐段光滑曲綫也都具有这种性质(我們不来証明了)。我們将始終假設区域 (P) 的边界以及将它划成小区域的曲綫都具有零面积(比方說, 屬于剛才所說这一类); 这就可以保証我們所需

① 这里的內层积分还是 x 的連續函数[参閱 **299** 段]。

要的面积全都存在。

現在我們回到事实上在 336 段已經講过的二重积分概念并詳細給出它的一般的定义。

設在区域(P)内定义了一个函数 $f(x, y)$①。将区域(P)用曲綫网划分为有限多个小区域(P_1), (P_2), $\cdots$, (P_n)，其面积为 P_1, P_2, $\cdots$, P_n。虽然比較簡单的是設想这些小区域都是連通的，但为以后講起来省事起見还是不排除非連通的可能性好些。在第 i 个小区域(P_i)内任取一点(ξ_i, η_i)，将这点上的函数值 $f(\xi_i, \eta_i)$ 乘以相应小区域的面积 P_i 并将所有这类乘积加起来。所得总和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\cdot P_i$$

就称为函数 $f(x, y)$在区域(P)内的积分和。

以 λ 表示小区域 (P_i) 的直徑② 之最大者。于是在 $\lambda\to 0$ 时积分和 σ 的有限极限

$$I=\lim \sigma^{③}$$

就叫做函数 $f(x, y)$ 在区域 (P) 中的二重积分并表成記号

$$I=\iint_{(P)} f(x, y)\,dP.$$

有积分的函数称为可积函数。

339. 二重积分存在条件 被积函数必須是有界的。事实上，如其不然，則将区域(P)以任一給定的方法分为小区域时，可凭点(ξ_i, η_i)的选擇使积分和任意变大，如此就不能存在有限的极限 I 了。

---

① 这里我們对它不作連續性的假設。

② 所謂点集的直徑乃指該集合任意两点間距离的上确界而言。由連續曲綫所圍的平面閉区域的直徑就是它的最大弦之长。

③ 讀者不难自己建立这个新极限的精确意义。

因此我們考慮已知函数 $f(x,y)$ 的可积分条件时預先假設它是有界的:

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M.$$

与一元函数的情形一样，这里也宜引入所謂达布氏下和及上和:

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

这里 m_i 及 M_i 各为函数 $f(x,y)$ 在区域 (P_i) 中的下确界及上确界。

在区域 (P) 的一定的划分之下，无論点 (ξ_i, η_i) 如何选取，恒有

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

但适当选取这些点可使 $f(\xi_i, \eta_i)$ 的值随意接近于 m_i（或 M_i），同时总和 σ 可随意接近于 s（或 S）。如此，达布下和及上和各为相应于区域的同一划分的积分和的下确界及上确界。

对于达布和，也如一維的情形一样，可以建立下列性質。

第一性質，在增添一些新的分割綫将小区域 (P_i) 作进一步划分时，达布下和不減上和不增。

第二性質，每个达布下和都不超过每个上和，那怕它們相应于 (P) 的不同划分都可以。

証明法与以前相似［177 段］；只是以前說分点的地方現在改說分割綫。

但有一点希望讀者注意。在一維的情形每一新分点明显地将一个旧区間分成两个，而两区間，共同部分仍为一区間。在平面上情形就复杂了，因为两曲綫可相交于很多的点（甚至相交于无穷点集）。所以連通的小区域可能被新添的曲綫分割成不連通的部分，同样两个連通区域的共同部分也可以是不連通的区域。这就是为什么我們一开头就不避免将基本区域分为不連通部分的原因。

其次，建立确界

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\}$$

的存在，并且有

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

最后，将一維情形的証明[178 段]逐字套过来就得出

定理 要二重积分存在，其充要条件是

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0,$$

或写成

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0, \tag{6}$$

这里 ω_i 是函数 $f(x, y)$ 在小区域 (P_i) 中的摆幅 $M_i - m_i$。

340. 可积函数类 用上面所建立的可积判定法不难証明：

I. 任何在区域 (P) 内連續的函数 $f(x, y)$ 都是可积的。

事实上，如果函数 f 在(閉)区域 (P) 内連續，則按均匀連續的性質对每个 $\varepsilon > 0$ 必有这样一个 $\delta > 0$ 与之相应，使在区域 (P) 的任何部分內，只要直徑小于 δ，函数的摆幅就小于 ε。現在設区域 (P) 分割成小区域 (P_i)，其直徑全都小于 δ。于是所有摆幅 $\omega_i < \varepsilon$，而

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

由此条件(6)成立。这就証明了該函数可积。

附注 現在已經不难給柱体体积公式(2)一个完全严密的推导。这可以完全与推导曲綫梯形的面积公式时一样做法[196 段]——引用內接体及外切体，它們的体积可表为达布和。

为了将可积分函数类作某些推广，我們需要下面的預备定理。

預备定理。 設在区域 (P) 内給了一条曲綫 (L)，其面积为 0，

于是对每个 $\varepsilon>0$ 恒有一个 $\delta>0$ 与之相应，使得只要区域 (P) 分割成直徑全小于 δ 的部分，則那些与 (L) 有公共点的部分的面积之和就小于 ε。

按假設曲綫 (L) 可以被夹在一个面积小于 ε 的多边形区域 (Q) 內。我們可使曲綫 (L) 与該区域边界 (K) 无公共点。于是两曲綫上变点間的距离有一最小值 $\delta>0$。

事实上，設該两連續曲綫各由参变方程

$$(K)\ x=\varphi(t),\quad y=\psi(t);\quad (L)\ x=\varphi^*(u),\quad y=\psi^*(u)$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T \qquad\qquad u_0\leqslant u\leqslant U$$

所給出，而 $\varphi,\psi,\varphi^*,\psi^*$ 每个都是它的自变数的連續函数。于是这些曲綫的任意两点間的距离

$$\sqrt{[\varphi(t)-\varphi^*(u)]^2+[\psi(t)-\psi^*(u)]^2}$$

是 (t,u) 在閉矩形区域 $[t_0,T;u_0,U]$ 內的連續函数，因此在那里面达到其最小值 [**136** 段]。因为曲綫不相交所以这个最小距离 δ 就异于 0。

現在我們将区域 (P) 任意划分为小区域，使其直徑小于 δ。那些碰到曲綫 (L) 的小区域必須整个落在区域 (Q) 里，所以其总面积小于 ε。

II. 如果有界函数 $f(x,y)$ 至多在有限条面积为 0 的曲綫上有不連續点，則它必可积分。

任意給定一数 $\varepsilon>0$。按假設函数 $f(x,y)$ 的所有"不連續綫"可以被包含在一个总面积小于 ε 的多边形区域 (Q) 內。在图 22 上这区域用斜綫标出。它的边界是有限多折綫 (L)，其面积显然等于 0。

在由 (P) 中除出区域 (Q) 內部后所得的閉区域里，函数 $f(x,y)$ 处处連續，也就是說均匀連續。所以，給定一个 $\varepsilon>0$，就可找到这

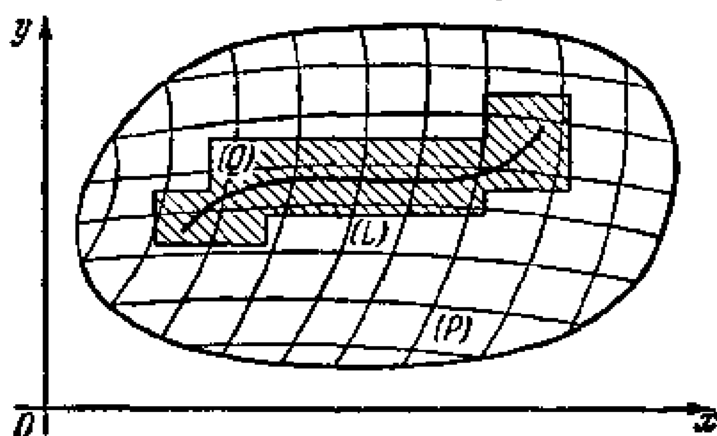


图 22.

样一个 $\delta_1>0$, 使在这区域的每个直徑小于 δ_1 的部分里函数 $f(x,y)$ 的擺幅 $<\varepsilon$。

現在由預备定理也可找到一个数 $\delta_2>0$, 使得只要区域 (P) 用任意的曲綫分为直徑小于 δ_2 的小区域时，其中至少碰到所有折綫 (L)（即被除外的多边形区域 (Q) 的边界）之一的各小区域面积之和必小于 ε。

設 δ 是 δ_1, δ_2 中較小的一个。将区域 (P) 分割为 (P_1), (P_2), $\cdots$, (P_n) 等部分使其直徑均小于 δ，并考虑相应的和

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

将此和拆成两个:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

其中指标 i' 相应于整个落在所除出的区域 (Q) 外面的那些区域 $(P_{i'})$，而 i'' 相应于所有其余的。我們分别来估計每个和。

因为所有 $(P_{i'})$ 都在由 (P) 除去 (Q) 所得的区域里，并且其直徑 $<\delta\leqslant\delta_1$，故所有 $\omega_{i'}<\varepsilon$，如此

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

另一方面，如果以Ω表示函数$f(x,y)$在全区域(P)中的摆幅，则有(因$\omega_i\leqslant\Omega$)

$$\sum_{i''}\omega_{i''}P_{i''}\leqslant\Omega\sum_{i''}P_{i''}.$$

这里$\Sigma P_{i''}$是小区域(P_i)中那些小区域的总面积：1)或者它整个落在所除外的区域(Q)里，2)或者它碰到这区域的边界(L)。前者总面积小于ε，因为$Q<\varepsilon$；后者总面积也如此，因为区域分成了直径$<\delta\leqslant\delta_2$的小区域。所以$\Sigma P_{i''}<2\varepsilon$，从而

$$\sum_{i''}\omega_{i''}P_{i''}<2\Omega\varepsilon.$$

最后在$\lambda<\delta$时有

$$\sum_i\omega_iP_i<(P+2\Omega)\varepsilon.$$

因为这个不等式右边随着ε可小到任何程度，故条件(6)成立，如此等等。

341. 可积函数及二重积分的性质 1°. 如果将一个区域(P)中的可积函数$f(x,y)$沿该区域中某面积为0的曲綫(L)上以任意方式改变其函数值（条件只是要改变后该函数仍保持有界），则仍得一在(P)中可积的函数，且其积分即等于$f(x,y)$的积分。

証明时須做出改变后的及原来的函数的积分和。它們的差别只在碰到曲綫(L)的那些区域上的項。但按**340**段的預备定理，这些区域的总面积在$\lambda\to0$时趋于0，由此已可断言两积分和趋于同一极限。

如此，二重积分的存在与大小不受被积函数沿有限数条零面积曲綫上所取之值的影响。

2°. 如果函数$f(x,y)$的定义域(P)被一条零面积曲綫(L)分为两个区域(P')和(P'')，则函数$f(x,y)$只要在全区域(P)上

可积，在分区域(P')和(P'')上也就可积，反之，只要在分区域(P')和(P'')上可积，在全区域(P)上也就可积。并且

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP=\iint\limits_{(P')} f(x,y)\,dP'+\iint\limits_{(P'')} f(x,y)\,dP''.$$

将区域(P')及(P'')任意分为小区域，则(P)也跟着分成了小区域：

$$(P_1),(P_2),\cdots,(P_n).$$

如果指标i'属于(P')中各小区域，而指标i''属于(P'')中各小区域，则

$$\Sigma\omega_i P_i=\Sigma\omega_{i'}P_{i'}+\Sigma\omega_{i''}P_{i''}.$$

設函数$f(x,y)$在(P)中可积，如此在$\lambda\to 0$时上式左边的和趋于0；于是右边的每个和也更不成問題都趋于0，如此該函数在(P')中及(P'')中也可积分。

反之，如果該函数在(P')中及(P'')可积，如此$\lambda\to 0$时右边两个和都趋于0，則左边的和也趋于0。但要記得，这个和不是对区域的任意分法得来：我們原是将区域(P')及(P'')分別进行分割的。

要由区域(P)的任意分法变成这种特殊的分法，只要在分割綫上添加曲綫(L)，其相应和的差别只在相应于与曲綫(L)接触的諸小区域的各項。但按**340**段的預备定理，其总面积在$\lambda\to 0$时趋于0，因而两和相差一无穷小。如此，条件(6)完全实現，而函数$f(x,y)$在(P)上可积分。

最后，所求証的公式只要命$\lambda\to 0$而对等式

$$\Sigma f(\xi_i,\eta_i)P_i=\Sigma f(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'}+\Sigma f(\xi_{i''},\eta_{i''})P_{i''}$$

取极限即可得出。

同样，利用积分和并加上极限过程也可得出下列三条性质：

3°. 如果将(P)内可积函数$f(x,y)$乘以常数k，則所得函数也可积，并且

$$\iint_{(P)} kf(x,y)dP=k\iint_{(P)} f(x,y)dP.$$

4°. 如果函数$f(x,y)$及$g(x,y)$在区域(P)内可积，則函数$f(x,y)\pm g(x,y)$也可积，并且

$$\iint_{(P)}[f(x,y)\pm g(x,y)]dP=\iint_{(P)} f(x,y)dP\pm\iint_{(P)} g(x,y)dP.$$

5°. 如果函数$f(x,y)$及$g(x,y)$在(P)内可积而且$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，則

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP\leqslant\iint_{(P)} g(x,y)dP.$$

还有，

6°. 如果函数$f(x,y)$可积，則函数$|f(x,y)|$也可积，并且有

$$\left|\iint_{(P)} f(x,y)dP\right|\leqslant\iint_{(P)}|f(x,y)|dP.$$

函数$|f|$的可积可由一点簡单的說明推出：該函数在任何区域(P_i)中的摆幅ω_i^*不超过相应的函数f的摆幅ω_i。事实上，这时候

$$\Sigma\omega_i^* P_i\leqslant\Sigma\omega_i P_i,$$

而第二和趋于0时第一和也就趋于0。

所求証的不等式就可以由不等式

$$|\Sigma f(\xi_i,\eta_i)P_i|\leqslant\Sigma|f(\xi_i,\eta_i)|P_i$$

取极限得出。

7°. 如果函数$f(x,y)$在(P)内可积并且满足

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M,$$

則

$$mP \leqslant \iint_{(P)} f(x,y)\,dP \leqslant MP. \tag{7}$$

这可由明显的不等式

$$mP \leqslant \Sigma f(\xi_i, \eta_i) P_i \leqslant MP$$

取极限得出。

如果以P除不等式(7)各項:

$$m \leqslant \frac{\iint_{(P)} f(x,y)\,dP}{P} \leqslant M$$

并以μ表示中間的比率,則得不等式(7)的另一写法

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = \mu P \quad (m \leqslant \mu \leqslant M), \tag{8}$$

它表示所謂中值定理。

現在特别假設函数$f(x,y)$在(P)內連續,并取m及M作其在区域(P)內的最小值及最大值。按維尔斯脫拉斯定理它們是存在的[136段]。于是,按著名的波尔察諾-哥西定理[134段],連續函数$f(x,y)$如取m及M两值,也就应該遍取其中間的每个值。如此,在区域(P)內应該总能找到这样一点$(\bar{x},\bar{y})$,使$\mu = f(\bar{x},\bar{y})$,而公式(8)就成为:

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot P. \tag{9}$$

这是中值定理的最有用的形式。

同样,也不难将推广中值定理[182段,10°]搬到当前的情形上来;这請讀者自己去做。

342. 积分作为可加性区域函数。对区域的微分法 我們来看一个平面(閉)区域(P)及其中所包含的(閉)小区域(p)。假設所有区域全是可求积的(有时还可加上一些别的限制)。如果对区域

(P) 的每个小区域(p)都有一个一定的数

$$\Phi=\Phi((p))$$

与之相应，则由此对那些(p)定义了一个“区域函数”。

这种区域函数的实例有：区域的面积，沿区域連續分布的質量，这种質量的靜力矩，連續分布的負荷或一般地加于区域上的力，等等。

如果将区域(p)分解为互不交叠的部分

$$(p)=(p')+(p'')$$

时恒有

$$\Phi((p))=\Phi((p'))+\Phi((p'')),$$

則区域函数 $\Phi((p))$ 称为可加的。所有上面所举各例中的函数都具有这种可加的性质。可加区域函数是特别重要的，因为在研究自然現象时常常会遇到。

設在可求积区域 (P) 中給定了一个可积分点函数 $f(M)=$ $=f(x, y)$；于是它在該区域的任何小区域 (p) 中也可积分，如此积分

$$\Phi((p))=\iint_{(p)} f(x, y)\, dP \tag{10}$$

也是区域(p)的函数。由 341 段 2° 它显然也是可加函数。

現在来討論“函数$\Phi((p))$对区域的微分法”。設M是区域(p)的一个定点，而(p)是任一包含該点的小区域。比率

$$\frac{\Phi((p))}{p},$$

其中 p 是区域(p)的面积——在区域(p)的直徑趋于 0 时的有限极限称为函数$\Phi((p))$在点M对区域的导数。例如，如果$\Phi((p))$是沿平面图形(p)連續分布的質量，則$f(M)$无非是質量在点M的分布密度；如果$\Phi((p))$表示加于图形(p)上的力，則$f(M)$表示在点

M的压力，等等。

特别令人感兴趣的是区域函数由(10)式所表出的积分时的情形，这里$f(x, y)$是一个在区域(P)内連續的函数。我們来証明，一个积分在点M对区域的导数就是被积函数在該点的函数值，即

$$f(M)=f(x, y).$$

事实上，取一个在导数定义中所說的区域(p)則按中值定理[参閱(9)]有

$$\Phi((p))=f(\bar{x}, \bar{y})\cdot p,$$

这里$(\bar{x}, \bar{y})$是区域(p)中某一点。如果区域(p)的直徑趨于0，則点$(\bar{x}, \bar{y})$就无限地接近于(x, y)，而按連續性有

$$\frac{\Phi((p))}{p}=f(\bar{x}, \bar{y})\to f(x, y),$$

这就是所求証的。

附注　前面我們已經談到过可加区間函数[204段]。因为这种函数总是某一点函数的两个值之差，所以对"綫性的"情形沒有必要像前面所讲对"平面的"情形那样来发展其理論。但在定积分对变上限的微分法定理中[183段12°]讀者不难看出与剛才所証的关于二重积分对区域的微分法定理相似之处。

§2. 二重积分的計算

343. 化矩形区域上的二重积分为累次积分　这个問題我們在337段已經用几何解釋并在某些特殊假設之下談到过了。

現在我們用解析工具并且以最一般的形式来討論它；首先由积分区域为矩形$[a, b; c, d]$时这一簡单情形开始。

定理　如果对定义在矩形$(P)=[a, b; c, d]$内的函数$f(x, y)$存在二重积分

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP \tag{1}$$

而且对在$[a,b]$内每一常数值x存在单积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \quad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{2}$$

則也存在累次积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy \tag{3}$$

并且等式

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy ① \tag{4}$$

成立。

証明 将确定矩形(P)的区間$[a,b]$及$[c,d]$用分点

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b,$$

$$y_0=c<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots<y_m=d.$$

分为一些小段，于是矩形(P)被分割成一些小矩形(图 23)：

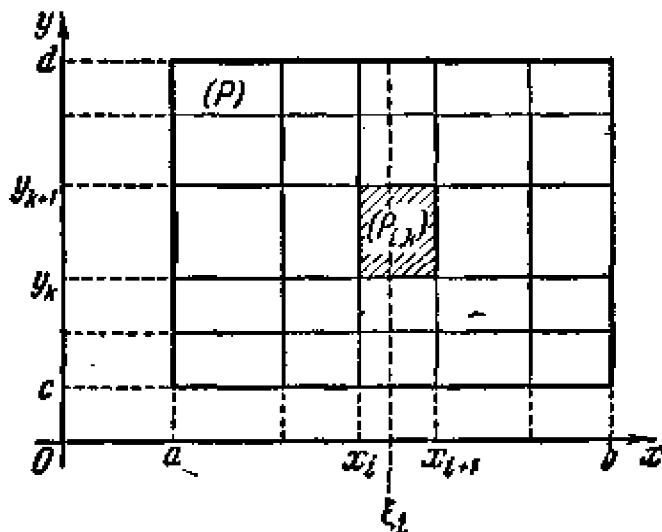


图 23.

---

① 讀者不难看出这一断言就是关于二重极限及累次极限的熟悉定理[131段]的一种变形。

$$(P_{i,k})=[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$$
$$(i=0, 1, \cdots, n-1; k=0, 1, \cdots, m-1).$$

以 $m_{i,k}$ 及 $M_{i,k}$ 表函数 $f(x, y)$ 在矩形 $(P_{i,k})$ 中的下确界及上确界，如此对此矩形中所有的点 (x, y) 有

$$m_{i,k} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{i,k}.$$

在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 內任意固定 x 的值 $x=\xi_i$ 并对 y 由 y_k 至 y_{k+1} 实行积分而有[182 段 8°]

$$m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant M_{i,k}\Delta y_k,$$

这里 $\Delta y_k = y_{k+1}-y_k$; 对 y 的积分是存在的，因为已假設积分(2)沿全区間 $[c, d]$ 是存在的。把这类不等式对 k 由 0 至 $m-1$ 加起来，得

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k.$$

如以 $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ 遍乘此不等式各端并且对指标 i 由 0 至 $n-1$ 求和，則得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k.$$

在上式中間我們得到了函数 $I(x)$ 的积分和。而两头則无非是二重积分(1)的达布和 s 及 S。事实上，因为 $\Delta x_i \Delta y_k$ 是矩形 $(P_{i,k})$ 的面积 $P_{i,k}$，故我們有，比方說，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

如此，最后得出

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S.$$

如果現在令所有 Δx_i 及 Δy_k 同时趋于 0，則由二重积分(1)的存在两和 s 及 S 将趋于該积分为极限。在这情形就有

$$\lim\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i=\iint_{(P)} f(x,y)\,dP,$$

即二重积分(1)同时也就是函数 $I(x)$ 的积分。

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP=\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

这就是所求証的。

对調变数 x 与 y 的地位，則与(4)同样还可証明公式

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx, \tag{4*}$$

但这里假設 $y=$ 常数时积分

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

存在。

附注　如果連同二重积分(1)还存在下列两个单积分：

$$\int_c^d f(x,y)\,dy\,(x\text{ 为常数})\text{及}\int_a^b f(x,y)\,dx\,(y\text{ 为常数}),$$

則同时成立公式(4)及(4*)，由此有

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{5}$$

应用公式(4) 或 (4*)要以二重积分及一个单积分的存在为条件。如果函数 $f(x,y)$ 連續(这是在实际上寻常遇到的情形)，則所有上述积分都保証是存在的。在这情形上述两公式随便哪个都可用来作二重积分的实际計算，因为单积分計算起来要容易得多。

在証明公式(4)时比較自然的是将矩形(P)用平行坐标軸的直綫分割为有面积$\Delta x_i \Delta y_k$的矩形元素。为了使二重积分符号本身能表現出它是用平行于坐标軸的直綫分割积分区域得出的，我們将

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$$

写成

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy\left[\text{或}\iint\limits_{(P)} f(x,y)dydx\right].$$

此外，既然矩形$(P)=[a,b;c,d]$內的二重积分可化为累次积分，故二重积分本身也就常常用与累次积分相似的記号来表示：

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \text{ 或 } \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy.$$

在这記号"外层的积分"与"外层的微分"相应，如此只要插入括号就可得出一个累次积分：

$$\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx \text{ 或 } \int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy.$$

例 1)
$$I=\int_0^1\int_0^1 \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

比較簡单的是按公式(4)将I表成：

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

因为我們可以立即得出

$$\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

如此

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

如果采取另一累次积分公式,則求积稍为复杂一点:

$$I=\int_0^1 ydy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I=\int_0^1\frac{ydy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

不难将这答案化为前面的形式。

2) 試求这样一个立体的体积 V: 它下面以 xy 平面为界, 側面以平面以 $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ 为界, 而上面以椭圓拋物面

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

为界。

首先按公式(2)有

$$V=\iint\limits_{[0,a;0,b]}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dP.$$

这积分可按公式(4*)来計算:

$$V=\int_0^b dy\int_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\int_0^b\left(\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right)dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

344. 化曲綫区域上二重积分为累次积分 我們来考虑一个区域(P),其上下以两連續曲綫

$$\begin{matrix}y=y_0(x),\\ y=Y(x)\end{matrix}\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

为界,两側則以两縱标綫 $x=a$ 及 $x=b$ 为界(图 24)。于是,与 **343** 段的定理相似,我們有

定理 如果对定义于区域(P)內的函数$f(x,y)$存在二重积分

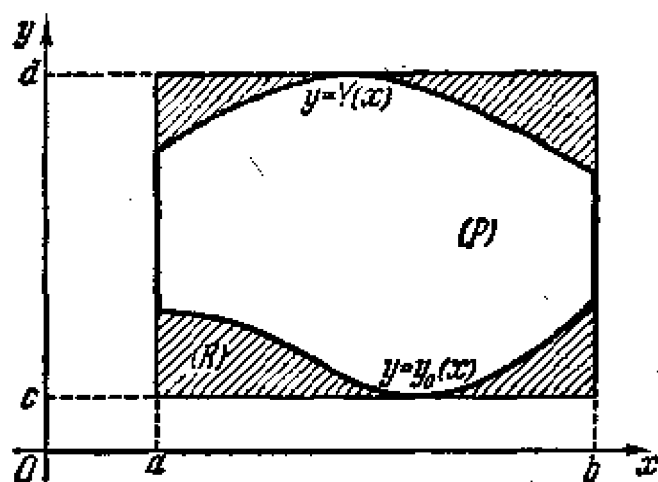


图 24.

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$$

并且对$[a,b]$内每一固定x值存在单积分

$$I(x)=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\,dy,$$

则也存在累次积分

$$\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\,dy,$$

并且等式:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\,dy \tag{6}$$

成立。

証明 在于将这情形化为 **343** 段中的情形。即将区域(P)包容在矩形

$$(R)=[a,b;c,d]$$

内，令 $c=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} y_0(x)$, $d=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Y(x)$ (图 24)，而在此矩形中定义一个函数 $f^*(x,y)$ 如下:

$$f^*(x, y)=\begin{cases}f(x, y), \text{如点}(x, y)\text{属于区域}(P), \\ 0, \text{在矩形}(R)\text{其余点上。}\end{cases}$$

我們来証明这个函数满足定理 343 的条件。

首先，它在区域(P)内是可积的，因为这里它与所設可积函数$f(x, y)$重合；所以显然有

$$\iint_{(P)} f^*(x, y)\, dP=\iint_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

另一方面，在(P)外$f^*(x, y)=0$，所以在矩形(R)[①]的剩下部分$(Q)=(R)-(P)$内也可积，并且

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y)\, dQ=0.$$

于是，由 341 段 2°，函数 f^* 在全矩形(R)中可积，并且

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)\, dR=\iint_{(P)} f(x, y)\, dP. \tag{7}$$

在 x 取$[a, b]$内定值时积分

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy=\int_c^{y_0(x)} f^* dy+\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^* dy+\int_{Y(x)}^{d} f^* dy,$$

存在因为左边三个积分都是存在的。事实上，因为在 y 变化区間$[c, y_0(x)]$及$[Y(x) d]$内函数 $f^*(x, y)=0$，所以第一个及第三个积分都存在且等于 0。第二个积分則与函数 $f(x, y)$的积分相同：

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)\, dy=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy,$$

因为对$[y_0(x), Y(x)]$内的 y, $f^*(x, y)=f(x, y)$。最后，

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy. \tag{8}$$

---

① 在这区域边界上的值不起作用[参閱 341 段 1°]。

由上述定理，函数 f^* 的累次积分存在，并且它就等于二重积分[参閱 343 段，(4)]：

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)\,dR=\int_a^b dx\int_c^d f^*(x,y)\,dy.$$

注意到公式(7)与(8)可以看出这公式就等价于公式(6)。

如果区域(P)是另一型以曲綫

$$x=x_0(y),\quad x=X(y)\quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

及直綫 $y=c$，$y=d$ 为界的曲綫梯形，則公式(6)将换成

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP=\int_c^d dy\int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)\,dx, \tag{6*}$$

这里假設，除存在二重积分外，在 y 为常数时还存在对 x 的单积分。

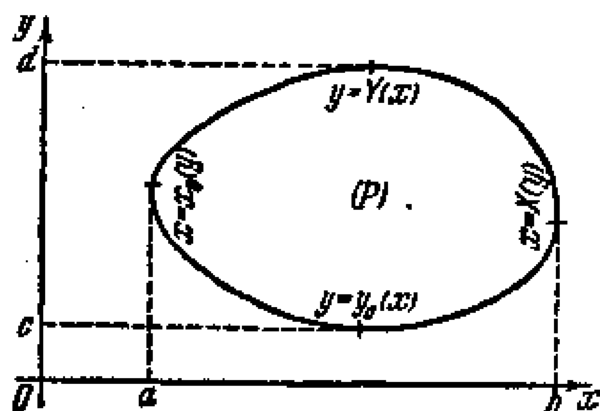


图 25.

附注　如果区域(P)的界綫只与縱坐标軸及横坐标軸的平行綫相交于两点（例如像在图 25 所表的情形），則在前述条件下該两公式都可应用。两式結合起来得出等式

$$\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)\,dx, \tag{9}$$

它具有独立的意义。这与 343 段公式(5)相类似。

如果函数 $f(x,y)$在区域(P)内連續，則二重积分与单积分都存在，并且可用公式(6)或(6*)（看区域(P)的类型而定）来計算二重积分。

在边界較复杂的情形通常将区域(P)分割为有限多个所討論

过的类型的部分。例如，图 26 上的图形(P)用直綫 $x=\alpha$ 分成了三个这样的部分：(P_1)，(P_2)，(P_3)。于是所求的积分由 341 段 2° 也就表为这些部分区域上各个积分之和。每个都可按已講过的办法算出。

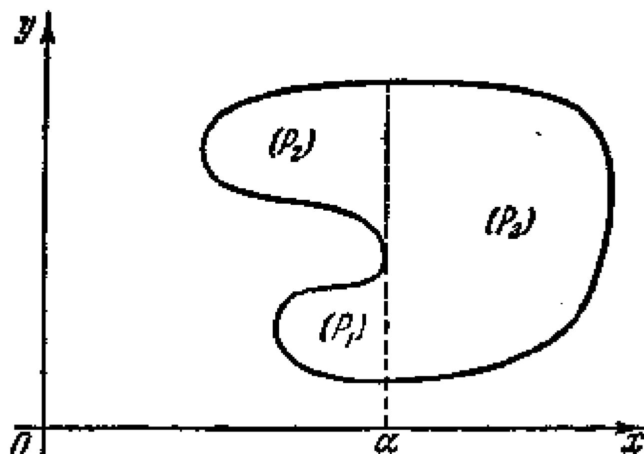


图 26.

因为在一般的情形，我們将問題化为 343 段的定理，故論証的基础仍是将所考慮的图形分成矩形元素。故此时二重积分同样常常用記号

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx dy$$

来表示；乘积 $dxdy$ 象征矩形元素的面积。

下列記号的意义不待解釋也就自然明白了

$$\int_a^b\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f dy dx \text{ 或 } \int_c^d\int_{x_0(y)}^{X(y)} f dx dy.$$

例 1) 計算二重积分

$$I=\iint\limits_{(P)} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dP,$$

这里(P)是一个圓，其半徑为R，圓心在坐标原点（图 27）。

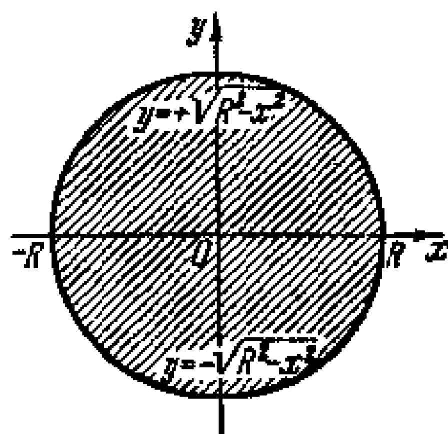


图 27.

解 区域(P)的边界有方程$x^2+y^2=R^2$，故$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$。显然 $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ 是上半个圓的方程，$y=-\sqrt{R^2-x^2}$ 是下半个圓的方程。如此，x 取区間 $[-R, R]$ 內一固定值时 y 由 $-\sqrt{R^2-x^2}$ 变至 $+\sqrt{R^2-x^2}$。依据公式(6)并注意被积函数是 y 的偶函数，我們有

$$I=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dy=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2\,dy.$$

算出內层的积分:

$$\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2\,dy=\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

然后(仍考虑到偶函数的性质)有

$$I=\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^2\,dx=\frac{4}{3}\int_{0}^{R}(R^2-x^2)^2dx=\frac{32}{45}R^5.$$

同样也可用公式(6*)来計算。

2) 計算积分

$$I=\iint\sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy,$$

积分区域是一个三角形,由直綫 $y=0, x=1, y=x$ 所构成。

解 按公式(6)

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy;$$

內层积分等于

$$\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy=\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\Big|_{y=0}^{y=x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2,$$

而結果是

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

計算本也可按公式(6*)来做,但这样会碰到較难的积分。在选擇計算途徑时应經常估計到这种情况。

3) 計算积分

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}x^{p-1}y^{q-1}dxdy,$$

假設 $p\geqslant 1, q\geqslant 1$①。

① 在此加这限制只是为了使被积函数不致变成无穷大;下面 4) 里这限制将减弱。

按公式(5)有

$$I=\int_0^1 x^{p-1}dx\int_0^{1-x} y^{q-1}dy=\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\frac{1}{q}\mathrm{B}(p,q+1).$$

結果:

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

这公式属于狄里希來。

4) 在 $p<1$(或 $q<1$)的情形該被积函数于 $x=0$ 而 $0<y\leqslant 1$ 时 (或 $y=0$ 而 $0<x\leqslant 1$ 时)变成无穷大。寻常的定积分定义在此已不適用: 积分成了"非正常的"而其确定需要补充的极限过程。我們就以所考虑的例子来說明这一点, 在此假設 $0<p<1$ 且 $0<q<1$。先取下列积分($\varepsilon>0$):

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant \varepsilon,\ y\geqslant \varepsilon\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}dx\int_\varepsilon^{1-x} y^{q-1}dy=$$

$$=\frac{1}{q}\left[\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^q dx-\varepsilon^q\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}dx\right].$$

如果現在令 ε 趋于 0(即压縮图 28 上用来隔离"奇綫"的阴影窄条), 則在求极限时仍得出 $\frac{1}{q}\mathrm{B}(p,q+1)$。这极限就是所求的非正常积分。

附注　在一般情形, 当被积函数在个别("奇")点上或沿某些("奇")綫变成无穷大时則用一些邻域将它們分出, 对这些邻域以外的区域算出积分, 然后取极限而将所設邻域压縮成点或綫。如果有限极限存在, 則它就給出非正常积分之值。

用同样方式可构成无穷区域上的"非正常"积分概念: 先对有限区域考虑正常积分, 然后扩充这区域使逐步包括无穷区域的全部点; 补充的极限过程就是由此而来。

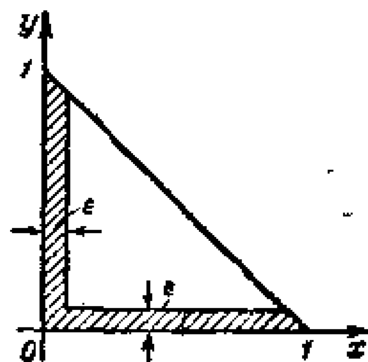


图 28.

如果被积函数是正的, 則选擇何种方式压縮"奇"点和"奇"綫的邻域或扩充有限区域是沒有关系的。

345. 力学上的应用　一切几何上的及力学上的量, 只要是有关沿某图

形(P)的平面連續分布質量的并且表示可加区域函数的，原則上都可表为該图形上的二重积分。

这里我們打算簡略指出通常如何得出这类公式，此中思考路綫与应用单重定积分时一样[204 段]。

取出图形(P)的一个元素部分而作一能使計算簡化的假設，例如整个元素的質量都集中在一点上或者質量的分布密度在該元素范圍里是常数，这就能使所求量 Q 的元素 dQ 近似地表为

$$dQ=q(M)dP,$$

誤差是比 dP 高阶的无穷小，于是 Q 的精确值可以公式

$$Q=\iint\limits_{(P)} q(M)dP$$

表出。

这公式可以，比方說，这样建立[参閱 204 段]。將元素 dQ 的近似式加起来就能以积分和形式得出量 Q 的近似值，而取极限即得 Q 的精确值，后者已經是和的极限形式，也即积分的形式。

設質量沿区域(P)連續分布，并且在点 $M(x,y)$的(表面)密度設为

$$\rho(M)=\rho(x,y).$$

不难了解，此时質量的元素就是

$$dm=\rho dP,$$

如此全質量就由积分

$$m=\iint\limits_{(P)} \rho dP \tag{10}$$

表出。

其次，对坐标軸的靜矩元素及慣矩元素为

$$dK_x=ydm=y\rho dP,\quad dK_y=xdm=x\rho dP,$$

$$dI_x=y^2dm=y^2\rho dP,\quad dI_y=x^2dm=x^2\rho dP.$$

由此立即得出这些矩本身是:

$$\left.\begin{aligned} K_x=\iint\limits_{(P)} y\rho dP,\quad K_y=\iint\limits_{(P)} x\rho dP,\\ I_x=\iint\limits_{(P)} y^2\rho dP,\quad I_y=\iint\limits_{(P)} x^2\rho dP. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

現在按寻常方式可得图形重心坐标如下：

$$\xi=\frac{\iint\limits_{(P)} x\rho dP}{m}, \quad \eta=\frac{\iint\limits_{(P)} y\rho dP}{m}. \tag{12}$$

在图形均匀时，$\rho=$常数，这些公式就簡化为

$$\xi=\frac{\iint\limits_{(P)} x dP}{P}, \quad \eta=\frac{\iint\limits_{(P)} y dP}{P}. \tag{13}$$

在个别簡单情形用二重积分也可解决有关立体的，比方說关于柱体的类似問題。

設給了这样一个柱体，它由曲面 $z=z(x, y)$，該曲面在 xy 平面上的投影 (P) 及母綫平行于 z 軸的投射柱面所圍成。如果，比方說，要決定均匀柱体的靜矩 K_{xy}（为簡单起見假設体积密度等于 1），則我們設想这柱体由一系列以 dP 为底以 z 为高的細豎条所組成。豎条对 xy 平面的靜矩等于其質量或——在当前情形也就是——体积 zdP，乘以其重心与此平面的距离，即乘以 $\frac{1}{2}z$。所以靜矩元素为

$$dK_{xy}=\frac{1}{2}z^2dP,$$

由此对全体豎条求和即得

$$K_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2dP. \tag{14}$$

同样可建立公式

$$K_{zx}=\iint\limits_{(P)} yzdP, \quad K_{yz}=\iint\limits_{(P)} xzdP. \tag{14a}$$

由此不难得出柱体重心 ξ, η, ζ 的坐标

$$\xi=\frac{K_{yz}}{V}=\frac{\iint\limits_{(P)} xzdP}{V}, \text{ 等等。}$$

同样也可推出柱体对 z 軸的慣矩 I_z 的公式及对坐标面 yz，zx 的慣矩 I_{yz}，I_{zx} 的公式：

$$I_z=\iint\limits_{(P)}(x^2+y^2)zdP, \quad I_{zx}=\iint\limits_{(P)} y^2zdP, \quad I_{yz}=\iint\limits_{(P)} x^2zdP. \tag{15}$$

由此显然 $I_z=I_{zx}+I_{yz}$。

如果質量分布的空間密度 ρ 是 z 的函数，則二重积分已經不够了而須要用到三重积分[参閱379段]。

例 1) 求均匀椭圆体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

包含在第一象限中这一部分的重心(圖29)。

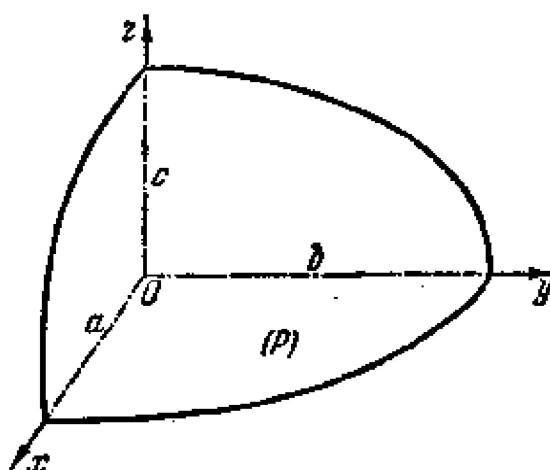


圖 29.

解 区域 (P) 是由两坐标軸及椭圓弧

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant a)$$

圍成椭圓体表面的显式方程是

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

按公式(14)

$$K_{xy}=\frac{1}{2}c^2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=\frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{16}abc^2.$$

同样

$$K_{yz}=\frac{\pi}{16}a^2bc, \quad K_{zx}=\frac{\pi}{16}ab^2c.$$

同时体积

$$V=\frac{\pi}{6}abc,$$

如此

$$\xi=\frac{3}{8}a, \quad \eta=\frac{3}{8}b, \quad \zeta=\frac{3}{8}c.$$

2) 求均匀椭圆体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

对坐标平面的慣矩。

解 不妨将椭圆体限于一个卦限而将結果乘以8. 在这情形区域 (P) 就是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

的一个象限。

我們有

$$I_{zx}=8\iint_{(P)} y^2 z\,dP=\frac{8c}{a}\int_0^b y^2 dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx=$$

$$=2\pi ac\int_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

同样

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\quad I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

§3. 格林公式

346. 格林公式的推导 本段中我們要来建立一个表示二重积分与綫积分之間的关系的重要公式。

我們来看区域(D)，它是一个曲綫梯形(图形 30)，其界綫(L)由曲綫

$$(PQ):\ y=y_0(x),\qquad (SR):\ y=Y(x),\qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

及两条平行于 y 軸的綫段 PS 及 QR 所組成。

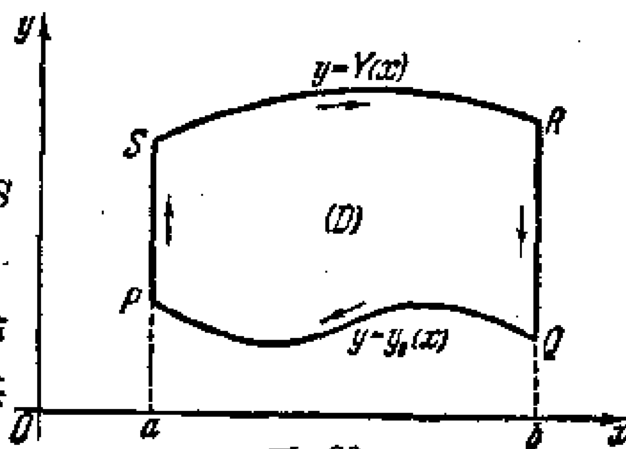


图 30.

我們假設在区域 (D) 中給了一个函数 $P(x,y)$，它連同其导函数$\frac{\partial P}{\partial y}$都是連續的。

按 **344** 段公式(6)計算二重积分

$$\iint_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy;$$

我們得出

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

这里内层积分不难借助原函数 $P(x, y)$ 算出，即:

$$\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y)\Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x)).$$

如此，

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b P(x, Y(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_0(x))dx;$$

后面两个积分都可改写成綫积分。事实上，按 **331** 段公式 (7) 可看出

$$\int\limits_a^b P(x, Y(x))dx = \int\limits_{(SR)} P(x, y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x, y_0(x))dx = \int\limits_{(PQ)} P(x, y)dx.$$

由此有

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(SR)} P(x, y)dx - \int\limits_{(PQ)} P(x, y)dx =$$

$$= \int\limits_{(SR)} P(x, y)dx + \int\limits_{(QP)} P(x, y)dx.$$

为了考虑沿区域(D)全界綫(L)的积分，我們在所得等式右边还添加积分

$$\int\limits_{(PS)} P(x, y)dx \text{ 和 } \int\limits_{(RQ)} P(x, y)dx,$$

它們显然等于0，因为綫段(PS)及(RQ)是与 x 軸垂直的[参閱 **331** 段]。我們得

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_{(PS)}Pdx+\int\limits_{(SR)}Pdx+\int\limits_{(RQ)}Pdx+\int\limits_{(QP)}Pdx.$$

这等式右边是一个沿区域(D)閉界綫(L)全部所取的积分，但依循負的方向。按沿閉路綫积分表示法的規定[332 段]我們最后可将所得公式写成这样:

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{(L)}P(x,y)dx. \tag{1}$$

虽然这个公式是假設坐标軸取右定向法推出的，但不难看出它在左定向法之下仍保持不变(只是迴繞界綫的正向反过来了)。

我們至今都假設图形(D)是图 30 所表那种“曲綫梯形”并且公式(1)只对这种区域証明是正确的。事实上該公式对較复杂的区域也成立，界綫不妨由几条曲綫組成。只要假設图形(D)可用平行于y軸的直綫分成有限多个上述那种“曲綫梯形”[例如參閱图 26]。对每个这种梯形分別写出像(1)式的公式而将这些等式两边加起来。左边得一个二重积分，展布在全区域(D)上，右边則为沿所有各部分界綫所取諸积分之和。但右边可化为一个沿界綫(L)的积分，因为每个輔助綫段上的积分都等于 0。如此，在这情形公式(1)也成立。

同样可建立公式

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_{(L)}Q(x,y)dy, \tag{2}$$

这里假設在区域(D)上函数Q連同其偏导函数都連續。在此先取图 31 上那样的曲綫梯形作为区域(D)。它以曲綫

$$\left.\begin{array}{l}(PS):\ x=x_0(y),\\(QR):\ x=X(y)\end{array}\right.\quad(c\leqslant y\leqslant d)$$

及两条平行于x軸的綫段(PQ)和(SR)为界。然后該公式也如前面那样推广到可用平行于x軸的直綫分为有限个这种曲綫梯形的

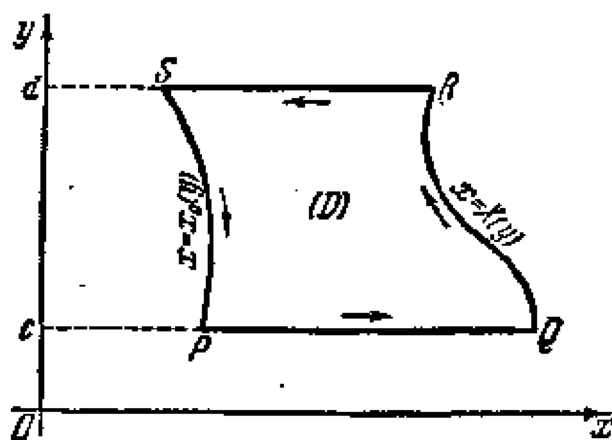


图 31.

区域。

最后，如果区域(D)同时满足两种情形的条件，即既可分为有限个第一类型的梯形，又可(与此无关地)分为有限个第二类型的梯形，則对此区域(1)和(2)两公式都成立，当然在此要假設函数P, Q及其导函数$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$都是連續的。由公式(2)减去(1)，得

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy=\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \tag{3}$$

这就是格林公式。①

附注　使公式(3)成立的条件采取以較广泛的形式。即，对任何由一条或几条逐段光滑界綫所圍的区域格林公式都成立。这我們不来証明了。

347. 以綫积分表出面积　下面我們将常常用到格林公式；現在举一个最簡单的例子——面积的計算。

如果公式(3)中函数P和Q这样选取使$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$等于1，則二重积分化为图形$(D)$的面积$D$，而我們得出借助沿該图形界綫$(L)$

① George Green(1793—1841)是英国数学家。但事实上，公式(3)并不属于格林，其所以加上以他的名字只是因为它与格林所提出的三維情形的别的公式相似。高斯及黎曼已經利用过公式(3)，而其特殊形式則在十八世紀分析著作中已經出現了。

的綫积分表达其面积的公式。例如，令 $Q=x$, $P=0$, 我們有

$$D=\int_{(L)} xdy. \tag{4}$$

在 $Q=0$, $P=-y$ 时得

$$D=-\int_{(L)} ydx. \tag{5}$$

但更有用的是下列公式其中取 $Q=\frac{1}{2}x$, $P=-\frac{1}{2}y$:

$$D=\frac{1}{2}\int_{(L)} xdy-ydx. \tag{6}$$

例 1) 求半軸为 a 与 b 的橢圓面积。

采用橢圓的参变方程：$x=a\cos t, y=b\sin t (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$。按公式(6)

$$D=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t dt-b\sin t(-a\sin t)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt=\pi ab.$$

綫积分用331段公式(6)来計算；决定积分限时注意界綫环行正向相应于参变数値增大。

2) 求笛卡尔叶形綫

$$x^3+y^3=3axy$$

一圈的面积(图32)。

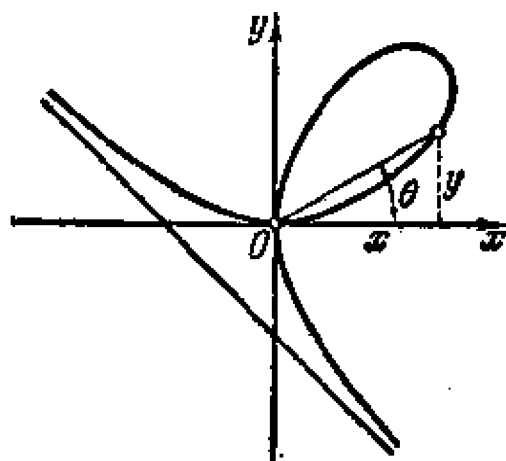


图 32.

要得出界綫的参变方程我們令 $y=tx$①。于是

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由几何想法，显然在参变数 t 由 0 变至 ∞ 时該綫描出一圈 $\left(\text{因 } t=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta, \text{而 } \theta \text{ 由 0 变至} \frac{\pi}{2}\right)$。我們有

① 这种置換通常适于下述的情形：代数曲綫的方程中有两組齐次的項而次数差1。

$$dx=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt,\ dy=3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt$$

而

$$D=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

注意这里我們用了无穷积分限的非正常积分，而当初在 331 段推出公式(6)时却認为参变数的变化区間是有限的。不难証实这样做法是合理的：只要預先引入另一具有有限变化区間的参变数（例如角 θ），然后化为参变数 $t=\frac{y}{x}$。

§4. 綫积分与积分路綫无关的条件

348. 沿簡单閉界綫的积分 格林公式使我們很容易完全解决第二型綫积分問題，这个問題在第二十章§2里只能偶而提到[例如 333 段附注]。

設在某連通区域(E)內給定了两个連續函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$。我們先来討論积分

$$\int_{(L)}Pdx+Qdy$$

沿(E)內任何簡单閉界綫(L)[①]化为 0 的問題。

要使用格林公式，我們还須再假設在(E)內存在連續导函数$\frac{\partial P}{\partial y}$及$\frac{\partial Q}{\partial x}$。此外还須設在$(E)$內任取一閉界綫$(L)$时，$(L)$所包圍区域$(D)$也整个屬于$(E)$。換句話說，区域$(E)$不应有“空洞”，那怕这种空洞只是些点子而已。具有这种性質的連通区域叫做单連通区域。

如果所講的是有限区域，即不展布到无穷的区域，則单連通概念可以陈述得簡单一些：区域应由惟一閉路綫所包圍。图 33 表出

① 本段所談曲綫全是逐段光滑的。

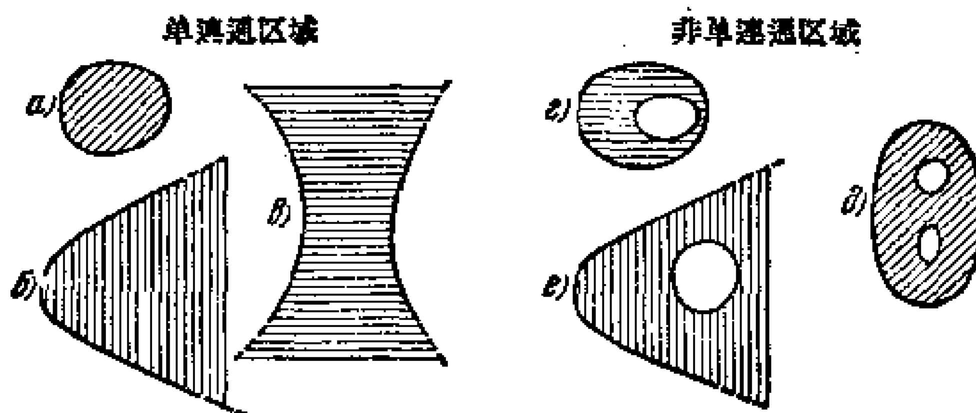


图 33.

的是单連通及非单連通区域的例子。其中 $а)$, $г)$, $д)$是有限的, $б)$, $в)$, $е)$是伸展至无穷的。

現在陈述一个基础命題:

定理 1. 設在单連通区域 (E) 內函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 連同其导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都有定义并且連續; 更設 (L) 是区域 (E) 內任意的简单閉曲綫。于是等式

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = 0 \tag{1}$$

成立的必要而充分的条件是在 (E) 內成立恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

事实上, 按格林公式等式(1)就等价于等式

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0. \tag{2}$$

显然, 条件 (A) 是此式成立的充分条件。要証明其为必要条件, 我們假設等式(2)恒眞。于是由被积函数的連續性可借助积分对区域的微分法[**342** 段]得出在(E)內恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \text{ 即 } \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

的結論。

349. 沿連結任意两点的曲綫的积分 最后，我們来討論下列問題：沿連結区域 (E) 内两点 A 与 B 的曲綫 (AB) 的积分

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy \tag{3}$$

在什么条件下乃与路綫 (AB) 的形状无关？这里起决定性作用的也就是条件(A)。

定理 2. 在前面的假設之下，要积分(3)与积分路綫无关，其必要而充分的条件是(A)①。

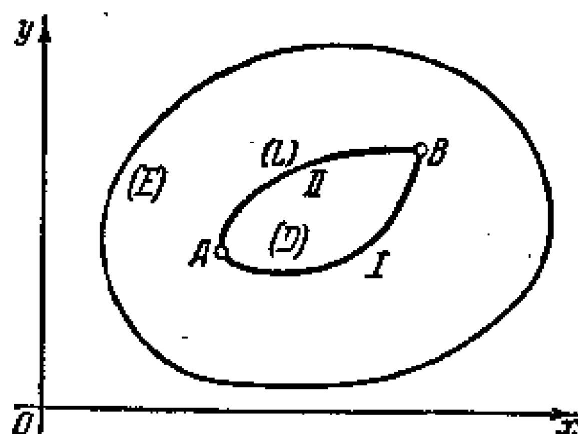


图 34.

必要性。設积分(3)与路綫无关而在 (E) 内取任一簡单閉界綫 (L)（图 34）。如果 A 与 B 是其两点，則按假設

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}, \tag{4}$$

由此有

$$\int_{(L)} = \int_{(AIB)} + \int_{(BIIA)} = 0. \tag{5}$$

所以，按定理 1 必須实现条件(A)。

充分性。現在我們假設等式(A)在 (E) 内成立。要来証明，如果将該区域内任意两点 A, B 用两条簡单曲綫 (AIB) 和 $(AIIB)$ 連結起来，則等式(4)总是成立的。这很容易做到，如果所說两曲綫除 A, B 外沒有公共点的話，因为这时候界綫 $(L)=(AIBIIA)$ 就成簡单閉曲綫，故按定理 1 等式(5)成立，而由它就可反过来推出(4)。

如果曲綫 (AIB) 和 $(AIIB)$ 相交于有限多个点，則界綫 (L) 已

① 讀者不难驗証，条件(A)在 333 段例 1)与 4)中实现，在例 2)，3)，5)中不实现。

經不是簡单的：它在这些点上自身交叉(图 35)。由点 A 出发并循曲綫 (L) 的方向描出其一部分至第一个交叉点 C 为止。除去所得閉曲綫 (L_1)，延續这路綫到另一交叉点，这样又可分出一条閉曲綫 (L_2)，如此等等。經有限多步后曲綫 (L) 終于被分成有限多条簡单(不自身交叉的)閉曲綫

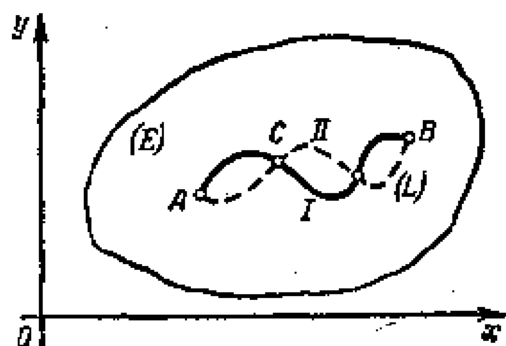


图 35.

$$(L_1),\ (L_2),\cdots$$

沿它們的积分显然是 0。这就是說，积分沿全曲綫 (L) 都等于 0，而由此又可推出(4)。

但曲綫 (AIB) 及 $(AIIB)$ 一般甚至可交叉无穷多次，在这情形上面的推証法就不适用了。要克服这个困难，我們来証明下面关于用沿折綫的积分来逼近綫积分的預备定理。

預备定理 設函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在某开区域 (E) 內連續，而 (L) 是包含在 (E) 內的逐段光滑的非閉曲綫。如果在 (L) 中內接一条折綫 (Λ)，則当其最大的节趋于 0 时我們有

$$\lim\int_{(\Lambda)} Pdx+Qdy=\int_{(L)} Pdx+Qdy.$$

只要限于积分 $\int_{(\Lambda)} Pdx$ 和 $\int_{(L)} Pdx$ 的情形就够了；对积分 $\int_{(\Lambda)} Qdy$ 及 $\int_{(L)} Qdy$ 推証法完全相似。設在 (L) 中作一內接折綫 (Λ)，其頂点在

$$A\equiv A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_i,\ A_{i+1},\ \cdots,\ A_n\equiv B,$$

以 x_i, P_i 表 x, P 在点 A_i 之値。对任意指定的 $\varepsilon>0$，弦 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 之长可如此地小，使 1) 連續函数 P 沿 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的摆幅小于 ε 并且 2) 积分和 $\sum_i P_i\Delta x_i$ 与其极限 $\int_{(L)} Pdx$ 之差也小于 ε。

显然，我們有

$$\int_{(\Lambda)} Pdx=\sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} Pdx$$

并且另一方面

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} P_i dx,$$

如此

$$\int_{(\Lambda)} P dx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} [P - P_i] dx.$$

但右边第一项与积分 $\int_{(L)} P dx$ 相差小于 ε [参閱 2)]，而第二项絕对值不超过 $\varepsilon \sum_i \overline{A_i A_{i+1}}$[参閱 1)]，即更小于 $L \cdot \varepsilon$(L 是曲綫(L)之長)。

所以最后有

$$\left| \int_{(\Lambda)} P dx - \int_{(L)} P dx \right| < \varepsilon(1+L),$$

这就証明了我們的断言。

現在回到那中断了的充分性証明。在曲綫(AIB)和($AIIB$)上各作內接折綫(Λ_I)和(Λ_{II})；它們最多只能相交于有限个点，而这时候如已証明的將有

$$\int_{(\Lambda_I)} = \int_{(\Lambda_{II})}.$$

剩下只要对这等式取极限，把两折綫所有各节均看作趋于 0，結果仍得等式(4)。

350. 与恰当微分問題的联系

微分式

$$P dx + Q dy \tag{6}$$

使人想起二元函数 $F(x, y)$ 的(全)微分表出式[142 段]

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

它只要令

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \tag{7}$$

即与(6)式等同。

但远非每个像(6)那样的式子都成"恰当微分"的，即并非每个

这样的式子都有"原函数" $F(x,y)$ 以該式为其(全)微分。在解决(7)式是否恰当微分的問題时我們又碰到同一条件(A):

定理 3. 在前面的假設之下,(6)式成恰当微分的必要而充分的条件是要(A)成立。

必要性是立即可以明白的:如果(6)式是某函数$F(x,y)$的(全)微分,而等式(7)成立,則

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x},$$

剩下只要引証 **147** 段关于混合导数的定理就行了(要用到連續性假設!)

現在来証明其充分性。我們已經知道,在条件(A)实現时积分(3)就与积分路綫无关(按定理 2),在这情形只要点 $A(x_0,y_0)$和$B(x_1,y_1)$給定,积分就惟一地决定了,因此它可以用

$$\int_A^B Pdx+Qdy \quad 或 \quad \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy$$

这样的記号来表示。这里只指出了积分路綫的起迄点;路綫本身沒有指出,但它是沒有关系的——不妨沿任何路綫来积分。

如果点 $A(x_0,y_0)$ 固定,而点B以区域(E)内一个任意的点$M(x,y)$来代替,則所得积分是区域(E)内点M的一个函数,即坐标 x,y 的函数:

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy. \tag{8}$$

我們要指明,这个函数也就是(2)式的原函数,为此我們来討論其对x及对y的偏导数問題。

在区域(E)内任取一点$B(x_1,y_1)$而給x_1一增量Δx使其变成点$C(x_1+\Delta x,y_1)$,在Δx充分小时这一点連同整个綫段BC都屬于(E)(图36)。相应函数值为

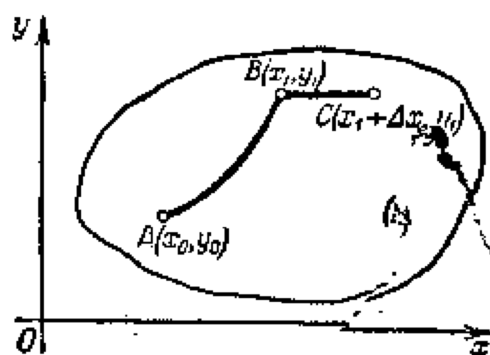


图 36.

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy,$$

$$F(x_1+\Delta x, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} Pdx + Qdy.$$

这些积分中第一个我們沿任一連結点 A 与 B 的曲綫 (K) 来取的，第二个的积分路綫则由同一曲綫和直綫段 BC 所組成。如此，函数 F 的增量是

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) =$$
$$= \int_{(BC)} Pdx + Qdy = \int_{(BC)} P(x, y)dx;$$

包含 Qdy 的一个积分化为 0，因为綫段 BC 是垂直于 y 軸的。

剩下一个积分可直接化为寻常定积分：为此在被积函数中須以 y_1 代 y（由直綫 BC 的方程 $y=y_1$）并且取点 B 和 C 的横坐标作为依 x 的积分限。最后有

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (R)\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)dx.$$

应用中值定理于所得这个寻常积分上并两边除以 Δx，得

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1+\theta\Delta x, y_1) \quad (0\leqslant\theta\leqslant1).$$

现在令 Δx 趋于 0。由函数 $P(x, y)$ 的連續性，等式的右边，因而还有其左边就都趋于 $P(x_1, y_1)$。所以，在点 (x_1, y_1) 上函数 F 依 x 的偏导数存在并可表以等式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

同样可建立公式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

既然点(x_1, y_1)是在区域(E)内任意取的，所以对此区域中所有点将成立关系(7)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

因为这些偏导函数是連續的，所以函数$F(x, y)$有微分[**142**段]：

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy,$$

这就是所求証的。

将定理1,2与3互相对照可以导出这样的

推論 在所作假設之下，要积分(3)与路綫无关(而沿閉界綫該积分等于0)，其必要而充分的条件是要被积式(6)是恰当微分。

在証明定理3时我們对与路綫无关的綫积分(8)建立了一个与尋常定积分依变上限微分的定理完全相似的結果[**183**段，**12°**]。

現在假設我們已經知道被积式(6)的一个原函数$\Phi(x, y)$，如此除对函数(8)成立的关系式(7)外还有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q;$$

于是差式

$$F(x, y) - \Phi(x, y) = C = \text{常数。}$$

(須知其对x及y的偏导数恒等于0!)令$x = x_0$, $y = y_0$我們得$C = -\Phi(x_0, y_0)$，如此

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

最后，如果在此取$x = x_1$, $y = y_1$，則得公式

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x, y)\Big|_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} \tag{9}$$

或写得簡单一点

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy=\Phi(B)-\Phi(A)=\Phi(M)\Big|_A^B. \tag{9a}$$

这个公式与以原函数表出寻常定积分的积分学基本公式完全相似[185 段]。但再强調一次，它只適用于与路綫无关的綫积分。

附注　以条件(A)表示恰当微分的特征用于欧拉和克萊罗(1740 年)。

微分式(6)的綫积分(沒有这个名称)也最先在克萊罗著作"地球形状的理論…"(1743 年)① 中看到。克萊罗将曲綫形状給成了 x 与 y 間的方程的形式，借助它由(6)消去 y 和 dy，然后将所得只含 x 和 dx 的式子积分。那里克萊罗也指出了积分与曲綫形状无关的条件：(6)式应該是完全微分，而这又要条件(A)实現。

351. 在物理問題上的应用　有了所講这些理論我們現在回到以前[335 段]所討論过的力学及物理方面的問題。

1) 力場之功。我們已經看到，在一个質量为 1 的質点由点 A 移动到点 B 时其力場之功可表为綫积分[参閱 335 段，(12)]：

$$\mathbf{A}=\int_{(AB)} Xdx+Ydy, \tag{10}$$

这里 $X=X(x,y)$ 及 $Y=Y(x,y)$ 为力場强度在坐标軸上的射影，而(AB)表示質点的軌綫。

很自然地要問，在什么条件下力場之功只与点的起迄位置有关而与軌綫形状无关。这个問題显然等价于綫积分 (10) 之值与积分路綫无关的問題。所以所求的条件就是等式

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{11}$$

当然在此要假設包含力場的区域是单連通的并且函数 X, Y 及其导函数到处都是連續的。

同一条件也可表成这样形式：一質点由一个位置移动至另一位置时，如要力場之功与軌綫形状无关，則其必要而充分的条件是要功元素

$$Xdx+Ydy$$

成某一函数 $U(x,y)$的(全)微分。这个函数通常称为力函数或位势函数；在这函数存在的情形則場本身称位势場。

---

① 有俄文譯本(苏联科学院出版社，1947)；参閱 43 頁。

一点由位置 $A(x_0, y_0)$ 移动至位置 $B(x_1, y_1)$ 时位势場之功就等于相应力函数增量:

$$U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = U(B) - U(A). \tag{12}$$

作为一个实例我們来看牛頓引力場。如果在坐标原点 O 放一个質量 μ, 而在点 A 放一質量 1, 則后一質量將受到吸引力 $\overrightarrow{F}$, 其方向朝着中心 O, 其大小等于

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是点 A 与原点之距离①。因为此力与坐标軸所成之角的余弦各为 $-\frac{x}{r}$ 及 $-\frac{y}{r}$, 所以力 $\overrightarrow{F}$ 在軸上的射影可表成:

$$X = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

显然, 牛頓場是位势場, 因为

$$-\frac{\mu x}{r^3}dx - \frac{\mu y}{r^3}dy \tag{13}$$

是函数

$$U = \frac{\mu}{r}$$

的微分, 而这函数在此就起位势函数的作用; 它叫做(場在点 O 的)牛頓位势。尽管在坐标原点上有一"奇点"——那里函数 X, Y 不連續, 而(13)式沿閉界綫的积分即便界綫包含原点时仍为 0。

在質点由位置 A 移动至位置 B 时場力做的功[参閱(12)]

$$A = \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{r_A},$$

这里 r_A 及 r_B 各为点 A 及 B 与中心的距离。

2) 不可压縮流体的平面稳定流动。如果以 u, v 表示速度矢量沿坐标軸的分量, 則如 335 段 2) 講过的, 单位时間內通过閉界綫 (K) 流向內部的流体量等于

$$Q = \int_{(K)} v dx - u dy$$

---

① 原点上电荷 μ 所引起的庫侖引力靜电場也是这样的(如果講的是場在带电質点上的作用的話)。

[参閱 335 段, (14)]。在沒有泉源和漏洞时这个积分恒等于 0。由此推知，速度矢量的分量 u, v 必須适合条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

于是被积式 $vdx-udy$ 有一原函数 $\psi(M)=\psi(x,y)$，它在流体力学中称为流函数。

如果取任一連結点 A 与 B 的曲綫 (AB)，則我們知道[335 段, (14)]，在单位时間內通过它流向一側的流体量可由积分

$$Q=\int\limits_{(AB)} vdx-udy$$

表出，曲綫 (AB) 上的方向应該这样选定使得指向所說一側的法綫，与切綫正向成 $+\frac{\pi}{2}$ 之角。現在我們看到，此量恰等于曲綫两端流函数值之差 $\psi(B)-$ $-\psi(A)$！

§5. 二重积分的变数替换

352. 平面区域的变换 設給了两个平面，一个带有一組直角坐标軸 x, y，另一个带有同样的坐标軸 ξ, η，我們設想在这两个平面上有两个有界閉区域：在 xy 平面上有一区域 (D) 而在 $\xi\eta$ 平面上有一区域 (Δ)。

每一区域的界綫或边界我們都假設是逐段光滑的簡单曲綫；区域 (D) 的界綫以 (S) 表示，(Δ) 的以 (Σ) 表示(图 37)。

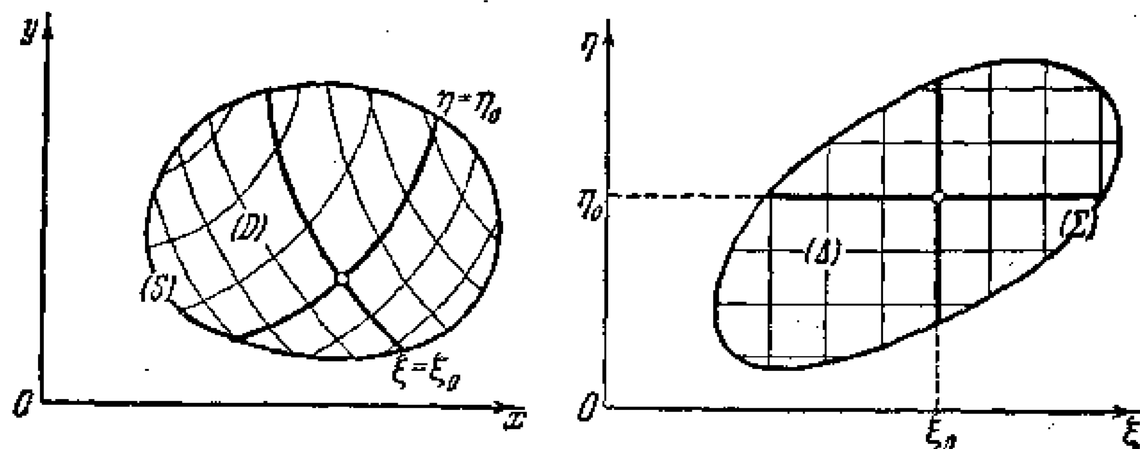


图 37.

設在区域(Δ)內給了一組連續函数

$$\left.\begin{array}{l} x=x(\xi,\eta), \\ y=y(\xi,\eta), \end{array}\right\} \tag{1}$$

它給区域(Δ)內每个点(ξ,η)配以一个(D)內的相应点(x,y)，幷且(D)內沒有一个点被漏掉，每一个这样的点都至少与(Δ)內某一点(ξ,η)相应。

如果(Δ)中不同的点(ξ,η)都相应于(D)中不同的点(x,y)(今后假設一律如此)，如此每点(x,y)只相应于一个点(ξ,η)，則方程(1)可对ξ,η单値地解出：变数ξ,η也是区域(D)內x,y的单値函数：

$$\left.\begin{array}{l} \xi=\xi(x,y), \\ \eta=\eta(x,y). \end{array}\right\} \tag{1a}$$

如此，在区域(D)与(Δ)之間建立了一种相互单値的或一对一的关系。也可以說公式(1)实現区域(Δ)至区域(D)的变換，而公式(1a)給出区域(D)至区域(Δ)这逆变換。

要注意此时界綫(Σ)上的点必定相应于界綫(D)上的点，反过来說也如此。

我們还假設函数(1)不但本身連續，幷且还在(Δ)內有一阶連續偏导函数。

于是函数行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{2}$$

也在区域(Δ)內是ξ,η的連續函数。我們認为这行列式永远不等于0，所以按連續性保持固定的正負号。这假設以后将起重要作用。

如果在区域(Δ)內取一逐段光滑曲綫(Λ)，則由变换(1)它变成区域(D)內一条同样的曲綫(L)。

事实上，設曲綫(Λ)的方程是

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t)$$
$$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta \quad 或 \quad \alpha\geqslant t\geqslant\beta), \tag{3}$$

幷且(如限于曲綫的一个光滑段)可以認为函数 $\xi(t)$，$\eta(t)$ 有不同时等于 0 的連續导函数。将这些函数代入变换 (1) 的公式里我們得相应曲綫(L)的参变方程:

$$\begin{aligned} x&=x(\xi(t),\eta(t))=x(t),\\ y&=y(\xi(t),\eta(t))=y(t). \end{aligned} \tag{4}$$

不难看出，这些函数也有連續导函数:

$$\begin{aligned} x'(t)&=\frac{\partial x}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial\eta}\eta'(t),\\ y'(t)&=\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t), \end{aligned} \tag{5}$$

它們也不能同时等于 0，如此在曲綫(L)上沒有奇点。

事实上，如其不然，則因行列式 $\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ 不等于 0 而由(5)将从而有同时 $\xi'=0$ 及 $\eta'=0$，这与所設矛盾。

如果点 (ξ,η) 在 $\xi\eta$ 平面上描出一閉界綫(Λ)，比方說沿着正的方向，則相应点 (x,y) 也在 xy 平面上描出一閉界綫(L)，但其方向可正可負。这問題下面将看出 [354 段，1°] 就取决于函数行列式的正負号。

区域(Δ)內每一对变数值 ξ 与 η 在 xy 平面上单值地决定区域(D)內的一点，反过来也是如此。因此 ξ,η 两数也可称为区域 (D) 內点的坐标。

区域 (D) 內那些有一个坐标保持固定的点所組成的曲綫叫做坐标綫。

例如，在(1)中令$\eta=\eta_0$我們得一条坐标綫的参变表出式如下：

$$x=x(\xi,\eta_0),$$
$$y=y(\xi,\eta_0)$$

(这里ξ是参变数)。在方程(1a)第二式中令$\eta=\eta_0$即得同一綫的隐式方程：

$$\eta(x,y)=\eta_0.$$

由于，坐标綫一般說来是曲綫，因此把决定xy平面上点的位置的数ξ,η叫做点的曲綫坐标。

給坐标η以不同的(可能的)常数值，我們就在xy平面上得出整族的坐标綫。固定坐标ξ的值，我們可得出另一族坐标綫。在所考虑区域間有单值对应关系时同一族的不同曲綫彼此都不相交，并自区域(D)內每个点有每族中的一条綫通过。

xy平面上整个坐标綫网就是$\xi\eta$平面上直綫网$\xi=$常数和$\eta=$常数的映像(图 37)。

例 1) 曲綫坐标中，最簡单而重要的例子是极坐标r,θ。它們有直观几何解釋，即矢徑及极角，但也可形式地以熟悉的关系

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta,\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\qquad(r\geqslant 0)$$

来引入。

如果沿两条垂直的軸截取r与θ的值，比方說，r算横坐标，θ算縱坐标(右手定向法)，则半平面$r\geqslant 0$的每一点按上述公式相应于xy平面上的一个点。

讀者或許已遇到过本例中的坐标綫：直綫$r=$常数相应于半徑为r中心在原点的圆，而直綫$\theta=$常数相应于通过原点与x軸成θ角的射綫(图 38)。

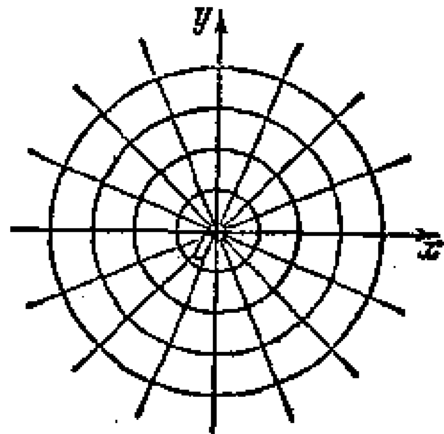


图 38.

但在本例中变换公式一般不能单值地解出：当角θ的大小改变$2k\pi$(k为整数)幷不影响x与y的值。要得出xy平面的所有点只要将θ的值限于

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

就够了。每个异于原点的点(x, y)都相应于一个$r>0$的值及上述范圍內的一个θ值。但关于坐标原点則仍未能避免破坏一一对应性：点$x=y=0$相应于$r\theta$平面上的整个θ軸(有时也可指其由$\theta=0$至$\theta=2\pi$的一段)。

我們来看$r\theta$平面上一个閉矩形$[0, R; 0, 2\pi]$或$o\alpha\beta\gamma$(图 39)；不难看出，它相应于xy平面上一个圍繞原点而半徑$R=OA$的閉圓。但这个圓的全界

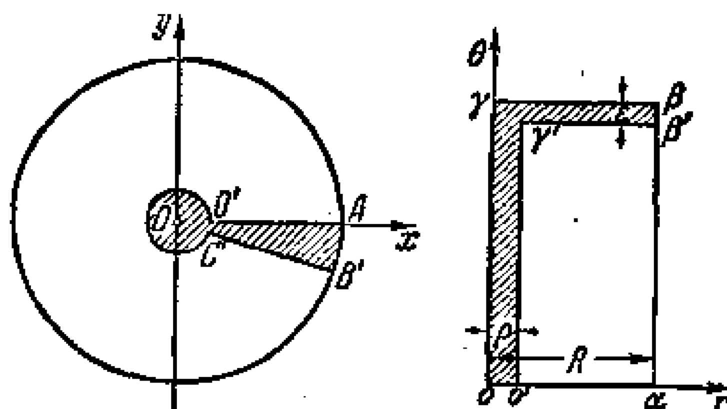


图 39.

綫只相应于所說矩形的一边$\alpha\beta$；边$o\alpha$和$\beta\gamma$二者則都相应于該圓同一半徑OA；最后，整个边$o\gamma$則仅仅相应于一点O。前段中所指出的条件在这里显然沒有成立。

但如果将边$o\gamma$推移一小量$\rho=oo'$，而边$\gamma\beta$推移一小量$\varepsilon=\beta\beta'$，則新的矩形$o'\alpha'\beta'\gamma'$将相应于xy平面上的图形$O'AB'C'$，后者由原来的圓去掉一半徑为ρ的小圓及中心角为ε的窄扇形而得，这一来所有条件都符合了。在$r\theta$平面上一点沿綫段$\alpha\beta'$，$\beta'\gamma'$，$\gamma'o'$，$o'\alpha$移动时，xy平面上的相应点将依次描出：不完全圓周AB'(半徑为R)，綫段$B'C'$，不完全圓周$C'O'$(半徑为ρ)及綫段$O'A$。順便指出，$r\theta$平面上正向环行就相应于xy平面上的正向环行。

在本例中函数行列式等于

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r;$$

它在除出原点时就保持为正号。

2) 有时預先給定坐标綫网，然后依据它建立曲綫坐标系要方便些。

例如我們来看两拋物綫族(图 40)：

$$y^2=2px \text{ 和 } x^2=2qy;$$

每族各自塡滿整个xy平面(除出坐标軸)。

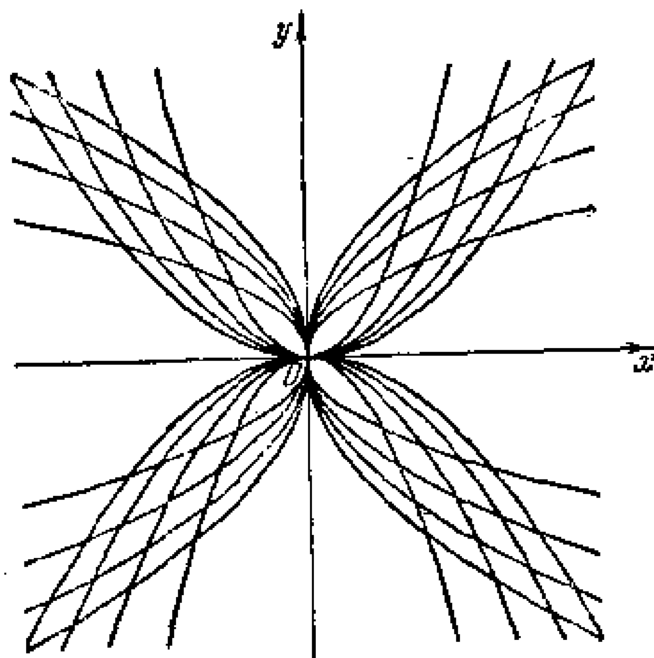


图 40.

自然可以采取 $\xi=2p$ 和 $\eta=2q$ 作曲綫坐标。由等式 $y^2=\xi x$ 和 $x^2=\eta y$ 我們有

$$x=\sqrt[3]{\xi\eta^2},\quad y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}\text{ 及 }\xi=\frac{y^2}{x},\quad \eta=\frac{x^2}{y}\quad (x,y\neq 0).$$

这里行列式等于

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}.$$

353. 以曲綫坐标表出面积 我們假設 xy 平面上給定了一个区域 (D)，它由一逐段光滑簡单界綫 (S) 所包圍。設公式(1)建立了这个区域与 $\xi\eta$ 平面上由类似界綫 (Σ) 所圍的区域 (Δ) 之間的一一对应关系。

我們保留 **352** 段中所有关于这区域变换的假設，并且还假設在区域 (Δ) 内諸函数 (1) 中任何一个都有連續的二阶混合导函数，比方說

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\text{ 及 }\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}\text{ 等}$$

(由于連續性它們有相等的值，**147** 段)[①]。

在这些假設之下我們現在的問題是要把 xy 平面上的一个区域的面积 D 表为展布在 $\xi\eta$ 平面上区域 Δ 內的二重积分。

我們由

$$D=\int\limits_{(S)} x\,dy, \tag{6}$$

这个以沿区域 (D) 的界綫 (S) 所取的綫积分表出面积 D 的公式出发[参閱 **347** 段，(4)]。

以后的变換步驟如下：先利用界綫的参变方程由綫积分(6)轉为寻常定积分。然后再将此定积分变为綫积分，但这回已經是沿区域 (Δ) 的界綫 (Σ) 取的。最后，用格林公式将所得綫积分換成区域 (Δ) 內的二重积分。

在实現这些步驟时我們需要界綫 (S) 的参变方程。旣然以后我們想要过渡到界綫 (Σ)，則現在不如就由这界綫的方程出发。設(3)式給出曲綫 (Σ) 的参变表示法；于是(4)式显然給出曲綫 (S) 的参变表示法[由我們的假設推知，**352** 段]，因为正是这条曲綫在 xy 平面上相应于界綫 (Σ)。t 的变化界限 α 与 β 我們选擇得使由 α 变到 β 时曲綫 (S) 以正的方向描出；这永远可以做到。

于是，按 **331** 段公式(5^*)，

$$D=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt$$

或者注意到公式(4)和(5)則有

$$D=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t),\eta(t))\left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t)\right]dt. \tag{7}$$

---

① 这些补充假設对最后結果的正确性而言是不重要的，加入它們只是为了証明起来容易一点。

将这个积分与沿界綫(Σ)正向所取的綫积分

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right) \tag{8}$$

对比。如果想要把这綫积分按寻常法則化为寻常定积分，則这里必須以曲綫(Σ)参变方程中的函数$\xi(t)$和$\eta(t)$来替代ξ和η，而回到积分(7)。

但是还要注意到一种情况。在t由α变至β时界綫(S)是以正的方向描出的，——我們就是这样选取这两个变化界限的。但界綫(Σ)在此可以循正向描出也可以循負向描出；如此，积分(7)和(8)事实上可以正負号不同，在任一情形下

$$D=\pm\int_{(\Sigma)} x\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+x\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta, \tag{9}$$

并且(再提醒一次)，如界綫(S)的正向环行相应于界綫(Σ)的正向环行，則取正号；否則取負号。

最后，只剩下要将所得綫积分化为二重积分。这要用到格林公式。

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi,\eta)d\xi+Q(\xi,\eta)d\eta=\iint_{(\Delta)}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta,$$

这里我們令

$$P(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \xi},\quad Q(\xi,\eta)=x\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

因为

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial x\partial y}{\partial \xi\partial \eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \xi},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial x\partial y}{\partial \eta\partial \xi}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta},$$

而y的二阶混合导数彼此相等，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)},$$

幷且我們得出公式

$$D=\pm\iint\limits_{(\Delta)}\frac{D(x, y)}{D(\xi, y)}d\xi\ d\eta.$$

我們在 352 段已看到，在所作假設之下行列式

$$J(\xi, \eta)=\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

在区域 (Δ) 內保持一定的正負号。故积分也有同一正負号。但积分前还有一双重号 $\pm$；旣然結果須得出一个眞正的正数 D，則显然这积分前面的正負号必須与行列式的正負号一致。如果将这正負号幷到积分号下的函数上，則在那里显然就得出行列式的絕对値，如此面积的最后表出式是

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|d\xi\ d\eta=\iint\limits_{(\Delta)}|J(\xi, \eta)|\,d\xi\ d\eta. \tag{10}$$

这就是我們所要建立的公式。

积分号下的式子

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|d\xi\ d\eta=|J(\xi, \eta)|\,d\xi\ d\eta$$

通常称为曲綫坐标系中的面积元素。例如我們曾看到在化为极坐标时函数行列式等于 r，所以极坐标面积元素是 $r dr d\theta$。

354. 补充說明 1°. 如果将公式 (9) 中如何选取正負号的法則与这一正負号必須与函数行列式正負号一致这一事实相比較，就可推出一有趣的推論：如果这行列式保持正号，則界綫 (S) 和 (Σ) 的环行正向依变換公式彼此相对应，如果这行列式有負号，則一个界綫的正向相应于另一界綫的負向。

显然，这对区域 (S) 和 (Σ) 中任何一对相应的简单閉界綫而言都是如此。所得結果不难用 352 段所举的例子来驗証。

2°. 将中值定理[**341** 段(9)]应用于公式(10)，可得出关系式

$$D=|J(\bar{\xi},\bar{\eta})|\cdot\Delta, \tag{11}$$

共中$(\bar{\xi},\bar{\eta})$是区域(Δ)内一点，而Δ是这区域的面积。

将这关系与拉格朗日公式比較:

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\bar{\xi})(\beta-\alpha) \quad (\alpha<\bar{\xi}<\beta).$$

如果$x=f(\xi)$是单調函数，則它在区間$\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$与$f(\alpha)\leqslant x\leqslant f(\beta)$[如果$f(x)$是降函数則为$f(\beta)\leqslant x\leqslant f(\alpha)$]之間建立一一对应关系。以$\delta$和$d$表示此二区間之长；于是拉格朗日公式化为等式

$$d=|f'(\bar{\xi})|\cdot\delta, \tag{12}$$

它与等式(11)相似。

如果在公式(12)中将区間$[\alpha,\beta]$"縮"成一点ξ，則結果得出关系式

$$|f'(\xi)|=\lim\frac{d}{\delta},$$

如此导数的絕对值可以說是ξ直綫(在所給的点上)变换成x直綫的延展系数。

同样由公式(11)将区域(Δ)"縮"成一点(ξ,η)而得

$$|J(\xi,\eta)|=\lim\frac{D}{\Delta}\text{①},$$

如此函数行列式的絕对值也就起了$\xi\eta$平面(在其所給一点上)变换为xy平面的延展系数的作用。

在此我們又一次看到导数与函数行列式間深刻的相似之处(参閱第十九章)。

3°. 公式(11)告訴我們，面积Δ无限变小时其相应面积D也无限变小。由此已經不难証明，在**352**段所討論的区域变换具有如下重要性質：它将区域(Δ)内一条面积为0的曲綫(Λ)变为区

① 这实际是将积分(10)在点(ξ,η)对区域微分[**342**段]。

域(D)内一面积也为0的曲綫(L)。

4°. 公式(10)是假設了区域(D)与(Δ)間有一一对应关系，函数(1)及其偏导数連續，并且行列式(2)正負号不变这些条件而导出的。但在实际上常会遇到这些假設在一些个别点上或个别曲綫上不成立的情形。

如果这些点和曲綫在两平面上都可用面积任意小的区域(d)和(δ)包起来，則将它們除出去以后这公式就成为可应用的了：

$$D-d=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)}|J(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta, \qquad (10a)$$

設函数行列式在区域(Δ)内保持有界：

$$|J(\xi,\eta)|\leqslant M;$$

于是积分(10a)与积分(10)只相差

$$\iint\limits_{(\delta)}|J(\xi,\eta)d\xi d\eta\leqslant M\delta.$$

取(10a)式在d及$\delta\to 0$时的极限，即又得公式(10)。

为了說明起見我們回到352段的例1)及图39的图形。

对于矩形$\Delta=[0,R;0,2\pi]$及半徑为R的圓(D)的情形（圓心在原点）公式(10)成为

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}r\,dr\,d\theta$$

的形状，要直接应用它是不行的。但如果除掉阴影綫所标的区域（其面积随ρ及ε而趋于0），則对剩下的区域这公式就可以应用；剩下只要取极限就行了。

355. 几何的推导法 公式(10)虽然簡单但是不直观的推理法导出的。現在我們来講这公式的另一种推导法。从几何方面看来这一推导法是非常显明的；它属于奥斯脫罗格拉德斯基[参閱下面359段]。

我們再来考虑公式(1)所給的由 $\xi\eta$ 平面至 xy 平面的变換。在 $\xi\eta$ 平面上划分出一个无穷小矩形 $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$，其边为 $d\xi$ 及 $d\eta$，平行于 ξ 軸及 η 軸（图 41a）。这矩形在 xy 平面上的映像是曲綫四边形 $P_1P_2P_3P_4$（图 41б）；我們来决定其面积。

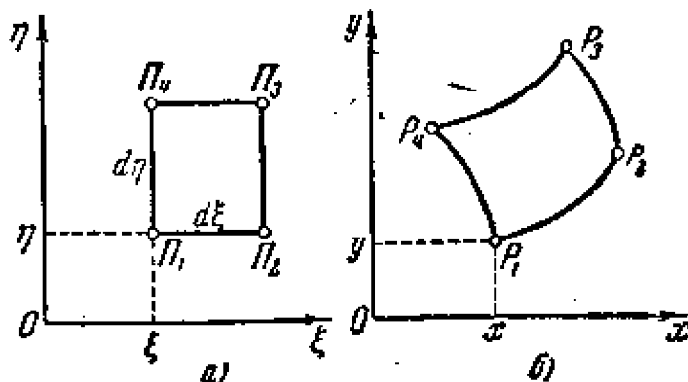


图 41.

$\xi\eta$ 平面上那个矩形的頂点坐标如下：

$\Pi_1(\xi,\eta)$； $\Pi_2(\xi+d\xi,\eta)$， $\Pi_3(\xi+d\xi,\eta+d\eta)$， $\Pi_4(\xi,\eta+d\eta)$；

在这情形相应曲綫四边形的頂点将有这样的坐标：

$$P_1(x(\xi,\eta),\ \ y(\xi,\eta)),$$
$$P_2(x(\xi+d\xi,\eta),\ \ y(\xi+d\xi,\eta)),$$
$$P_3(x(\xi+d\xi,\eta+d\eta),\ \ y(\xi+d\xi,\eta+d\eta)),$$
$$P_4(x(\xi,\eta+d\eta),\ \ y(\xi,\eta+d\eta)).$$

如果只限于对 $d\xi, d\eta$ 而言的一阶項，則諸点可近似取为

$$P_1(x,y),$$
$$P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\ \ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right),$$
$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ \ y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right),$$
$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ \ y+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right),$$

这里 $x=x(\xi,\eta)$， $y=y(\xi,\eta)$并且所有导数都是在点(ξ,η)上計算的，既然綫段 P_1P_2 和 P_3P_4 在两軸上有相等的射影，則两綫段本身相等而且平行，如此，若不計高阶无穷小則四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 可以說是一个平行四边形。

它的面积就等于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的二倍。由解析几何知道，頂点为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)的三角形的面积的二倍就等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & x_3-x_2 \\ y_2-y_1, & y_3-y_2 \end{vmatrix}$$

的絕对值。

应用这个公式于当前的情形，即得所求面积(还是不計高阶无穷小)等于行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}d\xi\, d\eta$$

的絕对值。所以

$$\text{面积 } P_1P_2P_3P_4 \doteq \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta.$$

将 $\xi\eta$ 平面上的图形(Δ)用平行于坐标軸的直綫分成許多无穷小矩形(忽略边緣不規則的小块)，而同时将 xy 平面上的相应图形(D)分成了上述那种曲綫四边形。将已經得到的相应于它們的面积表出式加起来，就重新得出公式(10)[①]。

如此，剛才講的奧斯脫罗格拉德斯基推导法指出一种重要的几何想法：公式(10)的实質是，決定图形(D)的面积时不是将此图形用平行于坐标軸的直綫网分为傳統的矩形面积元素而是用坐标曲綫网分成曲綫形的面积元素。

在某些簡单的情形“面积元素”的曲綫坐标表出式可以直接看出来，几乎不需要計算。

例如，在化为极坐标时可这样推想。$r\theta$ 平面上以 dr 及 $d\theta$ 为

① 这一推导法也不难做得完全严密。

边的小矩形在 xy 平面上就相应于一个这样的图形：它由半徑为 r 和 $r+dr$ 的两圓弧及由原点出发与 x 軸成 θ 和 $\theta+d\theta$ 角的两射綫所圍成(图 42)。将这图形近似地看作以 dr 和 $rd\theta$ 为边的矩形就立即得出所求面积元素表出式为 $rdr\,d\theta$。

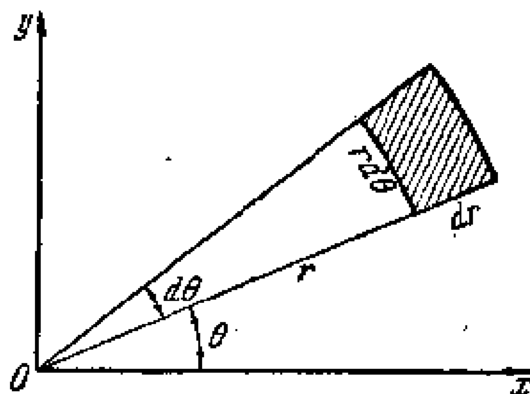


图 42.

356. 二重积分中的变数更換 我們来看二重积分

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy. \tag{13}$$

这里区域(D)由逐段光滑的簡单界綫(s)所圍，而函数 $f(x, y)$ 在这区域內是連續的。

現在假設区域(D)由公式(1)

$$x=x(\xi, \eta),\quad y=y(\xi, \eta)$$

与 $\xi\eta$ 平面上某区域(Δ)連系起来，滿足所有在**353** 段推导图形(D)在曲綫坐标式中的面积公式 (10)时的条件[①]。我們的目的是要更換积分(13)中的变数而将它表为展布在区域(Δ)上的积分的形式。

因此我們用一个逐段光滑曲綫网将区域(Δ)分成小区域(Δ_i) $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$；于是区域$(D)$就被(也是逐段光滑的)相应曲綫分成小区域$(D_i)$(图 43, a, $б$)。在每一小区域(D_i)中各任取一点(x_i, y_i)；最后，做成积分(13)的积分和：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i,$$

---

① 如此我們也假設二阶混合导数 $\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}$ 和 $\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$ 存在并且連續。参閱292頁底注。

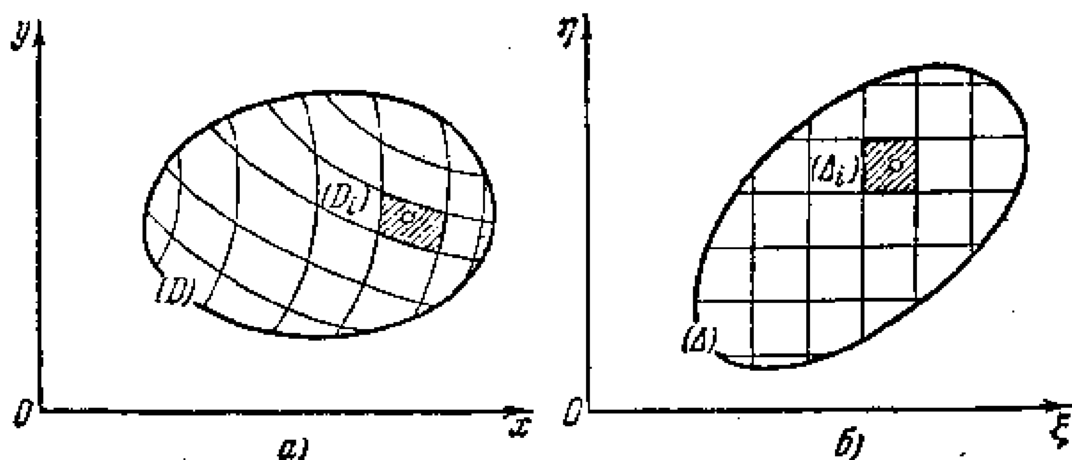


图 43.

它在区域(D_i)直径的連最大的趋于0时以該积分为其极限。

应用公式(11)[354段]于每个小区域(D_i)，我們有

$$D_i=|J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)|\cdot\Delta_i,$$

这里$(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$是区域$(\Delta_i)$內的一点。代入积分和$\sigma$中得

$$\sigma=\sum_i f(x_i, y_i)|J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)|\Delta_i.$$

点$(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$須依中値定理決定，我們不能任意选取，点$(x_i, y_i)$却是可以在区域$(D_i)$內完全任意地选取的。利用这一任意性我們就令

$$x_i=x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),\quad y_i=y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),$$

即在(D_i)內选取其与(Δ_i)內的点$(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$相应之点作为点$(x_i, y_i)$。于是积分和$\sigma$成这样：

$$\sigma=\sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),\ y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i))|J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)|\Delta_i;$$

在这形式之下它显然就是积分

$$\iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|d\xi\,d\eta \qquad (14)$$

的积分和。这个积分一定存在，因为被积函数是連續的。

如果現在让所有区域(Δ_i)的直徑都趋于0，則因函数(1)的連

續性，所有区域(D_i)的直徑也隨而趋于0。于是总和σ旣应趋于积分(13)又应趋于积分(14)，因为它同时是两个积分的积分和。如此，

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\,|J(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta. \qquad (15)$$

这个公式就解决了所提出的二重积分变数更換問題。公式(10)显然就是它的特例，在它里面取$f(x,y)\equiv 1$就可得到。

如此，在二重积分中作变数更換时，不但要将函数f中的x和y換成它們的表出式(1)，还要将面积元素$dxdy$換成曲綫坐标的表出式。

用类似354段4°的推論法不难在此証明，对变換(1)的条件在个别点上或綫上不滿足时的一系列情形公式(15)也仍保持正确。

357. 与單积分的相似。定向区域上的积分 二重积分变数更換公式与下列簡单定积分的变数更換公式非常相似：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi))x'(\xi)d\xi. \qquad (16)$$

但在公式(16)中沒有絕对值的記号，这多少減弱了相似性。这点差异很容易解釋。簡单定积分是依据有向区間来取的[180段]：a可以小于b，也可以大于b，同样α可以小于β也可以大于β。而二重积分則至今我們是只对无向区域来考慮的。

但是在二重积分的情形我們也可以来考慮有向区域。区域的定向只要給界綫以一定的环行方向（正或負）就行了[332段]；同时这也就是区域內所有簡单封閉曲綫的环行方向。如果选取的是正的环行方向，就說該区域有正定向，否则就說它有負定向。

如果一个区域(D)有正定向，則其面积自然可以約定取寻常的面积而带上正号，在相反的情形，則带負号。在区域(D)被分成小区域(D_i)时，如上面所說，这些小区域是依照全区域的定向法来定向的；其面积也給予相应的正負号。

現在对有定向区域(D)可以仿照 338 段的样式来建立二重积分

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

的概念;并且这个积分在区域有正定向时就与以前所下定义完全一致，在有負定向时則差一正負号。

在二重积分的这一新观点之下,首先我們就能将 353 段中曲綫坐标面积公式(10)写成函数行列式上不加絕对值号的形式:

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{(\Delta)}J(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

只要区域(D)和(Δ)是按上面所說方式定向的。这可直接由 354 段的說明 1° 推出。

在同样条件下 354 段公式(11)也可不用絕对值号写成:

$$D=J(\bar{\xi},\bar{\eta})\cdot\Delta,$$

按照这形式它就成了拉格朗日公式的自然推广。

最后,一般公式(15)現在也可写成

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta),\,y(\xi,\eta))\,J(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

这里区域(D)和(Δ)有相应的定向只要在統一的規定之下，单积分和二重积分就会完全相似了。

但是,以下我們仍恢复尋常的观点而考虑未定向区域上的二重积分。

358. 例 1) 我們来計算下列双紐綫(图 44)所圍图形的面积:

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),$$

由于有二項式x^2+y^2,使人想到化为极坐标。于是令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

而按公式

$$D=\iint\limits_{(\Delta)} r\,dr\,d\theta \tag{17}$$

来計算所求的面积。

因为該曲綫对称于坐标軸(这不难由曲綫的方程看出，因为以$-x$代x,$-y$代y时方程不变),所以只要决定該图形(D)在第一象限中的那部分面积然后四倍起来就行了。

双紐綫的极坐标方程是

$$r^2=2a^2\cos 2\theta,$$

并且(如限于第一象限)θ 应只由 0 变至$\frac{\pi}{4}$,因为$\cos 2\theta$ 应該是正的。

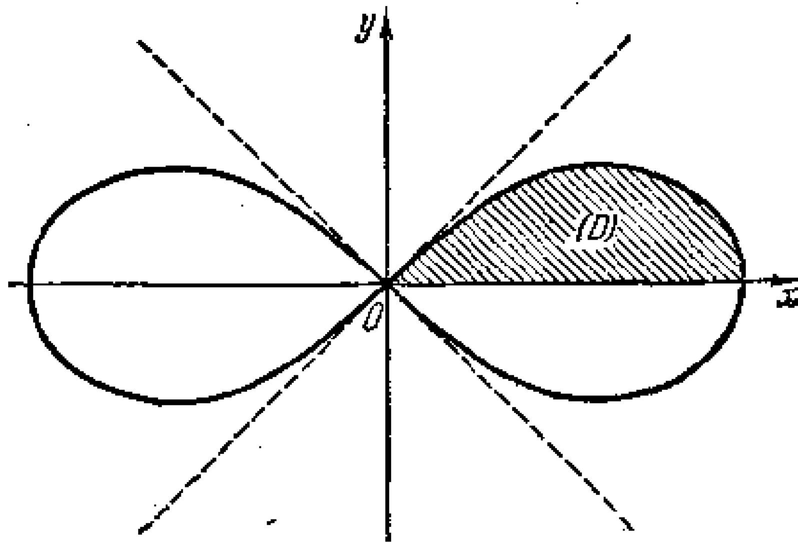


图 44.

因此,$r\theta$ 平面上相应于(D)的区域(Δ)由曲綫

$$r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(双紐綫的映象),r 軸的一段(相应于 x 軸上的一段)及 θ 軸由 $\theta=0$ 至$\theta=\frac{\pi}{4}$ 的一段(只是原点这一点的映象——对应性被破坏了①)所围。

我們有

$$D=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}r\,dr=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}.$$

如此所求全面积为 $2a^2$。

2) 現在我們說明另一种选擇曲綫坐标的方法,它在決定曲綫四边形面积时常常是有用的。如果組成这曲綫四边形对边的两对曲綫分別屬于各自充滿平面并含有一个参变数的两个曲綫族,則自然可取这两个曲綫族作为坐标綫网。其参变数通常就給出适宜于当前情形下的曲綫坐标系。

我們舉例来說明这种方法。設要找由拋物綫

$$y^2=px,\ y^2=qx,\ x^2=ay,\ x^2=by,$$

$(0<p<q,\ 0<a<b)$(图 45)所圍图形的面积。

---

① 关于这一点参閱 354 段說明4°。

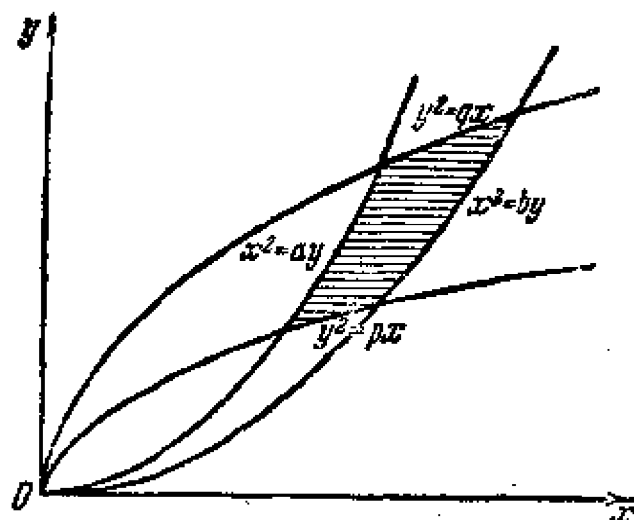


图 45.

这里比較方便的是考虑这两族拋物綫:

$$y^2=\xi x \quad (p\leqslant\xi\leqslant q),$$

及

$$x^2=\eta y \quad (a\leqslant\eta\leqslant b),$$

每一族都充满我們的圖形,由它們可做成一个坐标綫网,这就等价于:我們可取参变数 ξ 和 η 作曲綫坐标,所有这些我們已由 352 段 2) 知道;由上面各方程我們有:$x=\sqrt[3]{\xi\eta^2}$ 及 $y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}$,如此函數行列式

$$J=-\frac{1}{3}.$$

由此立即得出

$$D=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

3) 求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 被圓柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所切出来的那部分体积 V(所切成的立体有时称为"維維阿尼(Viviani)"体,以十七世紀意大利这位数学家得名,他最先对此感觉兴趣)。

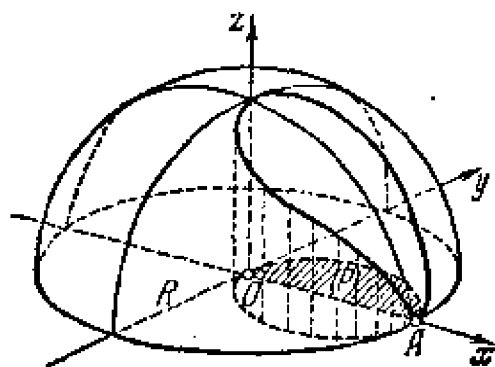


图 46.

我們[按 336 段公式(2)]有

$$V=4\iint\limits_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,$$

这里(P)是在 xy 平面第一象限里的半圓,由 $x=0$ 和 $x^2+y^2=Rx$ 两綫所圍成。

这个积分直接計算起来是麻煩的;但它化为极坐标就可大为簡化。

(P)界綫(即半圓周)的极坐标方程为 $r=R\cos\theta$, θ 由 0 变至 $\frac{\pi}{2}$。如此,

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

4) 在确定非正常二重积分的存在[344 段 4) 及附注]时,利用极坐标常常是方便的,例如我們来确定下列諸积分的存在($m>0$):

(a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$(奇点在原点);

(б) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m}$(奇綫是圍繞原点的单位圓);

(в) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}$(延伸到无穷的区域)。

在情形(a)我們有

$$\iint_{0<\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}=2\pi\int_\varepsilon^1\frac{dr}{r^{2m-1}},$$

它在 $\varepsilon\to 0$ 时趋于有限极限 $2\pi\int_0^1\frac{dr}{r^{2m-1}}$(但要 $2m-1<1$, 即要 $m<1$) 在情形(б)则当 $m<1$ 时

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant(1-\varepsilon)^2}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m}=2\pi\int_0^{1-\varepsilon}\frac{rdr}{(1-r^2)^m}\to 2\pi\int_0^1\frac{rdr}{(1-r^2)^m}(\text{在}\varepsilon\to 0\text{时}).$$

最后,对积分(B)則当 $2m-1>1$ 时也即 $m>1$ 时有

$$\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}=2\pi\int_1^R\frac{dr}{r^{2m-1}}\to 2\pi\int_1^\infty\frac{dr}{r^{2m-1}}\ (\text{在 } R\to\infty\text{时}).$$

359. 史話 二重积分最初是欧拉引进的,見于他在1769年提給彼得堡科学院的論文里,首先他考虑某种不定二重积分 $\iint Zdxdy$, 这样一个 x 和 y 的函数,它按某次序逐一对这些变数微分时即可得出 $Zdxdy$。如此,这个二重积分也就是累次积分

$$\int dx\int Zdy \text{ 或 } \int dy\int Zdx,$$

并且其一般表出式含有一个 x 的任意函数及一个 y 的任意函数,各作为一项。

然后，結合立体体积及表面积計算問題欧拉引入了二重定积分，将它同时解釋为其元素之和及某种型态的累次积分。如果先計算，比方說，$\int Zdy$（x 固定时），則它展布在一般依賴于 x 的积分限之間的一切 y 值上。結果得出一个 x 的一元函数（不像不定积分中那样，不是 x 和 y 的函数），它已經可以在常数限①間来积分。所有积分限都可由考慮其"底面"定出（欧拉称呼积分区域为"底面"：对于欧拉来說它事实上通常就是要求其体积或表面面积的那个立体的底面）。

在上述欧拉論文里也討論了二重积分号下变数变换問題。在此假設原变数 x, y 是新变数 t, u 的函数，而

$$dx=Rdt+Sdu,\quad dy=Tdt+Vdu, \tag{18}$$

如此 R, S, T, V 表示相应的偏导数。新变数的变化界限可由原先的"底面"来决定。将被积函数中的 x 和 y 以其 t 和 u 的表出式代入后，剩下的問題就只是，以什么来替换面积元素 $dxdy$？

欧拉馬上放弃了直接了当以表出式(18)代替 dx 和 dy 的想法。他还正确地指出，一般說来"沒有任何合理的根据能說在計算中用来替代 $dxdy$ 的式子是应該与它相等的"：重要的只是，积分的最后結果应該一致。同时为了使对新变数的积分也能看做累次积分，这式子应該含有 $dtdu$，即有 $Zdtdu$ 的形状。

为了找乘式 Z，欧拉逐一引入新变数，如此在每一步他只須在单积分中替换一个变数（在内层积分中）。結果他导出表出式：

$$Z=ST-RV,$$

讀者当不难認出这就是函数行列式。但在欧拉还发生这"疑难不解"的情况：x 与 y 对調时可以得出完全相似的式子

$$Z=RV-ST,$$

而正負号却相反！这是因为欧拉在此从未写出积分限并且未注意到其布列次序。这困难由这样的想法来解决：面积总应該是正的，也就是說 Z 应該取作正的。如此，替换 $dxdy$ 的应該是表出式

$$|ST-RV|\,dtdu. \tag{19}$$

这个式子欧拉是以純形式的运算得出的，从未将它与面积元素 $dxdy$ 看作相等，但也完全不說明其几何意义。

---

① 在这論文里欧拉还未在积分上設积分限。

欧拉后若干年，拉格朗日又搞起同样的变数变换問題，但已經是三重积分的情形。如果将他的想法搬到二重积分的情形，則可以說拉格朗日試图証明，面积元素仿佛就等于(19)式。

到1836年，奥斯脫罗格拉德斯基才在彼得堡科学院通报中标題为“多重积分变数变换”的論文里，把这个問題完全搞清楚。他首先以极坐标变数变换的簡单例子証明了拉格朗日的想法是不对的。然后他給了这問题的原始叙述，大致就像上面355段轉載的那样。(19)式有了清楚的几何解釋，即元素曲綫四边形①的面积，并且充分說明了必須考虑行列式絕对值的理由。

① 这完全不必等于元素矩形的面积。

第二十二章　曲面面积·面积分

§1. 双侧曲面

360. 曲面的参变表示法　我們回到空間中曲面的分析表示法問題[参閱 213 段]，而来細講一种讀者还不熟悉的而又很重要的分析表示法，所謂参变表示法。

在 212 段已經談到过空間內曲綫的参变表示法[参閱該处(15)式]:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\tag{1}$$

如此曲綫上点的位置就由一个在某区間內变化的参变数 t 之值所决定。在显式方程，比方說

$$z=f(x,y),\tag{2}$$

所給出的曲面上决定点的位置我們已經牵涉到两个参变数，即横坐标 x 及縱坐标 y。在一般情形，参变数是两个任意的变数 u 和 v，而曲面的参变表示法就成三个方程

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v)^{①},\tag{3}$$

这里函数 φ,ψ,χ 都在“参变数 uv 平面”的上某区域(Δ)中有定义并且連續。

重要的是这一种情形：曲面的每个点只能由一对参变值得出，如此方程(3)在曲面的点与平面区域(Δ)的点之間建立了一种一一对应关系；这样的曲面叫做簡单曲面。在此我們假設区域(Δ)和曲面都由簡单閉界綫所圍；它們必須按公式(3)彼此对应。

---

① 用两个参变数給出曲面的办法創始于欧拉，而高斯則特別广泛而有效地在微分几何中加以利用。

参变数 u 和 v 称为相应点的曲綫坐标。如果在方程 (3) 中固定其一个曲綫坐标之値，比方說，令 $u=u_0$，則显然得到一条曲綫的方程：

$$x=\varphi(u_0, v),\quad y=\psi(u_0, v),\quad z=\chi(u_0, v),$$

这一曲綫的所有点都落在該曲面上。让 u_0 之値变化，則得一整族这种"(u)曲綫"。同样，固定一値 $v=v_0$，也就得到該曲面上一条曲綫

$$x=\varphi(u, v_0),\quad y=\psi(u, v_0),\quad z=\chi(u, v_0);$$

这种"(v)曲綫"也組成一曲綫族。所有这类曲綫都叫做曲面的坐标綫。如果是簡单曲面，則通过其任何一点都恰有每族的一条坐标綫。

所有这些，讀者都已熟悉，但只限于曲面是平面的情形[参閱 **352** 段]。

現在我們假設函数 (3) 不但連續同时还在区域(Δ)中有一阶的連續导函数，并且来考虑函数矩陣

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}. \tag{4}$$

設对于决定曲面上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的参变数値(u_0, v_0)，在矩陣(4)中至少有一个二阶行列式异于 0，比方說設

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是，将方程(3)前两式写成

$$\varphi(u, v)-x=0,\quad \psi(u, v)-y=0$$

的形式，就可根据 **317** 段定理 3 断言这組带四个变数 u, v, x, y 的方程(如果限于 u_0, v_0, x_0, y_0 邻近的値)将变数 u，v 决定为 x，y 的单値函数：$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$，它們連同其导数都是連續的。最后，将这两个 u, v 的表出式代入方程(3)中第三式，則曲面环繞点

M_0的部分就表成(2)型的显式方程

$$z=\mathcal{X}(u(x,y),v(x,y))=f(x,y),$$

而f也是連續函数并且有連續的导函数。

只有在矩陣(4)的三个行列式全等于0时(在这情形曲面上相应点 M_0 称为奇点)这种表示法可能做不到。

我們在簡单曲面(3)上任取一个非奇点 $M(x,y,z)$。于是，如剛才已看到的，在其某一邻域內該曲面可用某种显式方程来表出，所以[**213** 段]在点M上有切面。这切面的方程可写成

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0^{①} \tag{5}$$

的形式，这里系数 A, B, C 尙待决定。

如果在曲面方程中将 v 固定为与所选取的点M相应之值，则得出通过此点的“(v)曲綫”的方程。此曲綫在点M的切綫可由方程

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}$$

表出[**212** 段(16)]。同样，固定u，则得另一通过点M的坐标綫(“(u)曲綫”)而在該点有切綫

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

因为这两条切綫都应該落在平面(5)上，故成立这样的条件：

$$Ax'_u+By'_u+Cz'_u=0,$$

$$Ax'_v+By'_v+Cz'_v=0.$$

在这样的情形系数A, B, C应与矩陣

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}^{②} \tag{4a}$$

① 慣例用 X, Y, Z 表示流动坐标，以表示与曲面上定点的坐标 x, y, z 有区别。

② 这个矩陣与矩陣(4)只在表示法上不同。要記得，在所考虑的点上其行列式不全是0。

的諸二阶行列式成比例。通常不妨設它們就等于这些行列式，如此，今后不妨总認为

$$A=\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}. \tag{6}$$

我們还指出，法綫的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

至今我們只限于考慮簡单曲面。在一般情形我們将考慮以曲綫为界的曲面以及由有限多块彼此衔接而不交叉的簡单曲面所組成的閉曲面。如果这种"一般形式"的曲面也能表成参变方程(3)，則显然其它的点与平面区域(Δ)的点之間难免有失去一一对应关系的时候。

例 1）我們来看一个半徑为R中心在原点的球面（图 47）：$x^2+y^2+z^2=R^2$。要得出它的寻常参变表示法我們作一"赤道"截綫AKA'，而通过两"极"P，P'和所考慮的点M作一"經綫"$PMKP'$。点M在球面上的位置可由角$\varphi=\measuredangle POM$及$\theta=\measuredangle AOK$决定。然后，$ON=R\sin\varphi$，而坐标$x$和$y$（对点$M$及点$N$都同是它們）可由$ON$表出：$x=ON\cos\theta$，$y=ON\sin\theta$，最后得出球的参变方程如下：

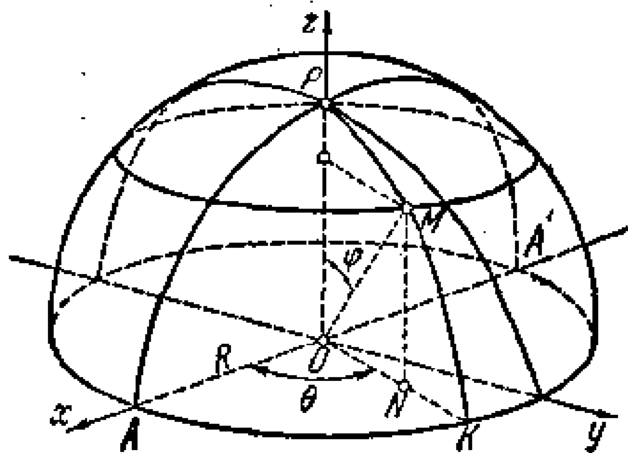


图 47.

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$

这里角φ只要由 0 变到π，而角θ由 0 变到2π。

但球面上的点与$\varphi\theta$平面上矩形$[0,\pi;\ 0,\ 2\pi]$的点之間的对应关系不是一对一的：不但$\theta=0$及$\theta=2\pi$两值給出曲面上同一点，在$\varphi=0$（或π）而θ取任何値时也只得出一点，卽极点P（或P'）。

不难看出，球面上一族坐标綫是經綫(θ＝常数)，另一族是緯綫(平行圓 φ＝常数)。

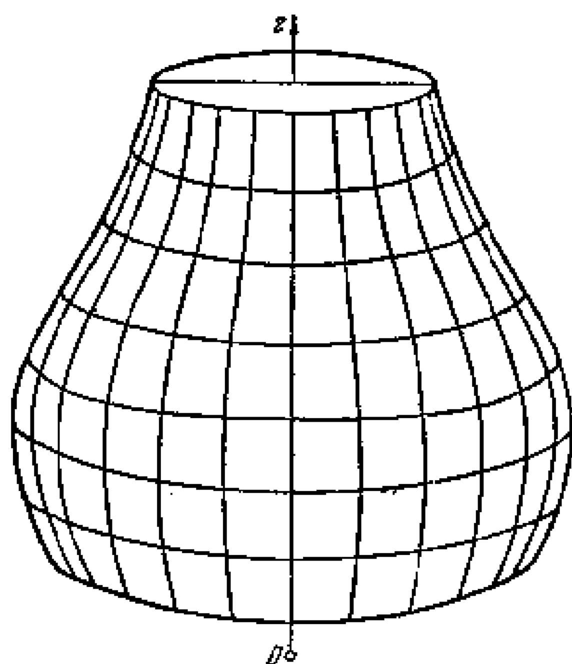


图 48.

2) 上例可推广如下，設在 xz 平面內由参变方程

$$x=\varphi(u),\quad z=\psi(u)$$
$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$$

給出了一条曲綫("母綫")，将它作为剛体繞 z 軸迴轉(图 48)。如果以 v 表示迴轉角，則所得迴轉面的方程可写成：

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,$$
$$z=\psi(u).$$
$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

如果在 xz 平面中取半圓

$$x=R\sin u,\quad z=R\cos u$$
$$(0\leqslant u\leqslant\pi)$$

而繞 z 軸迴轉之，則可得出这样形成的球面的参变表出法，其形式仍和前面一样(只是記号上有差别)。

这里坐标綫也就是母綫的种种位置(經綫)和平行的圓。

361. 曲面之側 我們来建立曲面之側这一个以后很重要的概念。

在許多情形这个概念直观上是明显的。如果曲面由 $z=f(x,y)$ 这样的显式方程給出，則可以說所謂曲面的上側或下側[①]。如果曲面包着一个立体，則也不难設想其有两側之别——一側向內，指向該立体，一側向外，指向环繞該立体的空間。

由这直观概念出发，我們現在試图来給曲面之側的概念下一个明确的定义。

我們考虑一个曲面(S)，不論其封閉与否，而假設其每点上都

① 这类說法我們常常用到(在此默认 z 軸本身是鉛直向上的)。

有一个一定的切面，其位置随切点而連續变化。

在曲面上取定一点M，通过它作一法綫，給以一定的方向——两个可能方向(彼此間的区别表現在方向余弦的正負号)之一，在曲面上作一閉曲綫，由M_0出发并回到M_0，并假設它不越过曲面的边界(如果有边界的話)，令点M沿这閉路綫环行，并且在其各个位置都給法綫一个方向，这方向就是由在M_0处所选方向連續轉变过来的。此时可发生下列两种情形之一：經环行一周而回到点M_0时，法綫方向仍与出发时相同，或者与出发时相反。

如果对某一点M_0及某一通过M_0的閉路綫M_0AM_0发生的是后一种情形，則对任一别的点M_1也不难作一閉路綫，它由M_1出发而回到M_1时在此点上法綫的方向也与出发时相反。例如，$M_1M_0AM_0M_1$就是这样的閉路綫，只要我們将M_1M_0理解为曲面上連結M_1与M_0两点而不越过边界的曲綫，M_0M_1理解为同一曲綫但方向相反。在这样的情形曲面就叫做单側的。所謂麦比烏斯带就是这种曲面的一个經典的例子(图49)。它的模型可以这样做法：取一矩形紙条$ABCD$，扭轉一次再将两端粘在一起，使A与C合，B与D合。如果要給这条扭成的带圈連續地刷上一种顏色，則不必經过边緣即可刷遍全带，但这种曲面今后不在我們考慮之列。

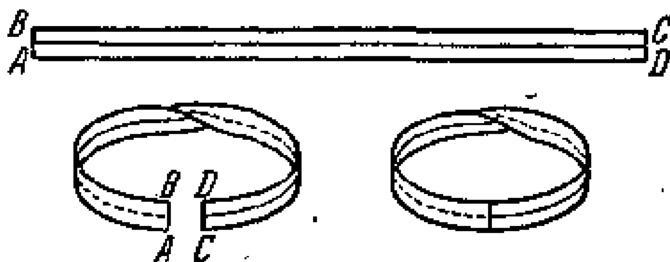


图 49.

現在假設无論点M_0怎样取法，以及通过点M_0而不越过边界的閉路綫怎样取法，沿此路綫环行一周而回到起点M_0时，法綫方向总与当初所定的相同。在这样条件下該曲面就称为双側的。

設S是一个双側曲面，在S上任取一点M_1并給这点上的法綫一个确定的方向。任取曲面上另一点M_1，而以曲面上任一不越过

其边界的路綫(K)将M_0与M_1連結起来,并且令点M沿这路綫由M_0走到M_1。如果此时法綫的方向連續地变化,則点M到达M_1的位置时当带有一定的法綫方向,而与路綫(K)的选擇法无关。事实上,如果点M沿两条不同路綫(K_1)和(K_2)由点M_0走到点M_1时我們在点M_1竟得出不同的法綫方向,則閉路綫$M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$①将使到达点M_0时法綫方向与当初相反,这与两側曲面定义冲突。

如此,在双側曲面上只要对一个点选定了法綫的方向,則其在一切点上的法綫方向也就依之惟一地决定。曲面上点的全体,連同在各点处按上述法則給与其法綫的方向,合起来叫做曲面的一側。

例 1) 双側曲面最簡单最重要的例子是由显式方程$z=z(x,y)$所表出的曲面,这里假設函数z在某区域(D)中連續并且有連續偏导函数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad 和 \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在这情形曲面的法綫方向余弦可表成[213段,(24)]:

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{8}$$

在根号前选定了正負号,我們就在曲面的所有点上都确定了一定的法綫方向。因为按假設方向余弦是点的坐标的連續函数,則所确定的法綫方向也就随点的位置而連續变化。由此可見,$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$公式中根式前正負号的选擇就在上面所說的意义下决定了曲面的一側。

如果在根式前取正号,則在曲面所有点上

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的,即相应于所选定一側的法綫与z軸成銳角。如此,由这正負号所选定的曲面一側是上側。反之,在法綫方向余弦表出式中选負号就确定曲面的

① (K_2^{-1})就指曲綫(K_2),但是以相反方向描出的——由M_1至M_0。

下側：法綫与 z 軸成鈍角。

2) 現在来考慮一种更一般的任意簡单曲面 (S)，它由参变方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{3a}$$

給出，这里参变数在 uv 平面上某一有界区域 (Δ) 內变化。我們假設这曲面是光滑的：这就是說函数 (3a) 連同其偏导数都在 (Δ) 內連續并且在曲面上沒有奇点。

对于曲面法綫的方向余弦我們有了公式(7)。而在这情形根式前正負号的选擇也决定曲面之側，如此該曲綫是双側的。

事实上，正負号一經选定，公式(7)就給曲面的每个点(因与它相应的只有一对 u, v 之值！)配上一个一定的法綫方向，它随着点的移动而連續变化。

如果不假設曲面是簡单的，則不能无条件地肯定它是双側的。在这情形可以找到曲面上一点 M_0，它相应于两对不同的参变数值 u_0v_0 和 u_1v_1，对于这些值即使公式(7)的根式前正負号选取得一样，它也仍可能在点 M_0 决定出相反的法綫方向。如果情形的确如此，則該曲面就是单側的。

附注 如果曲面 (S) 是封閉的并且包圍着一个立体，則[360 段]虽然它也能用方程(3a)表出，但这时曲面上的点与平面区域 (Δ) 的点之間一一对应的假設已不完全实現。可是既然曲面显然有內外两側，在这情形公式 (7) 中正負号的选擇仍然决定曲面之側。

362. 曲面的定向法及其側的选定 設 (S) 是由簡单界綫 (L) 所圍成的一个簡单光滑曲面我們选定这曲面的一側。現在照下面的法則給界綫 (L) 規定一个环行方向作为正的：設想一个观察者沿該界綫循所給环行方向进行并且相应于所选定曲面一側的法綫是由他的脚指向他的头时，这个环行方向由他看来应該是逆时針方向的，"逆时針"一語，說得明确一点就是，他近处那部分曲面在他看来应該是落在他的左边。同一法則同时也給曲面上每一包圍曲面一部分① 的閉曲綫建立了正的环行方向。与此相反的环行方向就叫做負的。

所有这些合起来这就是曲面定向概念的內容。

---

① 在确定界綫正向时只須考慮这个部分。

如果由曲面另一側出发，則法綫应变为相反的方向，观察者的位置也要改变，因此按我們的法則界綫(L)及曲面上其他閉曲綫环行方向的正負也要对調。总之，曲面改变其定向法。如此，只要总保持着所建立的这个法則，則选定了曲面之側也就确定了其定向法，反之，曲面界綫的环行正向的选定也就惟一地确定曲面之一側。

附注　这个法則依据的是逆时針迴轉，并且为了避免混乱我們将經常由它出发。

这个迴轉方向也可与空間坐标軸的布列法本身联系起来，即在所有这迴轉方向有意义的問題中我們将采用所謂右手坐标系(图 50*a*)，其坐标軸是如此布列的：設想靠 z 軸正的部分站着一个人，那么在他看来由 x 軸到 z 軸的迴轉(轉过$+\frac{\pi}{2}$角）是逆鈡方向的[1]。(对于图 50*б* 所表坐标系，則此迴轉是順鈡方向的[1]，这种坐标系称为左手坐标系)。

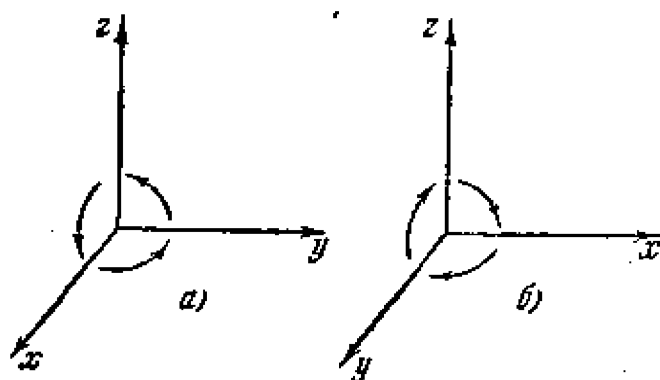


图 50.

現在将前面所講关于曲面定側与曲面定向間关系的思想应用于曲面法綫方向余弦公式(7)中正負号的选擇問題。

回到本段开头所考慮曲面(S)，認为它上面已定了側并从而也定了向。該曲面的界綫(L)相应于“参变数 uv 的平面”上区域(Δ)的界綫(Λ)。我們假設(这总是不难做到的)与界綫(Λ)的正向相应的是界綫(L)的正向。于是对区域(Δ)中任何閉路綫(λ)与曲面(S)上相应閉路綫(l)而言也是如此：(λ)的正向环行相应于(l)

---

[1] 将字母 xyz 輪換时也如此。

的正向环行。①

在这些条件之下，为了表明选定的那一側法綫方向余弦公式(7)中根式前須取正号。

要証明这話只要証明在一个点上由这些带正号的公式所决定的方向与所需要的法綫方向一致就行了。我們在曲面上取任一內点 M_0; 与它相应的有区域(Δ)內一点 $m_0(u_0, v_0)$。設在此点有行列式，比方說

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不等于0。于是可在 uv 平面上找到点 m_0 的一个由閉路綫(λ)所圍的小邻域，使在曲面(S)上和它相应的由閉路綫(l)所圍的点 M_0 的邻域能由一个显式方程 $z=f(x, y)$[**360**段]表出，因此它可一一对应地投影到 xy 平面上。我們以(k)表示 xy 平面上这一投影的界綫(图51)。

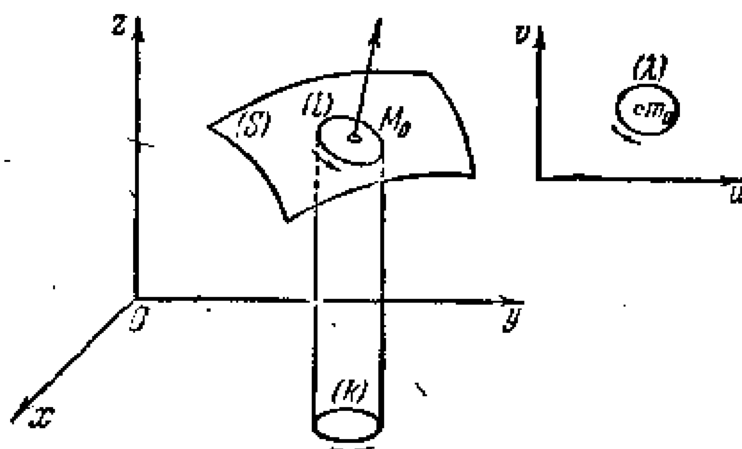


图 51.

如果在所考虑的点上及其邻域內行列式 $C>0$，則閉路綫(λ)的正向环行相应于閉路綫(k)的正向环行(即在所选定坐标軸布列法之下的逆鉀方向环行)[参閱**354**段1)]。由图可看出，要曲面上

① 因为閉路綫的环行方向可按其任一部分的描出方向来判定，故上述結論对于与(Λ)有共同部分的閉路綫(λ)而言显然是对的，于是也不难扩充到一般情形上去。

相应于閉路綫(l)的方向也是逆鈡方向的，則須由上面朝它看，因此在这情形点 M_0 处的法綫应該是向上的，即应与 z 軸成銳角。公式(7)中如果取正号就有这样的情形，因为 $C>0$ 时 $\cos\nu>0$。反之，$C<0$ 时法綫应与 z 軸成鈍角，这在上述正負号选取法之下事实上也成立，因为 $C<0$ 时 $\cos\nu<0$。

363. 逐段光滑曲面的情形 **362** 段所闡述的想法还給出将曲面定側概念推广于逐段簡单光滑曲面的一般情形时的一种便利的工具。这种曲面为簡单起見我們将称之为逐段光滑曲面，**361**段所講的想法在这情形不能直接应用，因为沿那些銜接各段光滑曲面的"棱"一般沒有确定的切面，并且通过这些棱时法綫方向談不到連續变化。

設給了一个曲面(S)，由簡单光滑片段(S_1)，(S_2)……所組成，彼此沿棱(即边界的公共部分)銜接在一起。首先假設这些片段每片分开来都成双側曲面。但这当然不足使整个曲面(S)合起来成双側曲面。像麦比烏斯带就是可以由两片簡单光滑双側曲面組合起来的。

在每片(S_i)($i=1, 2, \cdots\cdots$)的边界(K_i)上的两个方向中各取其一作为正向；如此，我們知道，曲面(S_i)就定了側。这选擇法如能做得使两个邻接的边界在其公共部分[①]上总有相反的环行方向(图 52)，則只有这时候曲面(S)是双側的才行。曲面(S)之側即以其由上述方式所选定各片段之側合起来为其定义。

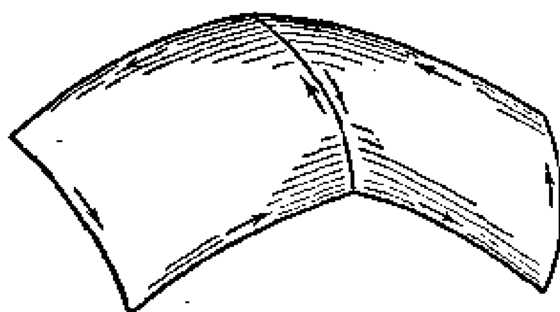


图 52.

① 这公共边界仍可由若干段組成。

如果在一个片段上边界的环行改换了方向，則为了遵守我們的条件必須在所有各片段的边界上也都这样做。于是各片曲面(S_i)所选定之側都要代之以相反之側；这些相反之側总起来就組成曲面的第二側。

362 段关于曲面定側与定向关系的想法对有边界的一般曲面仍保持有效。

§2. 曲面面积

364. 希瓦尔兹的例 曲面面积概念与曲綫长概念有相似之处。我們已定义(开)弧之长为內接折綫周长在其所有各边之长趋于 0 时的极限。在曲面的情形(比方說也是开的)自然会考虑其中內接多面形并定义曲面面积为該多面形面积在各面直徑趋于 0 时的极限。

但在上一世紀之末已經发現这个定义是不能用的。在 1883 年希瓦尔兹指出了上述极限甚至对簡单的直圓柱面情形已不存在。我們来看看这个有教益的例子。

設給了一个这样的圓柱面，其半徑为 R，其高为 H。在其中作內接多面形如下。将柱高分为 m 等分，通过每一分点作垂直于柱軸的平面，如此在其面上得 $m+1$ 个圓周(其中也包括圓柱的上下两底的圓周)，将这些圓周每个又分为 n 等分，使上一圓周的分点恰与下一圓周的弧的中点相对。

其次作出所有各段圓弧之弦，并将每弦两端与上下两圓周上与其中点相对的分点用綫段連結起来(图 53)，如此得許多三角形。这些三角形总数为 $2mn$ 个并且是相等的，它們合起来就形成一个我們所需要的多面形 $(\Sigma_{m,n})$；其模型如图 54。

現在来計算每个三角形的面积 σ。取弦作三角形之底，其长等于

$$2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

求三角形之高 AB 时(参閱图 53)我們注意 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$，而

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

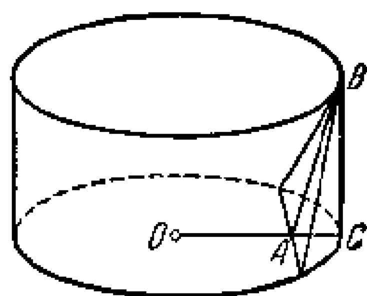


图 53.

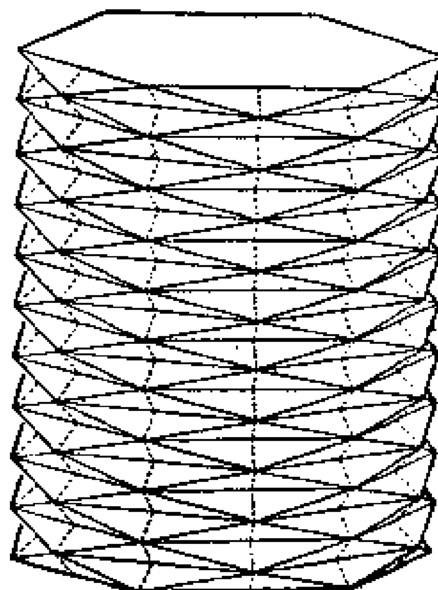


图 54.

如此，一个三角形的面积等于

$$\sigma = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

而全多面形的面积为

$$\Sigma_{m,n} = 2mn\sigma = 2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

当 m 和 n 无限增大时，所有三角形的直徑都趋于 0，但面积 $\Sigma_{m,n}$ 沒有极限。事实上，我們假設 m 和 n 这样增大，使比率 $\frac{m}{n^2}$ 趋于一个定极限 q:

$$\lim\frac{m}{n^2}=q.$$

我們有

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n}=\pi,$$

而另一方面由所作假設則有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}=\lim\frac{\pi^2}{2}\frac{m}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}q,$$

所以

$$\lim\sum_{m,n}=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+H^2},$$

而我們可看出这个极限实質上依賴 q 的 大 小， 即依賴 m 与 n 同时增大的方

式。在 $q=0$ 时，并且也只有在这情形，該极限等于 $2\pi RH$(这就是初等几何中所导出的該面积之值)，但它甚至可以与 q 同时变成无穷大。如此，在 m 与 n 独立增至无穷大时面积 $\sum_{m,n}$ 事实上沒有确定的极限，而圆柱面按照上述定义的观点成为沒有面积的。

要紧的是要了解，內接于曲綫的折綫与內接于曲面的多面形之間情形有怎样的区别。为簡单起見我們姑且把所談的曲綫和曲面都算作是光滑的，于是只要組成折綫的弦充分地小，則每一弦的方向与相应弧上任一点的切綫方向要相差多小就多小。所以这种无穷小弦可以越来越精确地当作相应弧长的元素。反之，曲面的內接多边形，虽然面积要多小就多小，但它在空間的位置上却可以完全不与曲面的切面接近。在这情形用它来替代曲面的元素显然是不行的。这种情况可以用剛才所举的例子很好地說明：柱面的切面全是垂直的，而內接于柱面的三角形則在 q 很大时几乎成为水平的，如此形成了一些微細的皺褶。

365. 显式方程所給曲面的面积 由于前一段所指出的情形，我們須另求建立曲面面积概念的途徑。現在指出这种途徑之一，它虽然簡单，但也带有一些人为的色彩，而我們就由显式方程

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

所給的曲面(S)这一情形开始。設 x, y 在 xy 平面上正方区域(D)內变化，并且 z 在这区域內有連續偏导数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \text{ 及 } q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

我們用(零面积)曲綫网将区域(D)分为元素

$$(D_1), (D_2), \cdots, (D_n)$$

并且来考虑其中一个元素(D_i)。如果在这小分域的边界上作为准綫建立一个柱面，其母綫平行于 z 軸，則它在曲面(S)上切出一个元素(S_i)。在(D_i)取任意一点 $P_i(x_i, y_i)$，而在曲面(S)上相应点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$处[此处 $z_i=f(x_i, y_i)$]作一个切面。上面所說的柱面也在切面上切一个元素图形(T_i)(图 55)，它的面积 T_i 看来可作面

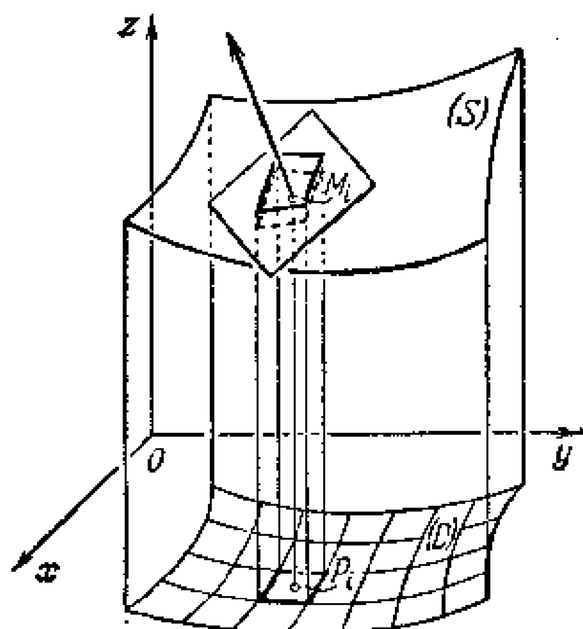


图 55.

积元素(S_i)的近似值。

如此，所有这种面积之和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

可以看作曲面(S)的面积的近似值。我們将这曲面的面积S定义为当所有元素(S_i)的直徑趋于0时也即所有平面元素(D_i)趋于0时，上列式子的极限：

$$S=\lim\sigma=\lim\sum_{i=1}^{n}T_i.$$

現在不难証明，S可表为二重积分

$$S=\iint_{(D)}\frac{1}{|\cos\nu|}dxdy, \tag{2}$$

这里ν也如慣例表示曲面法綫与z軸間的角[①]。

事实上，如果ν_i就是相应于点M_i的ν值，则平面图形(T_i)和(D_i)(这里第二个是第一个的垂直投影)的面积之間有这样的关系：

$$D_i=T_i\cdot|\cos\nu_i|,$$

由此有

$$T_i=\frac{1}{|\cos\nu_i|}\cdot D_i.$$

总和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}T_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\cos\nu_i|}\cdot D_i$$

---

① 讀者注意到由显式方程(1)所給曲面的面积表出式(2)与328款由显式方程$y=f(x)$給出的曲綫的弧长表出式(7)之間完全相似。

是二重积分(2)的积分和，因此在上述极限过程之下趋于該积分为其极限，这就是所求証的。

如果回忆 **361** 段中公式(8)，則由其中第三个关系式所得結果可以写成：

$$S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy;\qquad(2a)$$

积分(2)或(2a)的存在可由偏导数 p 和 q 的連續性假設推出。

附注 这个面积 S 的簡单定义的主要缺点有二：第一，它只适用于显式方程表出的曲面，第二，它看起来与坐标系的选擇法有关。我們在下一段再来討論这个問題。

366. 一般情形的曲面面积 現在我們来考慮一个由参变方程所給出的曲面 (S)。

設 M 是它上面的一点，并且在这点上，比方說，$C\neq0$，于是，依据 **360** 段中所講的，可以下这样的結論：*存在曲面* (S) *的一个部分* (s)，*它圍繞点* M，*并具有下列性質*：

1°. 曲面 (s) 可以用(1)那样的显式方程表出；

2°. 如果以 (δ) 表示 uv 平面上的区域 (Δ) 的相应部分，則在 (δ) 內行列式 $C\neq0$。

这对曲面的每个点 M 都是对的，只是在該点异于 0 的也可以是行列式 A 或 B，此时(1)那样的显式方程就相应地換成另一形状的显式方程

$$x=h(y,z)\ \text{或}\ y=g(z,x).$$

由此推知(我們在此不証明了)，整个曲面 (S) 可分解为有限多个像 (s) 那样的片段。我們依据前面的定义来細講片段 (s) 的面积的計算。

如果 (d) 是 (s) 在 xy 平面上的投影，則我們知道[参閱(2)]它的面积

$$s=\iint\limits_{(d)}\frac{dxdy}{|\cos\nu|}. \tag{3}$$

因为区域(d)的点与区域(δ)的点有一一对应的关系，并且还满足**352** 段和 **356** 段中另外一些条件，故在积分(3)中可以按 **356** 段公式(15)变换为变数 u, v。现在函数行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=C,$$

而

$$|\cos\nu|=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

［参閱 **360** 段，(7)］，故結果得出

$$s=\iint\limits_{(\delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \tag{4}$$

值得注意的是，这个式子是对 A, B, C 对称的，其中完全沒有反映出我們假設了行列式C在(δ)內异于0以及曲面(s)系由(1)形显式方程所表出这些情况：在不同的可能假設下得出同样結果！

現在將全曲面(S)的面积S定义为其各部分(s)的面积s的总和。把所有(4)形等式加起来，得最后的公式

$$S=\iint\limits_{(\Delta)}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv, \tag{5}$$

显然，这与曲面(S)的划分法无关。

附注　我們来証明，面积(5)之值事实上与曲面(S)的参变表出式的选擇法无关。

設由变域为(Δ)的参变数 u, v 轉換为变域$(\bar{\Delta})$的参变数 $\bar{u}, \bar{v}$，变换公式

$$u=U(\bar{u},\bar{v}),\quad v=V(\bar{u},\bar{v}),$$

在这二区域間建立了一一对应的关系（函数U和V連同其导数都假設是連續的），于是該曲面表为新的方程

$$x=\bar{x}(\bar{u},\bar{v}),\ \ y=\bar{y}(\bar{u},\bar{v}),\ \ z=\bar{z}(\bar{u},\bar{v});$$

設在这表示法之下它也沒有奇点。令

$$J=\frac{D(u,v)}{D(\bar{u},\bar{v})},$$

我們有①

$$\bar{A}=AJ,\ \ \bar{B}=BJ,\ \ \bar{C}=CJ$$

[325 段]。由此順便可看出，J 在($\bar{\Delta}$)中异于 0，因为否則該曲面在新表出法之下就有奇点了。現在按变数更换公式立即得出

$$S=\iint_{(\bar{\Delta})}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,|J|\,d\bar{u}d\bar{v}=\iint_{(\bar{\Delta})}\sqrt{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2}\,d\bar{u}d\bar{v},$$

这就是所求証的。

要給公式(5)另一形式(这也正是通常所采用的)我們將矩陣

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

平方起来并做成行列式

$$\begin{vmatrix} x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u & x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v \\ x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v & x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v \end{vmatrix};$$

按一个熟悉的代数定理[参閱 326 段]它就等于 $A^2+B^2+C^2$。通常令

$$x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u=E,\ \ x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v=F,$$
$$x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v=G$$

——这就是所謂高斯曲面系数，在微分几何中占有重要地位，在这样表示法之下有

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

如此公式(5)可以写成这样：

$$S=\iint_{(\Delta)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{5a}$$

---

① 記号的意义是显然的。

这里表出式

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{6}$$

叫做曲綫坐标之下的面积元素。

附注 借助公式(5a)，用矢量分析中的初等想法，不难証明面积 S 的表出式与坐标系选擇法无关，因为 E, F, G 各式在坐标变换之下不变其值。

至今我們只限于簡单光滑曲面的情形。如果曲面不屬这种情形，但可分为有限多个簡单而光滑的片段，則我們称各片段面积之总和为全曲面的面积。在此不难証明，这样所定义的面积事实上与曲面分解为所需类型的片段的分法无关。設整个所給的曲面由参变方程所表出，但在个别点上或綫上一一对应的关系可能不成立，則在这一般情形其面积仍可由公式(5)或(5a)表出[参閱354段，4°]。

有面积的曲面称为可求积的。

367. 例 1) 試求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所切下的那部分[即"維維阿尼体"的上下底，参閱 358 段，3)；图 46]的面积。

解 对上底我們有

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

并因此有

$$S=2R\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

这里积分区域是圓周 $x^2+y^2=Rx$ 所圍的圓。

化为极坐标，得[参閱 358，3)]

$$S=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

做出积分，最后求得

$$S=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因为半球的面积等于 $2\pi R^2$，故除出"維維阿尼体"后所剩下那部分面积等于 $4R^2$，如此它可用半徑 R 表出而完全不含无理数，維維阿尼还把这个吸引他注意的情形和同时代人对他提出的一个問題联系起来。我們注意，上述那部分半球的体积可表为不含无理数的式子：它就等于 $\frac{8}{9}R^3$[358 段，3)]。

附注　对上面所做的計算，事实上还需要一点說明，因为在点 $(R,0,0)$ 上导函数 p 和 q 不連續，因此积分号下的式子也不連續；参閱 2)。

2) 試利用球面的参变表出法

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

来解問題 1)，

依据导数矩陣

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

不难找出球的高斯系数：

$$E=R^2,\quad F=0,\quad G=R^2\sin^2\varphi,$$

如此 $\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$。

我們不妨只考虑所要研究的曲面在第一卦限中的那四分之一。对于"維維阿尼"曲綫上的点，即球与圓柱交綫(在第一卦限中的部分)上的点，我們有 $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$。

事实上，将 x 和 y 表为 φ 和 θ 的式子代入圓柱方程 $x^2+y^2=Rx$，得 $\sin\varphi=\cos\theta$，并且因对所考虑的点显然有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故由此得出 $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$。

根据上述确定了参变数 φ 和 θ 的变化范圍后我們由公式(5a)得

$$S=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\sin\varphi\,d\varphi=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

这次我們避开了被积函数的不連續性而得出了同样結果。

3) 試求下列迴轉曲面的面积：

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)$$

$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

[360 段, 2)]。按偏导数矩陣

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v, & \varphi'(u)\sin v, & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\sin v, & \varphi(u)\cos v, & 0 \end{pmatrix}$$

做出这个式子:

$$\sqrt{EG-F^2}=\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2},$$

如此所求曲面面积就由下列公式表出:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}\,du.$$

[試与 205 段公式(6a)比較]

§3. 第一型面积分

368. 第一型面积分定义 第一型面积分就是二重积分的自然推广,正如第一型綫积分与簡单定积分的关系一样。

这种推广是这样建立的:設在某一由逐段光滑界綫所圍的双侧光滑曲面(S)(或逐片光滑曲面)的点上定义了一个函数$f(M)=f(x,y,z)$。我們用一个任意的逐段光滑曲綫网将曲面(S)分为$(S_1),(S_2),\cdots,(S_n)$各部分。在每一部分$(S_i)(i=1,2,\cdots,n)$内各任意取一点$M_i(x_i,y_i,z_i)$,而在这点上算出函数值

$$f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$$

并且乘以相应曲面部分的面积S_i而做成所有这种乘积之和:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)S_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)S_i,$$

它与以前考慮过的許多和一样称为积分和。

这个和在所有部分(S_i)的直徑趋于0时的有限极限就叫做函数$f(M)=f(x,y,z)$沿曲面(S)的(第一型)[①]面积分而表成

① 以区别于下面所要考慮的第二型面积分。

$$\iint\limits_{(S)} f(M)dS = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS, \tag{1}$$

这里 dS 象征元素面积 S_i。

369. 化为寻常二重积分 我們限于簡单而光滑的曲面(S)的情形。

对于任何在曲面(S)的点上連續的函数$f(x, y, z)$积分(1)恒存在并且成立等式

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS =$$
$$= (R)\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{2}$$

如此，要将第一型面积分化为寻常二重积分，只要将諸坐标x, y, z换成其参变表出式，而面积元素dS换成其曲綫坐标式就行了。

我們来証明上面这句話。

以前曾說过，曲面(S)用逐段光滑曲綫来分割时，区域(Δ)也就有类似的分割法与之相应，反过来也是如此。同样，如果(S)的各部分的直徑趋于0，則(Δ)的各部分的直徑也趋于0，反过来也是如此。

我們相应地将曲面(S)分为$(S_1), (S_2), \cdots, (S_n)$各部分，将区域$(\Delta)$分为$(\Delta_1), (\Delta_2), \cdots, (\Delta_n)$各部分，并且在每一部分$(S_i)$中各取一点$(x_i, y_i, z_i)$，在每一部分$(\Delta_i)$中各取一点$(u_i, v_i)$，它們也彼此相应而有

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \tag{3}$$

現在我們做出积分(1)的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i.$$

按 366 段一般公式(5a)有

$$S_i=\iint\limits_{(\Delta_i)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

应用中值定理，得

$$S_i=[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}\cdot\Delta_i,$$

这里$(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$是区域(Δ_i)中的一点。

由此利用(S_i)的表出式及(3)我們可將σ写成

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\,[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}\cdot\Delta_i.$$

采取这个形状时，它就像(2)式中第二积分的这积分和了：

$$\sigma^*=\sum f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\cdot\Delta_i.$$

σ 与 σ^* 的区别无非是，在 σ^* 內复合函数 $f(\cdots)$及根式$\sqrt{\cdots}$每次都是对同一个任意取来的点(u_i, v_i)計算的，而在σ內則函数取在点(u_i, v_i)上，$\sqrt{\cdots}$取在点$(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$(后者要取决于中值定理，不是任意的)上。

我們来看两个和之差：

$$\sigma-\sigma^*=\sum_i f(\cdots)\{[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}-[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\}\Delta_i.$$

設 $\varepsilon>0$ 是一个任意小的数。由函数$\sqrt{EG-F^2}$的(均匀)連續性在区域(Δ_i)的直徑充分小时有

$$|[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}-[\sqrt{EG-F^2}\,]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}|<\varepsilon.$$

旣然連續函数 f 有界：

$$|f(x, y, z)|\leqslant L,$$

則不难得出估值式

$$|\sigma-\sigma^*|<\varepsilon L\Delta,$$

所以

$$\lim(\sigma-\sigma^*)=0.$$

由此可見，这两个和中只要第二个和的极限存在就可推出另一和的极限也存在并和它相等。这就証明了我們的話。

如果曲面(S)由显式方程

$$z=z(x,y)$$

所給出，則公式(2)成为:

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)dS=(R)\iint_{(D)}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,\tag{4}$$

这里(D)表示曲面(S)在xy平面上的投影。

因为

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{|\cos\nu|}$$

(ν如慣例表示曲面法綫与z軸之角)，故公式(4)可写成

$$\iint_{(S)}f(x,y,z)dS=(R)\iint_{(D)}f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\nu|}.\tag{5}$$

我們至今一直假設积分所展布的曲面(S)是簡单而光滑的。我們的結果不难搬到由有限多这种片段所組成的曲面的一般情形。

370. 第一型面积分在力学上的应用 1°. 用这种积分可以計算每点上有一定密度分布的物质曲面的質量，矩，重心坐标以及其他的量。

事实上，与以前所講平面質量分布的情形比較起来，这里并沒有什么新鮮之处。

2°. 单层引力。第一型面积分可以很自然地用来研究分布在曲面上的質量的引力。

設沿曲面(S)連續分布着質量，在曲面的每点$M(x,y,z)$处都有給定的密度$\rho(M)=\rho(x,y,z)$[①]。更設在曲面外点$A(\xi,\eta,\zeta)$处有一单位質量。現在要来决定点A被曲面(S)吸引的力$\vec{F}$的大小和方向。这里所根据的是牛頓引

① 在这情形下我們用"单层"这个术語以与現在不考虑的"双层"情形区别开来。

力定律(万有引力定律)。

如果点A被单个质点$M(x, y, z)$所吸引，集中于該点的質量为m，則引力的大小將等于

$$F=\frac{m}{r^2}\text{①},$$

这里r是距离$\overline{AM}$，即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}. \tag{6}$$

因为这个力的方向是由A指向M的，所以其方向余弦为

$$\frac{x-\xi}{r},\quad \frac{y-\eta}{r},\quad \frac{z-\zeta}{r},$$

因此引力$\vec{F}$在各坐标軸上的投影可表为

$$F_x=m\frac{x-\xi}{r^3},\quad F_y=m\frac{y-\eta}{r^3},\quad F_z=m\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{7}$$

如果吸引的质点不止一个而成一質点系，則这些式子就要换成这类式子之和；最后，在质量沿曲面連續分布的情形則那些和变成了积分。

用尋常的講法：考虑曲面元素dS，它帶有质量ρdS，設想这一质量集中于dS的一个点$M(x, y, z)$上。它对点A的引力在各軸上的投影將是[参閱(7)]

$$dF_x=\rho\frac{x-\xi}{r^3}dS,\quad dF_y=\rho\frac{y-\eta}{r^3}dS,\quad dF_z=\rho\frac{z-\zeta}{r^3}dS,$$

这里r表示距离$\overline{AM}$，可由公式(6)表出。現在只要积分起来就可得出单层引力$\vec{F}$在各軸上的投影的公式如下：

$$F_x=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{x-\xi}{r^3}dS,\quad F_y=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{y-\eta}{r^3}dS,\quad F_z=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{z-\zeta}{r^3}dS. \tag{8}$$

如此力$\vec{F}$的大小方向都完全确定了。

如果被吸引的点A本身落在曲面(S)上，則引力在各軸上的投影仍然可由积分(8)表出，但这回那些积分不是正常积分，因为在点A邻近被积函数都不是有界的了。

3°. 单层位勢　在只有一个吸引点$M(x, y, z)$的情形下我們已經知道引力在各坐标軸上的投影如具有表出式(7)。不难看出，这三个投影是函数

$$W(\xi, \eta, \zeta)=\frac{m}{r}$$

①为写起来簡单一点，我們如慣例令"引力常数"（即牛頓公式中取决于单位选擇法的比例乘数)等于1。

对 ξ, η, ζ 的偏导数，这个函数叫做点 M 的場对点 A 的牛頓位势［参閱 351 段，1)］。

如果質点系造成一个場，則位势可表为这种分式之和，而位势对 ξ, η, ζ 的导数仍給出引力在各軸上的投影。

由此我們自然得出以密度 ρ 沿曲面(S)分布的单层对点 A 的位势的表出式

$$W(\xi, \eta, \zeta)=\iint_{(S)} \rho \frac{dS}{r}. \tag{9}$$

只剩下这样的問題：对这位势来說下列基本性質

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}=F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta}=F_z \tag{10}$$

是否仍保持不变。这里 F_x, F_y, F_z 是单层引力 $\vec{F}$ 在各軸上的投影而可由公式(8)来决定。

如果点 A 不落在曲面上，如此連續性完全保持，則不难証明对积分(9)在依 ξ, η, ζ 进行微分时适用萊卜尼茲法則(对此只要重复我們熟悉的論証)。如此，对所考慮的質量分布情形关系式(10)也得到証实。

例 1) 試求一均匀球层($\rho=$常数)对一个点的引力。

解 設球的中心在坐标原点，而被吸引点 A (質量为 1) 位于正 z 軸上离中心 a 处。引力在 x 軸及 y 軸上的投影 F_x 与 F_y 显然都等于 0。其次，我們有

$$F_z=\iint_{(S)} \rho \frac{z-a}{r^3} dS$$

(r是点 A 与球面任意点M間的距离)。如变换为球面坐标

$$x=R\sin\varphi\cos\theta, \quad y=R\sin\varphi\sin\theta, \quad z=R\cos\varphi,$$

則有

$$dS=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta, \quad r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}$$

而

$$F_z=2\pi R^2\rho\int_0^\pi \frac{(R\cos\varphi-a)\sin\varphi d\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}.$$

用替换 $R^2+a^2-2Ra\cos\varphi=t^2$ 可將此式变为

$$F_z=\frac{\pi R}{a^2}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt=-\frac{\pi R}{a^2}\rho\left(2R-\frac{R^2-a^2}{|R-a|}-|R-a|\right).$$

現在我們来討論两种情形。

(1) 設 $a<R$; 在这情形 $|R-a|=R-a$, 而括号中之値为 0, 于是

$$F_z=0,$$

所以, 落在均匀球层内部的点受不到球层引力的影响。

(2) 如果 $a>R$, 則 $|R-a|=-(R-a)$, 如此

$$F_z=-\frac{4\pi R^2\rho}{a^2}.$$

所以, 落在均匀球层外部的点所受球层的引力就如同球层全部質量 $m=4\pi R^2\rho=S\rho$ 都集中于球心的情形一样。

2) 求均匀球层对任意一点的位势。

解 仍用前面的記号, 我們有

$$W(a)=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{dS}{r}=2\pi R^2\rho\int\limits_0^\pi\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{2\pi R}{a}\rho\int\limits_{|R-a|}^{R+a}dt=\frac{2\pi R}{a}\rho(R+a-|R-a|).$$

如果 $a<R$, 則

$$W(a)=4\pi R\rho,$$

如此在均匀球层内部其位势为常数。

反之, $a>R$ 时

$$W(a)=\frac{4\pi R^2\rho}{a},$$

即均匀球层在外部空間的位势就如同其全部質量都集中于球心的情形一样。

附注 在 $a=R$ 时两个問題都牽涉到非正常面积分, 因此时被积函数变成无穷大。

§4. 第二型面积分

371. 第二型面积分定义 这种新积分可仿照第二型綫积分的方式来构成。

那里我們是由有向(定向)曲綫出发的, 并且把它分为一些元素, 然后把每一具有相应方向的元素投影到坐标軸上。所得投影

也是有方向的，而我們看它的方向与坐标軸一致与否来决定取其长时給以正号或負号。

仿此我們現在来考虑一个光滑的或逐片光滑的双側曲面 (S) 并取定其两側中的任何一側；我們已經知道[362 段]，这就等价于在曲面上选取一个确定的定向。

为确定起見我們先假設曲面是由显式方程

$$z=z(x, y)$$

所給出，而点 (x, y) 在 xy 平面上一个由逐段光滑界綫所圍的区域 (D) 內变化。于是我們可以在曲面的上側与下側之間选擇其一[1]。在第一种情形，曲面上的曲綫要标以从上面看来逆时針的方向，在第二种情形則标以与此相反的方向。

如果将曲面分成許多元素而将每一相应地定向的元素射影到 xy 平面上，則該元素的界綫的环行方向就决定了射影的界綫的环行方向。这个方向在固定的是曲面 (S) 的上側时将与逆时針迴轉一致，即相应于 xy 平面本身的定向；在这情形射影的面积我們将取正号。在下側的情形則迴轉方向相反，而射影面积取負号[参閱 357 段]。

現在設在所給曲面 (S) 的点上定义了一个函数 $f(M)=$ $=f(x, y, z)$。用逐段光滑曲綫网将曲面分成許多元素

$$(S_1), (S_2), \cdots, (S_n),$$

而在每一元素 (S_i) 內各取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$。然后算出函数值 $f(M_i)=f(x_i, y_i, z_i)$ 并乘以元素 (S_i) 在 xy 平面上的射影的面积 D_i 的正負号按上述法則給出。最后做出其总和(也是一种积分和)

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i. \tag{1}$$

---

[1] 参閱 312 頁底注。

此和在所有小区域(S_i)的直徑趋于0时的有限极限就叫做

$$f(M)\,dxdy=f(x,y,z)\,dxdy$$

的展布在曲面(S)所选定一側上的(第二型)面积分并用記号

$$I=\iint_{(S)} f(M)\,dxdy=\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy \tag{2}$$

来表出(这里$dxdy$象征曲面元素在xy平面上的射影的面积)。

但由这記号看不出所指的究竟是曲面的哪一側，因此每次均須特别指出。由定义本身可知，曲面由所考虑的一側换成相反的一側时，积分要跟着变号。

如果曲面不是上述那种特别形式，則我們总預先假設它由有限多个逐段光滑界綫所圍成这样的片段所組成，后者或者具有这种形式，或者是母綫平行于z軸的柱面的一部分(其在xy平面上的准綫有零面积)。在元素落在第一型片段上的情形我們已經知道怎样給其射影面积加上正負号；如果曲面的元素有些在上面而有些在下面时則可随元素而取不同的正負号(图56)。至于落在所説柱面上的元素，則其射影集中于一条綫而有零面积，故談不到所謂正負号[①]。在其他方面对这一般情形的面积分定义可和上面一样地来建立。

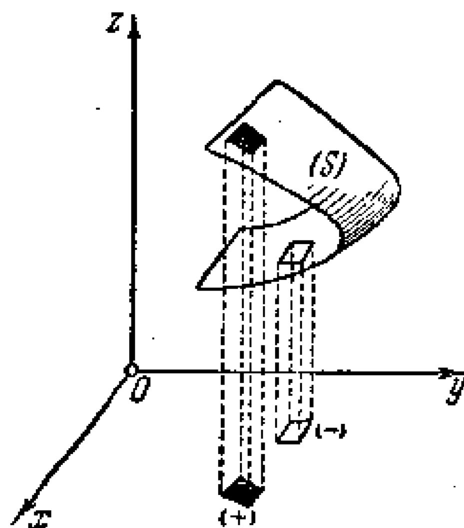


图 56.

改变坐标軸的地位(相应地也要改变对曲面的条件)則替代xy平面也可把曲面的元素射影到yz或zx平面上。如此可得出其他两个第二型面积分

①我們迴避了属于曲面不同片段的"不規則"元素(可以直接了当忽略掉)。

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dydz \text{ 或 } \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dzdx. \qquad (2^*)$$

在应用中常会遇到将所有这几个形式的积分合并在一起:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

这里 P, Q, R 是 (x, y, z) 的函数, 定义在曲面 (S) 的点上。再提醒一次, 在所有的情形曲面 (S) 总假設是双側的, 而积分是展布在其某一側上的。

372. 化为寻常二重积分 我們假設函数 f 在曲面 (S) 各点上都是連續的。

1°. 首先来考虑曲面 (S) 由显式方程

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \text{ 属于 } (D))$$

給出的这一基本情形, 这里函数 z 連同其偏导数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

都是連續的。

如果积分(2)沿曲面上側来取, 則在积分和(1)中所有 D_i 都是正的。在这和中将 z_i 换成其值 $z(x_i, y_i)$ 而将它化为:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))D_i,$$

这不难認出就是寻常二重积分

$$(R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy$$

的积分和。

取极限我們就确定了积分(2)的存在同时建立了等式

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = (R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy. \qquad (3)$$

如果积分展布在曲面 (S) 的下側，則显然有

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy = -(R)\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy. \qquad (3a)$$

現在不难(对所考虑情形)来建立两型面积分間的关系。首先就曲面上側来說(对第二型积分)。如果在 369 段公式 (5) 中把 ν 看作銳角，而将函数 $f(x,y,z)$ 換成以 $f(x,y,z)\cos\nu$，則有

$$(R)\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z)\cos\nu dS.$$

由此按(3)得出所求公式：

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z)\cos\nu dS. \qquad (4)$$

将曲面上側換作下側，則等式(4)左边要因此改变正負号。如果这回将 ν 理解为向下的法綫与 z 軸所成的鈍角，則余弦連同积分也变号，如此該等式仍保持成立。

2°. 如果(S)是母綫平行于 z 軸的柱面的一部分，則其元素全都有零射影，如此在这情形

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy = 0. \qquad (5)$$

显然在此公式(4)仍成立：因为 $\cos\nu = 0$，故此公式右边也变成 0。

3°. 最后，如果曲面(S)由有限多个 1° 或 2° 中所考虑的片段所組成，則将关于各片段的(4)型公式加起来就可証明公式(4)在一般情形也成立。

4°. 类似的公式也可对面积分 (2^*) 得出。将分别对任意連續函数 P, Q, R 写下的三个公式全加在一起就得出表示两型面积分間关系的一般公式：

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$=\iint\limits_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS. \qquad (6)$$

要注意的是，这里右边的方向余弦是依照左边积分所展布的曲面那一側的法綫来計算的。

5°. 如果曲面 (S) 是以参变式給出的，則可将公式(6)右边的积分——連带地，左边的积分——化为寻常二重积分，展布在参变数的变域(Δ)上。我們先假設曲面是簡单而光滑的，又設它由逐段光滑界綫所圍成。

我們选定曲面一側并由此在它上面定了向。如果区域(Δ)的界綫(Λ)的正向环行相应于界綫(L)的正向环行，則我們知道[362段]，表示曲面所选之側的法綫的方向余弦可由公式

$$\cos\lambda=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

来决定，根式前取正号。另一方面，在变換为依参变数 u, v 的二重积分时面积元素 dS 应換成

$$+\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

[369段]。最后得出

$$\iint\limits_{(S)}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{(\Delta)}(AP+BQ+CR)dudv. \qquad (7)$$

右边函数 P, Q, R 中的 x, y, z 要共用 u 和 v 的表出式来代替。

附注 这个公式也可推广到由簡单光滑曲面彼此衔接起来的曲面的較一般情形。但在右边积分前可出現正号也可出現負号。[参閱361段附注]。

373. 斯托克斯公式 現在我們来推导一个联系面积分与綫积分的公式，它就是已知的格林公式[346段]的推广。

关于曲面(S)我們先保持和前段5°中同样的假設。

設在包含曲面S本身于其內部的某一空間区域內給定了一个函数$P(x,y,z)$，它連同其偏导函数都在該区域內連續。于是成立公式

$$\int_{(L)} Pdx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \tag{8}$$

而界綫(L)的环行方向就相应于曲面(S)的右边那积分所展布之側。

首先我們将沿曲綫(L)的綫积分变成沿曲綫(Λ)的积分：

$$\int_{(L)} Pdx = \int_{(\Lambda)} P\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right). \tag{9}$$

这等式不难驗証：采用曲綫(Λ)的参变表示法：

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

由此曲綫(L)也表成参变式：

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

于是两个积分化成了同一个依参变数t的寻常积分：

$$\int_{\alpha}^{\beta} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}\right) dt.$$

現在应用格林公式于(9)式右边的积分：

$$\int_{(\Lambda)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = \iint_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\} dudv.$$

因为最后这个被积式展开来成

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} -$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}\right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

所以我們得出二重积分

$$\iint\limits_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\right\}dudv.$$

按公式(7)它不难变成面积分

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,$$

恰好沿曲面所选定之側来积。如此完成了等式(8)[①]的証明。

这公式我們是对簡单光滑曲面建立的。但它不难推广到由逐段光滑曲綫所圍的逐片光滑曲面的一般情形。只要对每一簡单光滑片段各别写出公式，然后将所得諸等式逐項加起来就行了。

輪換字母 x, y, z 的方法还可得出两个类似等式:

$$\int\limits_{(L)}Qdy=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$
$$\int\limits_{(L)}Rdz=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx, \tag{8a}$$

这里 Q 与 R 是 x, y, z 的两个新函数，滿足与 P 一样的条件。

将三个等式 (8) 与 (8a) 全加起来，就得出所求結果的最一般形式:

$$\int\limits_{(L)}Pdx+Qdy+Rdz=$$
$$=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx. \tag{10}$$

这个等式就叫做斯托克斯公式。再提醒一次；曲面之側与界

---

①須指出我們在推导中利用了导函数 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$ 的存在性和連續性，而这些导函数并不出現在結果里。其实該公式沒有这些假設也仍成立。

綫环行方向按362段中所建立法則相互决定。

如果取 xy 平面上的平面区域 (D) 作为曲面 (S) 的一片，从而 $z=0$，則得出公式

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy=\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

这就是讀者已知道的格林公式；如此，格林公式就是斯托克斯公式的一个特例①。

最后我們指出，斯托克斯积分中的第二型面积分可以用第一型面积分来替代。于是这公式成为

$$\int_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right]dS, \tag{11}$$

这里 $\cos\lambda$，$\cos\mu$，$\cos\nu$ 表示相应于曲面所选定之側的法綫的方向余弦。

我們举一个例来"驗証"斯托克斯公式。令

$$P=y^2+z^2,\quad Q=z^2+x^2,\quad R=x^2+y^2$$

并取柱面

$$x^2+y^2=2rx \quad 由球面 x^2+y^2+z^2=2Rx \ (R>r,\ z>0)$$

所切出的曲面部分作为 (S)。

采用曲綫的参变表示法②：

$$x=r(1+\cos t),\quad y=r\sin t,\quad z=\sqrt{2r(R-r)}\sqrt{1+\cos t}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

---

①为了便于記住斯托克斯公式我們指出：右边积分中第一項与格林公式相同，其余两項可由字母 x,y,z 及 P,Q,R 循环輪換得到。

②如果令 $x-r=r\cos t, y=r\sin t$，則参变数 t 的几何意义是明显的；将这二式代入球面方程中即得出 z 与 t 的关系。由上面看来，t 由0变到 2π 时曲綫以逆鐘方向描出。

这样曲綫积分化成了一个很复杂的寻常积分:

$$\int_0^{2\pi}\{[r^2\sin^2t+2r(R-r)(1+\cos t)](-r\sin t)+$$

$$+[2r(R-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]r\cos t+$$

$$+[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\}dt.$$

但大括弧中第一項与第三項乘以dt后有 $f(\cos t)d\cos t$ 的形状，而其积分由于余弦的周期性而等于 0。做出剩下的計算，得出 $2\pi Rr^2$。

我們先把展布在所設曲面上側的第二型面积分

$$2\iint_{(S)}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

变为下列第一型积分:

$$2\iint_{(S)}[(y-z)\cos\lambda+(z-x)\cos\mu+(x-y)\cos\nu]dS.$$

因为

$$\cos\lambda=\frac{x-R}{R},\quad \cos\mu=\frac{y}{R},\quad \cos\nu=\frac{z}{R}.$$

以这三式代入后所求的积分經化簡后成为

$$2\iint_{(S)}(z-y)dS.$$

由于曲面对 xz 平面的对称性，积分$\iint\limits_{(S)}ydS$ 等于 0，剩下的积分我們又把它变成第二型积分:

$$2\iint_{(S)}zdS=2\iint_{(S)}\frac{z}{\cos\nu}dxdy=2R\iint_{(S)}dxdy=2\pi Rr^2.$$

374. 斯托克斯积分应用于空間綫积分的研究 設在开区域 (T)內給了三个函数 P, Q, R，它們連同其导函数

$$\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z};\ \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y}$$

都是連續的。

借助斯托克斯公式不难建立使沿 (T) 內任何簡单閉界綫 (L)

的积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{12}$$

化为 0 的必要而充分的条件。

但是，为了能使用斯托克斯公式，須預先对我們所考慮的区域 (T) 加一个自然的限制，即要：区域 (T) 內任何簡单逐段光滑閉曲綫 (L) 必能"張"成一片（不自相交叉的）以 (L) 为其界綫并且也完全落在 (T) 內的光滑曲面 (S)。这个性質就像平面区域的单連通性；具有这种性質的空間区域 (T) 也叫做（"依曲面的"①）单連通区域。例如，两个同心球面所包圍的体在这意义上是单連通的，而环面則不是。

設区域 (T) 是（依曲面）单連通的。如上述，在界綫 (L) 上張一曲面 (S) 而按斯托克斯公式将綫积分(12)换成面积分

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx.$$

显然为了使它等于 0，一組充分条件是：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{Б}$$

这些条件同时也是必要的；这不难証明（証法与 348 段相似），——只要依次考虑平行于各坐标面的平面上的平面图形 (S) 就行了。

讀者可以看出，我們在此利用斯托克斯公式的目的是与 348 段利用格林公式相似的。

不难証明，同一条件(Б)也是使积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{13}$$

---

①以与下面[381 段]要講的空間区域单連通性区别开来。

与連結区域(T)內任何两点A与B的曲綫(AB)的形状无关的必要而充分的条件，当然，在此要假設該区域是依曲面单連通的。

必要性可以像平面的情形[349段]一样来建立。至于充分性，則当两曲綫(AIB)与$(AIIB)$除两端外沒有交叉点时也和那里一样不难解决。如果不是如此，即所取的两曲綫相交，則这里問題比在平面情形要簡单些：在連通空間区域(T)內，总可以取这样的第三条曲綫$(AIIIB)$，它与前两条都不相交①。于是

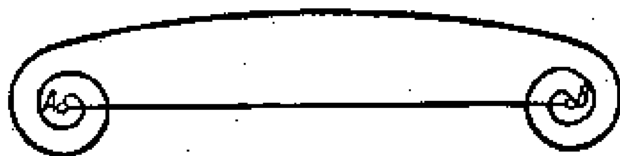


图 57.

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIIB)}, \quad \int_{(AIIB)} = \int_{(AIIIB)},$$

由此推知，恒有

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}.$$

以上的討論还可以連系到这样一个問題：微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \tag{14}$$

是否是某三元函数的全微分？可以像350段一样驗証，条件(Б)就是这情形的必要条件。要証明其为充分条件，則也和平面的情形一样，只要直接做出其原函数来就行了——写成一个綫积分

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz$$

的形状[参閱350段(8)]，它在条件(Б)实现时就与路綫无关。如此，对上述那种区域(T)，条件(Б)就是使(14)式成全微分的必要而充分的条件。

---

①图57表明，这在平面情形不是永远做得到的。

第二十三章　三重积分

§1. 三重积分及其計算

375. 立体質量計算問題　設給了一个充滿質量的立体(V)，并且在每点$M(x,y,z)$上已知質量的分布密度

$$\rho=\rho(M)=\rho(x,y,z),$$

要决定該立体的全質量m。

要解决这个問題我們将立体(V)分为

$$(V_1),\ (V_2),\cdots,\ (V_n)$$

等部分并在每部分中各选取一点

$$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i).$$

近似地認为在每部分(V_i)內密度是常数，并且就等于所选一点上的密度$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$。于是这部分的質量$m_i$可近似表为

$$m_i\doteq\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i,$$

而立体全質量可表为

$$m\doteq\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i.$$

如果各部分的直徑都趋于0，則在极限情形这近似式变成精确的，如此

$$m=\lim\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i,\tag{1}$$

而問題就解决了。

我們看到，这問題的解决在此也是归結为一种特殊的和的极限——它是本书中屢次論及的积分和的另一类型。

这类极限在力学和物理学里常会看到；它們称为三重积分。上面所得結果用通常記号可写成这样：

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho(x, y, z)dV. \tag{2}$$

本章所論以三重积分理論及其重要应用为主。因为許多对二重积分建立的命題連同其証明都可以搬到三重积分的情形，我們一般将只陈述这些命題，而让讀者自己去重述以前的証明。

376. 三重积分及其存在条件 在給三重积分这新的积分概念下一般定义时，立体体积概念起了重要的作用，正和平面图形面积概念在二重积分定义中所处的地位一样。

对于体积概念我們在第一卷里已經熟悉，并且已屡次接触到它。一个立体的体积存在的条件无非是要包围它的曲面有零面积[197段]。只有这样的曲面是我們所要考慮的，所以在一切我們所需要的情形，体积的存在也就得到保証。特别是，光滑曲面及逐片光滑曲面正屬于这一类曲面。

現在設在某一空間区域(V)內給定了一个函数$f(x, y, z)$。将此区域用一个曲面网分成$(V_1), (V_2), \cdots, (V_n)$等部分，各有体积$V_1, V_2, \cdots, V_n$。在第$i$个元素$(V_i)$內任取一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，将此点上的函数值$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$乘以体积$V_i$而組成积分和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i.$$

此和当所有区域(V_i)的直徑連最大的一个都趋于0时的有限极限I就称为函数$f(x, y, z)$在区域(V)內的三重积分。用記号表为

$$I=\iiint\limits_{(V)}f(x, y, z)dV=\iiint\limits_{(V)}f(x, y, z)dxdydz.$$

这类有限极限只有当函数有界时才存在；对这种函数除积分

和σ外还可引入达布和:

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_iV_i, \qquad S=\sum_{i=1}^{n}M_iV_i,$$

这里

$$m_i=\inf_{(V_i)}\{f\}, \quad M_i=\sup_{(V_i)}\{f\}.$$

按寻常方法可証明,这积分存在的必要而充分的条件是

$$\lim(S-s)=0$$

或

$$\lim\sum_{i=1}^{n}\omega_iV_i=0,$$

这里$\omega_i=M_i-m_i$是函数f在区域(V_i)內的摆幅。(在积分存在时两和s, S也有其极限。)

由此立即推知,任何連續函数都是可积分的。

可积分函数的条件还可稍加推广如下:任何有界函数,只要其全部不連續点落在有限多个零体积曲面上,就是可积分的[参閱339及340段]。

377. 可积分函数及三重积分的性質 只要列举出这些性質就行了,其証明与341段所講的相似。

1°. 三重积分的存在及其值均与被积函数沿有限多零体积曲面上所取值无关;

2°. 如果$(V)=(V')+(V'')$,则

$$\iiint\limits_{(V)} fdV=\iiint\limits_{(V')} fdV+\iiint\limits_{(V'')} fdV,$$

并且只要等式一边的积分存在则可推得另一边的积分也就存在,反过来也是如此。

3°. 如果k为常数,则

$$\iiint\limits_{(V)} kfdV=k\iiint\limits_{(V)} fdV,$$

并且只要右边的积分存在，左边的积分也就存在。

4°. 如果在区域 (V) 内两函数 f 与 g 可积分，则函数 $f\pm g$ 也可积分，并且

$$\iiint\limits_{(V)}(f\pm g)dV=\iiint\limits_{(V)}fdV\pm\iiint\limits_{(V)}gdV.$$

5°. 如果函数 f 与 g 在区域 (V) 内可积分并且 $f\leqslant g$, 则

$$\iiint\limits_{(V)}fdV\leqslant\iiint\limits_{(V)}gdV.$$

6°. 如果函数 f 可积分，则 $|f|$ 也就可积分，并且

$$\left|\iiint\limits_{(V)}fdV\right|\leqslant\iiint\limits_{(V)}|f|dV.$$

7°. 如果函数 f 在 (V) 内可积分并且

$$m\leqslant f\leqslant M,$$

则

$$mV\leqslant\iiint\limits_{(V)}fdV\leqslant MV.$$

换句話說，我們有这中值定理：

$$\iiint\limits_{(V)}fdV=\mu V\quad(m\leqslant\mu\leqslant M).$$

当函数 f 連續时这个公式可以写成

$$\iiint\limits_{(V)}fdV=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})V,\tag{3}$$

这里 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是区域 (V) 內某一点。

其次也不难将 342 段的內容推广到三維的情形：也和那里一样，可以建立(三維)区域函数概念，特别是，可加性函数概念。这种函数的重要例子(参閱 2°)是依变动区域 (v) 的积分：

$$\Phi((v))=\iiint\limits_{(v)}fdv.\tag{4}$$

和以前一样，可引入函数$\Phi((v))$在一点M上对区域的导数概念；这就是指包含它的区域(v)缩为一点时的极限

$$\lim_{(v)\to M}\frac{\Phi((v))}{v}.$$

8°. 如果被积函数連續，則积分(4)在点$M(x,y,z)$上对区域的导数将恰恰是被积函数在这一点上的值，即$f(M)=f(x,y,z)$。

如此，在所作假設之下积分(4)在某种意义上就是函数f的"原函数"。

378. 三重积分的計算 这里問題也是要化为由重数較低的积分所組成的累次积分。假設函数$f(x,y,z)$在所考慮区域内連續，由此保証了所有以下接触到的积分都存在，我們首先来講这个情形：函数$f(x,y,z)$的积分所展布的立体是一个长方体

$$(T)=[a,b;c,d;e,f],$$

它在yz平面上的射影是矩形

$$(R)=[c,d;e,f].$$

于是我們首先有

$$\iiint_{(T)}f(x,y,z)\,dT=\int_a^b dx\iint_{(R)}f(x,y,z)\,dR. \tag{5}$$

然后将其中二重积分再换成累次积分，如此三重积分的計算終于化成了三个单积分的遞次計算：

$$\iiint_{(T)}f(x,y,z)\,dT=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)\,dz. \tag{6}$$

反之，如果把前两个积分合并为二重积分，則得

$$\iiint_{(T)}f(x,y,z)\,dT=\iint_{(Q)}dx\,dy\int_e^f f(x,y,z)\,dz, \tag{7}$$

这里$Q=[a,b;c,d]$。当然在所有这些情形，变数x,y,z的地位是

可以調換的。

現在假設，三重积分展布在非长方体的立体(V)上。設这个立体被夹在两个平面 $x=x_0$ 与$x=X$之間，而每个与它們平行的平面——各相应于一个固定值 $x(x_0\leqslant x\leqslant X)$——所截的图形都是有面积的；以$(P_x)$表示該图形在 yz 平面上的射影(图 58)。于是

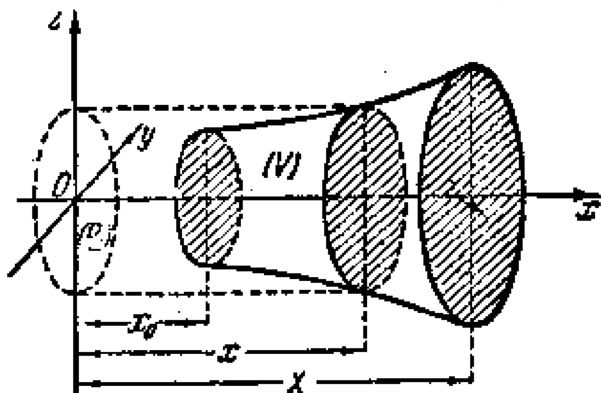


图 58.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV=\int_{x_0}^{X}dx\iint\limits_{(P_x)} f(x,y,z)dydz. \tag{5a}$$

这与公式(5)相似。

其次，設立体(V)是一个"柱体"，下面和上面各由曲面

$$z=z_0(x,y) \text{ 和 } z=Z(x,y)$$

所包圍，在 xy 平面上投射成一图形 D，D的边界为零面积曲綫(K)；立体(V)的侧面是一柱面，此柱面以曲綫(K)为准綫而母綫平行于 z 軸(图 59)。

于是，仿照公式(7)我們有

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV=\iint\limits_{(D)}dxdy\int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{7a}$$

如果区域(D)是一个曲綫梯形，以曲綫

$$y=y_0(x) \text{ 和 } y=Y(x) \quad (x_0\leqslant x\leqslant X)$$

为腰而以直綫 $x=x_0$，$x=X$ 为底(图 60)，则立体(V)可归入上面所討論过的两种类型。將二重积分(在公式(5a)中或(7a)中)换成累次积分，得

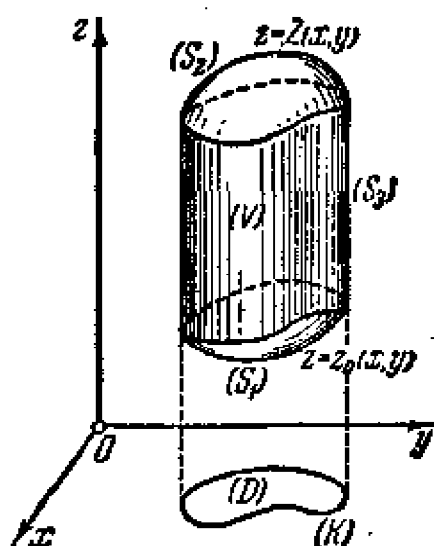


图 59.

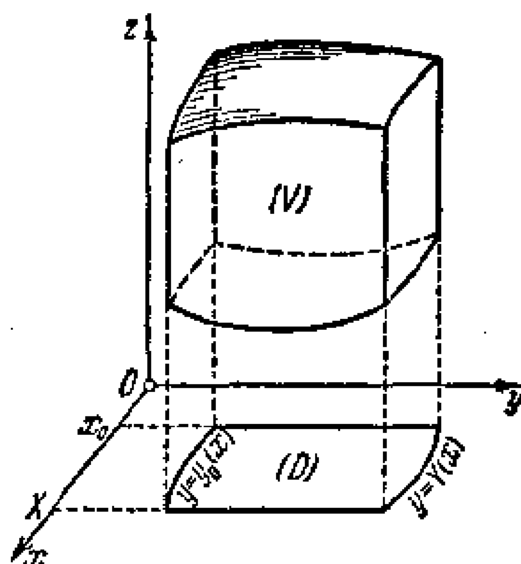


图 60.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (6a)$$

这公式推广了公式(6)。

也和上面討論过的那簡単情形一样，这里如将变数 x, y, z 互相調換还可得出与上列公式相似的公式。

例 1) 計算积分

$$I=\iiint \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

它展布在以平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+$ $+z=1$ 为界的四面体上(图 61)。

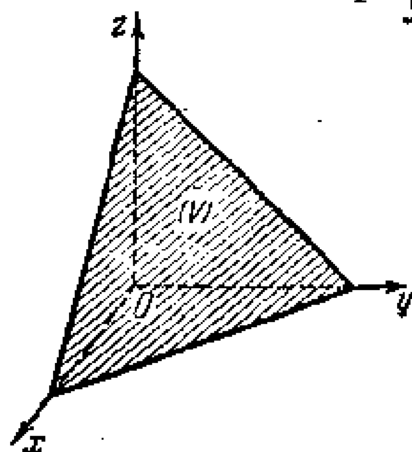


图 61.

解 四面体在 xy 平面上的射影是一个由直綫 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 所成的三角形。显然，x 的变化是 0 与 1，而在 x 固定于这界限內时，变数 y 可由 0 变至 $1-x$。如果 x 与 y 都固定，則点可以沿鉛垂方向由平面 $z=0$ 移动至平面 $x+y+z=1$；如此变数 z 的界限是 0 和 $1-x-y$。

按公式(6a)我們有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3};$$

逐一計算积分，由最內层算起：

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right];$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right),$$

最后，

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

2) 計算狄利希萊积分

$$D=\iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz,$$

这里假設 $p,q,r\geqslant 1$（图 61）。

如果利用像(5a)那样的公式而将对 z 的积分换成对 x 的积分，則得：

$$D=\int_0^1 z^{r-1}dz\iint\limits_{\substack{x,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1-z}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy.$$

用变数更换 $x=(1-z)\xi,\ y=(1-z)\eta$，将二重积分化为已知的［344 段，3)］

$$(1-z)^{p+q}\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geqslant 0\\ \xi+\eta\leqslant 1}}\xi^{p-1}\eta^{q-1}d\xi d\eta=(1-z)^{p+q}\cdot\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)},$$

如此

$$D=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\int_0^1 z^{r-1}(1-z)^{p+q}dz.$$

最后，利用已知的 B-函数的 Γ 表出式［311 段，(12)］，終于得出

$$D=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}.$$

这个結果完全与344段 3)中所得的相似。其实它在更一般的假設 $p>0$, $q>0$, $r>0$ 下也仍成立；但在被积函数变成无穷大时（例如，在 $0<p<1$ 时这发生在平面 $x=0$ 上）該积分已經是“非正常的”而需要再取一次极限。这

种积分可以像二重积分的情形一样来下定义[参閱 344 段, 4), 附注]。

379. 力学上的应用 自然, 所有有关空間立体(V)中質量分布的几何量及力学量原則上都可表为展布在立体(V)上的三重积分。这里也是以利用无穷小元素求和原理較为簡便[参閱 204—208 及 345 各段]。

我們以 ρ 表示在立体(V)任意一点上的質量分布密度; 它是点的坐标的函数; 这个函数我們恒假設是連續的。將質量元素 $dm=\rho dV=\rho dxdydz$ 加起来, 总質量为

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho dV=\iiint\limits_{(V)}\rho dxdydz \tag{8}$$

[参閱 375 段]。

由靜矩元素

$$dK_{yz}=xdm=x\rho dV,\quad dK_{zx}=ydm=y\rho dV,\quad dK_{xy}=zdm=z\rho dV$$

出发我們找到靜矩本身:

$$K_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\rho dV,\quad K_{zx}=\iiint\limits_{(V)}y\rho dV,\quad K_{xy}=\iiint\limits_{(V)}z\rho dV, \tag{9}$$

而由此也就求出重心坐标:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)}x\rho dV}{m},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)}y\rho dV}{m},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)}z\rho dV}{m}. \tag{10}$$

在均匀体的情形 $\rho=$常数, 則得更簡单的式子:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)}xdV}{V},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)}ydV}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)}zdV}{V}.$$

显然对坐标軸的慣性矩公式是:

$$I_x=\iiint\limits_{(V)}(y^2+z^2)\rho dV,\quad I_y=\iiint\limits_{(V)}(z^2+x^2)\rho dV,$$

$$I_z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\rho dV, \tag{11}$$

而对坐标面的慣性矩公式則是:

$$I_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x^2\rho dV,\quad I_{zx}=\iiint\limits_{(V)}y^2\rho dV,\quad I_{xy}=\iiint\limits_{(V)}z^2\rho dV. \tag{12}$$

最后, 設充滿立体(V)的質量按牛頓定律吸引一个質点 $A(\xi,\eta,\zeta)$(質量

为1)(图 62)。由質量元素 $dm=\rho dV$ 产生的吸引力在坐标軸上的射影①为

$$dF_x=\frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\ dF_y=\frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,$$

$$dF_z=\frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV,$$

这里

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

是該元素(或者是点,而認为質量集中于該点)与点 A 的距离。加起来得全引力 $\vec{F}$ 在各坐标軸上的射影

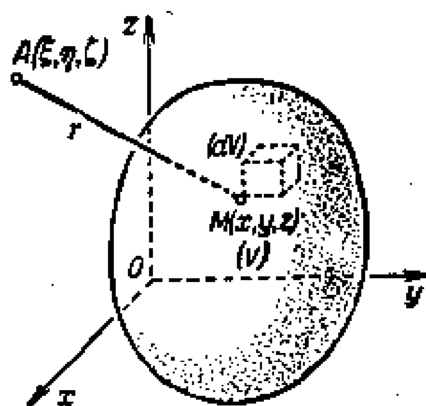


图 62.

$$F_x=\iiint\limits_{(V)}\frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\quad F_y=\iiint\limits_{(V)}\frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,\quad F_z=\iiint\limits_{(V)}\frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV. \tag{13}$$

同样也可决定該立体在一点上的位势:

$$W=\iiint\frac{\rho dV}{r}. \tag{14}$$

如果点 A 在体外,則这些积分全都是正常的。在这情形可以依据类似对单积分所用的想法[297段]将积分 W 对变数 ξ,η,ζ 中任何一个进行积分号下的微分。結果我們得到

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=F_x,\ \frac{\partial W}{\partial \eta}=F_y,\ \frac{\partial W}{\partial \zeta}=F_z. \tag{15}$$

点 A 屬于体 (V) 时則在此点上 $r=0$ 而在(13)及(14)中的被积函数在其邻近不再有界。但这些积分作为"非正常"积分則仍存在,并且对它們基本关系式(15)仍成立。

附注 在 **345** 段对均匀柱体($\rho=1$)的靜矩我們有了公式

$$K_{yz}=\iint\limits_{(P)}zx\,dxdy,\ K_{zx}=\iint\limits_{(P)}zy\,dxdy,\ K_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)}z^2dxdy.$$

它們当然可由一般公式(9)推出。

例如,我們有

$$K_{xy}=\iiint\limits_{(V)}z\,dV=\iint\limits_{(P)}dxdy\int_0^{z(x,y)}z\,dz;$$

① 参閱 332 頁底注

但

$$\int_{0}^{z(x,y)} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=z(x,y)},$$

这就导致所求的結果。

在 345 段里最后一个积分的計算是用力学中的想法(关于細竖条的靜矩)替代的。

§2. 奥斯脫罗格拉德斯基公式

380. 奥斯脫罗格拉德斯基公式 在二重积分的理論中我們熟悉了一个联系平面区域上二重积分与区域边界上綫积分的格林公式。在三重积分理論中与此公式相类似的就是奥斯脫罗格拉德斯基公式，它把空間区域上的三重积分与該区域边界面上的面积分联系起来。

我們来考虑一个立体(V)(图 59)，它的边界是光滑曲面

$$\left.\begin{array}{ll}(S_1) & z=z_0(x,y)\\(S_2) & z=Z(x,y)\end{array}\right\}(z_0\leqslant Z)$$

及柱面(S_3)。这柱面的母綫平行于 z 軸，准綫則为 xy 平面上那逐段光滑曲綫(K)(面积为 0)，它包圍着区域(D)，即立体(V)在 xy 平面上的射影。

設在区域(V)內定义了一个函数 $R(x,y,z)$，它連同其导数$\frac{\partial R}{\partial z}$在全区域$(V)$及其边界上都是連續的。于是成立下列公式：

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Rdxdy, \tag{1}$$

这里(S)是包圍該立体的曲面，而右边的积分是展布在它的外側上的。

事实上，按 **378** 段公式(7a)

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=$$

$$=\iint\limits_{(D)}R(x,y,Z(x,y))dxdy-\iint\limits_{(D)}R(x,y,z_0(x,y))dxdy.$$

如果考虑面积分，则由**372**段公式(3)和(3a)有

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(S_2)}R(x,y,z)dxdy+\iint\limits_{(S_1)}R(x,y,z)dxdy,$$

这里右边的积分第一个展布在曲面(S_2)的上侧，第二个展布在曲面(S_1)的下侧。这等式在其右边添加一个展布在曲面(S_3)外侧的积分

$$\iint\limits_{(S_3)}R(x,y,z)dxdy$$

后仍然成立，因为所添积分等于0[**372**段(5)]。将三个面积分合并成一个，我們就得到公式(1)，它就是奥斯脫罗格拉德斯基公式的一个特例。

不难理解，公式(1)对可以分解成所研究过的类型的更广大的一类立体也是正确的。也可以証明，公式(1)一般对任何逐片光滑曲面所包圍的立体都是成立的。

与公式(1)相似我們还有下列的公式：

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz=\iint\limits_{(S)}Pdydz,\tag{2}$$

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\iint\limits_{(S)}Qdzdx,\tag{3}$$

这里函数P与Q連同其导函数$\frac{\partial P}{\partial x}$及$\frac{\partial Q}{\partial y}$都是在区域$(V)$內連續的。

将(1)，(2)，(3)三个公式加在一起，我們就得出一般奥斯脫罗格拉德斯基公式：

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy. \qquad (4)$$

它将展布在閉曲面外側的一般形式的第二型面积分表为該曲面所包之立体上的三重积分。

如果引入第一型的面积分，則可得出奥斯脫罗格拉德斯基公式的另一很有用而容易記忆的形式：

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS, \qquad (5)$$

这里 λ, μ, ν 是曲面 (S) 的外法綫与各坐标軸所成之角。

附注 I 有时奥氏公式也系以高斯的名字。但高斯只接触到这公式的一些很窄的特例并且每次重新作推导。这公式的一般形式(4)是于 1828 年由奥斯脫罗格拉德斯基最先給出的，他还将它应用到固体热傳导問題上。

附注 II 格林公式，斯托克斯公式，奥斯脫罗格拉德斯基公式可以由这样一种思想統一起来：它們都是将展布在某几何形象上的积分用其边界上的积分表出。格林公式屬二維空間的情形，斯托克斯公式屬二維而“弯曲”空間的情形，奥斯脫罗格拉德斯基公式則屬三維空間的情形。

积分学基本公式

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

也可看作屬于这类公式的范疇，——是其一維空間的情形。

381. 奥斯脫罗格拉德斯基公式的几个应用实例 1) 用面积分表出立体的体积。也和 347 段中一样，我們可以在公式(4)中以种种方式选擇函数

P, Q, R，使三重积分中被积函数等于1，如此这积分就化为立体(V)的体积V。这样体积V就表成了伸展在該立体(V)的界面(S)上的面积分。例如，在(4)中依次令

$$P=x, Q=0, R=0;\quad P=0, Q=y, R=0;\quad P=0, Q=0, R=z,$$

就得出公式

$$V=\iint_{(S)} x\,dy\,dz=\iint_{(S)} y\,dz\,dx=\iint_{(S)} z\,dx\,dy, \tag{6}$$

这里所有积分都是沿曲面(S)的外側来取的。比較方便的是一个对称的公式，相应于

$$P=\frac{1}{3}x,\quad Q=\frac{1}{3}y,\quad R=\frac{1}{3}z;$$

它有这样的形状：

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

或者化为第一型积分成

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(S)}(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)\,dS$$

(这里 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 表示曲面外法綫 $\vec{n}$ 的方向余弦)。

这公式还可用另一方式表出：如果考虑連結原点与曲面上变点的矢量 $\vec{r}$ 以及其在各坐标軸上的射影 x, y, z，則括弧中的式子可写成

$$r\cdot\cos(\vec{r}, \vec{n})$$

而最后有

$$V=\frac{1}{3}\iint_{(S)} r\cdot\cos(\vec{r}, \vec{n})\,dS.$$

在这样的形式之下，这結果高斯在1813年就已接触到了。

2) 剛体閉曲面的平衡。我們来証明，全面受均匀压力的剛体閉曲面恒保持平衡。

为此我們来証明，所有加于曲面上的力的主矢量及主矩(对任何点而言)都等于0。

取出曲面的一个元素(dS)。如果以$p=$常数表示压强，即施于单位面积上的力，則沿其法綫加于元素(dS)上的力元素在各軸上的射影为

$$-p\cos\lambda\,dS,\quad -p\cos\mu\,dS,\quad -p\cos\nu\,dS \tag{7}$$

(加負号是因为压力是向着曲面内部的；而 λ, μ, ν 是外法綫与坐标軸間所成的角)。

主矢量的射影 R_x, R_y, R_z 可由力的元素射影(7)加起来得出:

$$R_x=-p\iint_{(S)}\cos\lambda dS,\quad R_y=-p\iint_{(S)}\cos\mu dS,\quad R_z=-p\iint_{(S)}\cos\nu dS.$$

但这些积分全等于 0,这只要在奥氏公式中令

$$P=1,\ Q=R=0;\ Q=1,\ P=R=0;\ R=1,\ P=Q=0$$

即可看出。

所以,压力的主矢量等于 0。

要决定力元素系的主矩,比方說,对坐标原点的矩墨,我們来把下列力矩元素在各軸上的射影加在一起:

$$p(z\cos\mu-y\cos\nu)dS,\ p(x\cos\nu-z\cos\lambda)dS,\ p(y\cos\lambda-x\cos\mu)dS①.$$

如此,压力对原点的主矩其射影为:

$$L_x=p\iint_{(S)}(z\cos\mu-y\cos\nu)dS,\quad L_y=p\iint_{(S)}(x\cos\nu-z\cos\lambda)dS,$$

$$L_z=p\iint_{(S)}(y\cos\lambda-x\cos\mu)dS.$$

如果在奥氏公式中取 $P=0, Q=pz, R=-py$, 則得 $L_x=0$。同样可証 $L_y==L_z=0$。故(对原点的)主矩等于 0。如此我們的証明完成了。

3) 阿几默德定律。大家知道,液体加于浸沒其中的小块面积压力,方向是沿着該面积的法綫的,大小則等于以該面积为底而以浸沒的深度为高的液柱之重量。現在假設一个剛体(V)在液体中浸沒;在其表面 (S) 的每一元素(dS)上液体按上述定律加以压力,現在来决定压力元素的合力及其作用点。

为了解决这个問題,我們选擇一坐标系:将 xy 平面放在液体水平面上,而 z 軸鉛垂朝下。

設液体比重等于 ρ,而元素(dS)的浸沒深度为z;于是該元素所受压力为

$$\rho z dS,$$

而其在各軸上射影为:

$$-\rho z\cos\lambda dS,\quad -\rho z\cos\mu dS,\quad -\rho z\cos\nu dS.$$

如此主矢量在各軸上的射影为:

$$R_x=-\rho\iint_{(S)}z\cos\lambda dS,\quad R_y=-\rho\iint_{(S)}z\cos\mu dS,$$

---

① 如果加于点(x,y,z)的力沿各軸的分力是 X,Y,Z, 則对点(ξ,η,ζ)的力矩在各軸上的射影是

$$L_x=(y-\eta)Z-(z-\zeta)Y,\quad L_y=(z-\zeta)X-(x-\xi)Z,\quad L_z=(x-\xi)Y-(y-\eta)X.$$

$$R_z=-\rho\iint\limits_{(S)}z\cos\nu dS.$$

由奥氏公式，也和前一問題一样，不难得出

$$R_x=R_y=0,\quad R_z=-\rho\iiint\limits_{(V)}dV=-\rho V.$$

如此，压力的主矢量方向是鉛垂向上的，其大小即等于物体所排出的液体的重量。

現在来考虑这些力元素对物体重心 $C(\xi,\eta,\zeta)$ 的矩（今后所指的都是在質量均勻分布之下的几何体的重心，这与物理的体的重心未必相同）。矩元素沿各坐标軸的分量是

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu-(y-\eta)\cos\nu]dS,\quad \rho z[(x-\xi)\cos\nu-(z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$
$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda-(x-\xi)\cos\mu]dS.$$

从而（对点 C 的）主矩的分量为：

$$L_x=\rho\iint\limits_{(S)}z[(z-\zeta)\cos\mu-(y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$L_y=\rho\iint\limits_{(S)}z[(x-\xi)\cos\nu-(z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$

$$L_z=\rho\iint\limits_{(S)}z[(y-\eta)\cos\lambda-(x-\xi)\cos\mu]dS.$$

应用奥氏公式于第一积分，得

$$L_x=\rho\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y}-\frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right]dV=$$

$$=\rho\iiint\limits_{(V)}(\eta-y)dV=\rho\left[\eta V-\iiint\limits_{(V)}ydV\right]=0,$$

因为积分 $\iiint\limits_{(V)}ydV$ 是該立体对 xz 平面的靜矩，即等于 ηV。同样可証 $L_y=0$；最后可直接得出 $L_z=0$。

所以，压力对重心的主矩等于 0。将这話与前面所証关于主矢量的命題相对照可得出如下結論：物体浸沒于液体中时，受到液体一个压力，即等于物体排开液体之重量；此力作用于該（几何）体重心，而方向鉛垂朝上。

4）面积分的研究。設在三維空間某开区域 (T) 內給定了連續函数 P，Q，R。取一个任意的閉曲面 (S)，它落在該区域內并包圍着一个立体。于是

来考慮面积分

$$\iint_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=$$

$$=\iint_{(S)}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS. \tag{8}$$

函数 P,Q,R 应滿足些什么条件才能使积分(8)恒等于 0 呢?

这問題与沿閉路綫綫积分等于 0 的問題相似[348 及 374 段]，它是用格林公式或斯托克斯公式很容易地被解决了。当前这个問題自然也可利用奥氏公式，而假設公式中所出現的函数 P,Q,R 的导函数都存在并且連續。

但是在当前情形为了能将积分(8)按奥氏公式予以变换，必須对基本区域(T)加上一个限制。即要：只要任何包圍立体(V)的簡单閉曲面屬于区域(T)，則該立体也就完全被包含在区域 T 內。具有这种性質的区域称为（“依空間”）单連通的[参閱 374 段]。这一类型的单連通性的特点就是沒有“空洞”、那怕这种空洞只是一些点。对于不伸展到无穷的立体，不妨直接了当就要求它的边界是单个閉曲面[参閱 348 段]。所以，与前面，例如 374 段所說“依曲面”单連通性不同，这里环是单連通的立体，而空心球就不是了。

奥氏公式立即引到所求的条件：

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0. \tag{B}$$

这条件显然是充分的；而利用三重积分对区域的微分[377 段 8°]不难証明它也是必要的。

也和綫积分的情形相似，沿閉曲面的积分是否等于 0 就看沿所給边界所“張”閉曲面的积分是否与曲面的形状无关。这我們不来細講了。

§3. 三重积分变数更换

382. 空間区域的变换 352 段关于平面区域变换的想法可以很自然地轉移到空間区域的情形上来。

設有一空間，其中有直角坐标系 xyz，另一空間則有坐标系 $\xi\eta\zeta$。我們来考慮这些空間中的两个閉区域 (D)及(Δ)，各为曲面(S)及(Σ)所包圍，这些界面我們总假設是逐片光滑的，更設这两个区域間彼此有相互单值而連續的关系，以下列公式表出：

$$\left.\begin{aligned}x&=x(\xi,\eta,\zeta),\\y&=y(\xi,\eta,\zeta),\\z&=z(\xi,\eta,\zeta).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

同时曲面(Σ)与曲面(S)上的点必須彼此相应。

設函数(1)在区域(Δ)內有連續偏导函数；于是函数行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$$

也是(Δ)內的連續函数。这里我們也認为，这行列式永异于0而保持一定的正負号[参閱352]。

于是公式(1)将区域(Δ)內逐片光滑曲面变换为(D)內逐片光滑的曲面，反过来也如此。

单值地决定xyz空間中一点的位置的数ξ,η,ζ称为該点的曲綫坐标。xyz空間中使这些坐标之一保持常数的点形成一坐标面。这样的坐标面共有三族；区域(D)的每一个点在每族中都有一个坐标面通过它。

但这只有假設区域(D)与(Δ)間有严格一一对应关系时才是这样。实际上这一一对应关系常常是不成立的。

例 1) 圓柱坐标 这可以說是xy平面中的极坐标与尋常笛卡尔豎坐标z的結合(图63)。其与笛卡尔坐标的关系可由这样的公式表出：

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z.\tag{2}$$

这些公式将区域

$$0\leqslant\rho<+\infty,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$

映射到全xyz空間上。但是，直綫$\rho=0$，$z=z$則被映射为一点$(0,0,z)$；这破坏了一一对应关系。

坐标面在当前情形是：

(a) $\rho=$常数，即母綫平行于z軸的柱面；其准綫为xy平面上以原点为中心的圓；

(б) $\theta=$常数，即通过z軸的半平面；

(в) $z=$常数，即平行于xy平面的平面。

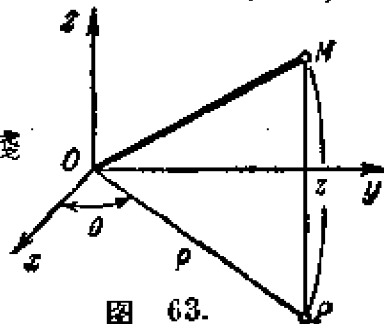


图 63.

变换的函数行列式是:

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

除了 $\rho=0$ 的情形外, 上式保持正号。

2) 球面坐标, 也叫做空間极坐标, 其与笛卡尔坐标的关系由下列公式表出:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi,$$

这里

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

r, φ, θ 諸數的几何意义由图 64 表明: r 是連結原点(极)与所給的点 M 的矢徑 OM, φ 是这矢徑与 z 軸(极軸)所成之角; θ 是矢徑 OM 在(垂直于极軸的) xy 平面上的射影 $OP=r\sin\varphi$ 与 x 軸所成之角。

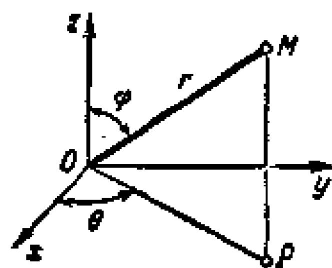


图 64.

这里我們又遇到一一对应关系不成立的情形: $r\varphi\theta$ 空間的平面 $r=0$ 映射为坐标原点 $x=y=z=0$, 直綫 $\varphi=0(\pi)$, $r=r$ 映射为一点

$$x=y=0,\quad z=r.$$

坐标面是下列三族:

(a) $r=$ 常数, 即中心在坐标原点的同心球;

(б) $\varphi=$ 常数, 即以 z 軸为軸的圓錐;

(в) $\theta=$ 常数, 即通过 z 軸的半平面。

这变换的行列式是:

$$J=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi.$$

除了在上述的情形: $r=0$ 或 $\varphi=0(\pi)$, 此时行列式等于 0 外这个行列式保持正号。

383. 体积表为曲綫坐标 在 382 段的假設及表示法之下我們来把 xyz 空間内一个(有限)立体 (D) 的体积表为展布在 $\xi\eta\zeta$ 空間

內相应立体(Δ)上的三重积分[①]。

所求的体积首先可表为第二型面积分[参閱 380 段(6)]：

$$D=\iint_{(S)} z\,dx\,dy,$$

展布在曲面(S)的外侧。由此我們再設法将它化为寻常二重积分。

我們由曲面(Σ)的参变方程

$$\xi=\xi(u,v),\quad \eta=\eta(u,v),\quad \zeta=\zeta(u,v) \tag{3}$$

出发，假設諸参变数在uv平面上某区域(E)內变化。在变换公式(1)中将ξ,η,ζ换成(3)式；于是我們显然可得出曲面(S)的参变方程：

$$x=x(\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v))=x(u,v),$$

$$y=y(u,v),\ z=z(u,v).$$

令

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

按 372 段(参閱附注)公式(7)我們有

$$D=\pm\iint_{(E)} zC\,du\,dv.$$

因为x,y通过中間变数ξ,η,ζ而依賴着u,v，所以按已知的函数行列式性质[326 段]有

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}.$$

将C的表出式代入上面所得积分，即得

$$D=\pm\iint_{(E)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}\right]du\,dv. \tag{4}$$

---

① 也如 353 段我們在此补充假設像

$$x''_{\xi\eta},\ x''_{\eta\xi},\ \cdots,\ y''_{\xi\eta},\ y''_{\eta\xi},\ \cdots$$

等等偏函导数存在及連續；这样証明起来容易些，虽然对結果的正确性而言并不重要。

将这个积分与下列展布在曲面(Σ)外侧的第二型面积分

$$\iint_{(\Sigma)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta+\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}d\eta d\zeta+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}d\zeta d\xi\right] \tag{5}$$

对比，如果由参变方程(3)出发，按类似 **372** 段公式(7)的公式将它变换为寻常二重积分，则恰好得出积分(4)。这两个积分間惟一的差别只可能在“正负”号上。

最后，积分(5)可按奥氏公式变为这个区域(Δ)上的三重积分：

$$D=\pm\iiint_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]\right\}d\xi d\eta d\zeta.$$

被积式等于

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}+\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}+$$
$$+z\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right].$$

前三項之和等于函数行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{vmatrix},$$

这只要将它按最末一行諸元素展开即可看出；方括号中三項之和則可直接算出等于 0[①]。

---

① 显然

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}=\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\partial\xi}-\frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi},$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}=\frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\partial\eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\zeta}-\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\zeta},$$

将三等式两边加起来，即得右边恒等于0。

如此，我們得出公式

$$D=\pm\iiint\limits_{(\Delta)}\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta.$$

因为按假設函数行列式的正負号保持不变，而这正負号就由該行列式带到积分上去，所以(因为这里認为$D>0$)积分号前的正負号应与行列式的一致。这使我們能将所得結果写成这最后的形式：

$$D=\iiint\limits_{(\Delta)}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|d\xi d\eta d\zeta \tag{6}$$

或者为簡单起見将函数行列式写成$J(\xi,\eta,\zeta)$，則

$$D=\iiint\limits_{(\Delta)}|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi d\eta d\zeta. \tag{6*}$$

被积式

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|d\xi d\eta d\zeta=|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi d\eta d\zeta$$

通常叫做曲綫坐标下的体积元素。

如果应用中值定理于公式(6*)，則得关系式

$$D=|J(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta})|\Delta, \tag{7}$$

这里$(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta})$是区域$(\Delta)$內的一个点，而$\Delta$是这个区域的体积。

由此不难推出，在区域(Δ)縮为一点(ξ,η,ζ)时我們将有[参閱 **377** 段 8°]：

$$|J(\xi,\eta,\zeta)|=\lim\frac{D}{\Delta},$$

如此函数行列式的絕对值就是$\xi\eta\zeta$空間（在其已知点上）变换为xyz空間时的延展系数。

附注 公式(6)[或(6*)]是在区域(D)与(Δ)間有相互单值的及連續的对应关系等已知假設之下推出的。但也和在 **354** 段 4°中一样，可以証明这些条件在个别点上或个别綫和面上不成立时該公式仍正确，只要函数行列式保持有界就行了。

384. 几何的推导法 公式(6)也可以依照奥斯脱罗格拉德斯基以純几何的想法来推导[参閱355段]。将 $\xi\eta\zeta$ 空間內度量以$d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ 为边的无穷小长方体与 xyz 空間內包含在坐标面"ξ"与"$\xi+d\xi$"間,"η"与"$\eta+d\eta$"間,"ζ"与"$\zeta+d\zeta$"間的元素立体(它可近似地看作斜平行体)对比。后者的体积就等于一个四面体的体积的六倍,这四面体頂点在:

$$P_1(x,y,z),\ P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi,\ y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi,\ z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta,\ y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta,\ z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta\right),$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta,\ y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta,\right.$$

$$\left.z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta\right),$$

这个体积按解析几何中一个熟悉的公式可表为行列式(論絕对值)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta.$$

将这些各别"体积元素"加起来即得公式(6)。

如此,这里問題的要点仍旧是:在决定一个立体的体积时,将它用坐标面网分成元素,而不是用相互垂直的平面系来分。

在简单的情形"体积元素"的曲綫坐标表出式可以直接得出。

例如在圓柱坐标的情形我們来考虑这样一个元素区域(是在xyz空間內的),它的边界是两个半徑为 ρ 和 $\rho+d\rho$ 的圓柱面,两个在高 z 和 $z+dz$ 处的水平平面,及两个通过 z 軸而与 xz 平面成傾斜角 θ 和 $\theta+d\theta$ 的半平面所圍成的(图 65)。把这区域近似地看作长方体則不难找出其边长为 $d\rho$, $\rho d\theta$ 和 dz,如此其体积等于 $\rho\ d\rho\ d\theta\ dz$ 而表示此体积与空間 $\rho\theta z$ 中小长方体体积

$d\rho\ d\theta\ dz$ 之比的行列式等于 ρ。

同样，在球面坐标的情形我們来考虑（xyz 空間中的）一个元素区域，其边界由半徑为 r 及 $r+dr$ 的球面，圓錐面 φ 和 $\varphi+d\varphi$ 及半平面 θ 和 $\theta+d\theta$ 所組成（图 66），这区域也可当作长方体，其边长为 $AD=dr$, $AB=rd\varphi$ 及 AC。因为弧 AC 等于其射影 MN，而这射影是由半徑 $OM=r\sin\varphi$ 描出且相应于中心角 $d\theta$，于是 $AC=r\sin\varphi d\theta$。因此所考虑的区域的体积等于 $r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$，而函数行列式是 $r^2\sin\varphi$。

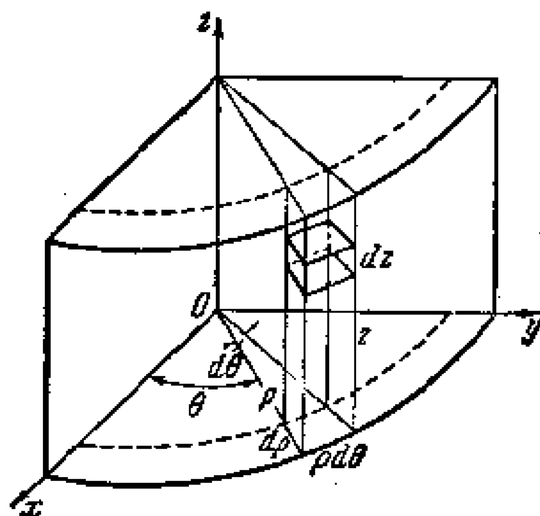


图 65.

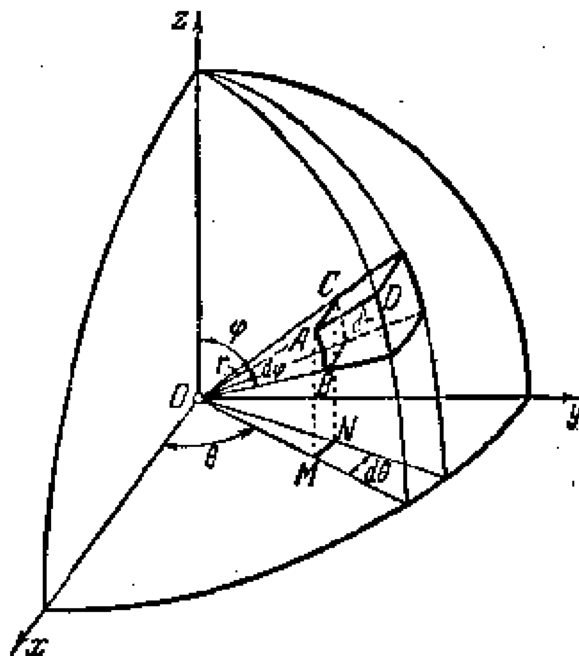


图 66.

这两个由初等几何想法所得出的結果与 382 段 1）和 2）說的一致。

385. 三重积分的变数更换 用体积的曲綫坐标表出式也不难建立三重积分变数更换的一般公式。

設 xyz 与 $\xi\eta\zeta$ 空間的区域（D）与（Δ）之間存在 382 段所說的关系，認为推出公式（6）时的所有条件都已满足，现在我們来証明下列等式：

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\,|J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi d\eta d\zeta, \quad (8)$$

$$\left(\text{这里 } J(\xi,\eta,\zeta)=\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right)$$

它完全与二重积分变数更换公式相似。在此函数 $f(x,y,z)$ 假設是連續的，如此等式(8)中两个积分无疑都存在；只要証明等式本身成立就行了。

証明可以像 356 段中一样进行。用逐片光滑曲面将区域(D)和(Δ)分为(彼此相应的)元素部分(D_i)和(Δ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，应用公式(7)于每一对区域(D_i)，(Δ_i)上；如此得出

$$D_i=|J(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i)|\Delta_i, \tag{9}$$

这里$(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i)$是区域$(\Delta_i)$的某一点，而不是我們任意选擇的。我們取区域$(D_i)$的一个相应点$(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)$，即令

$$\bar{x}_i=x(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i),\quad \bar{y}_i=y(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i),\quad \bar{z}_i=z(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i), \tag{10}$$

并且做出(8)式中第一个积分的积分和：

$$\sigma=\sum_i f(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)D_i.$$

这里将 $\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i$ 代以(10)式，将 D_i 代以(9)式，則得总和

$$\sigma=\sum_i f(x(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i),y(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i),z(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i))|J(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i)|\Delta_i,$$

它显然已成为(8)式中第二个积分的积分和。

令区域(Δ_i)的直徑趋于 0，由于相对应关系的連續性，区域(D_i)的直徑从而也趋于 0。总和σ应該同时趋于两个积分，由此推得所求的等式。

也和二重积分的情形一样，当上述假設在个别点上或有限多的綫或面上不成立时，公式(8)在許多情形还是成立的。

386. 例 1) 計算曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$$

所包圍立体的体积。

解 这立体对称于 yz 和 zx 平面，因为 x 和 y 在方程中只以平方出现。其次，既然方程右边总是正的，故必须 $z\geqslant 0$，即該立体完全落在 xy 平面的上方。因此只要計算其落在第一卦限中的那四分之一的体积就行了。

方程中有 $x^2+y^2+z^2$ 一式提醒我們采用球面坐标。以

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

代入曲面方程得其球面坐标方程如下：

$$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}.$$

因为第一卦限可由不等式

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

来表示，而函数行列式 $J=r^2\sin\varphi$[338 段2)]，故我們有

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{3}\pi a^3.$$

2) 应用圆柱坐标来計算体积时可引出一个有趣的公式。

我們来考虑一个立体 (V)，由逐片光滑曲面所圍成，假設通过 z 軸而相应于 $\theta=$ 常数的半平面截該体于某平面图形 (Q_θ) 而 θ 可由 α 变至 β（图 67)。于是

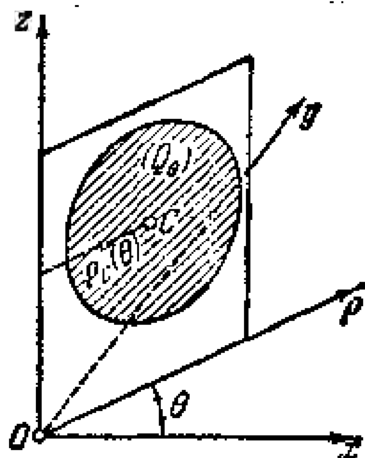


图 67.

$$V=\iiint\limits_{(V)}\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=\int_\alpha^\beta d\theta\iint\limits_{(Q_\theta)}\rho d\rho dz,$$

这里較方便的是对图形 (Q_θ) 采用随上述半平面繞 z 軸迴轉的直角坐标系 ρz①。

于是不难看出，二重积分 $\iint\limits_{(Q_\theta)}\rho d\rho dz$ 即表示图形 (Q_θ) 对 z 軸的靜矩，即等于該图形面积 $Q(\theta)$ 乘以其重心 C 与 z 軸的距离 $\rho_C(\theta)$：

$$\iint\limits_{(Q_\theta)}\rho d\rho dz=Q(\theta)\cdot\rho_C(\theta).$$

以此代入体积表出式即得最后公式：

① 而不是将与它合同的图形联系到 $\rho\theta z$ 空間中的固定平面 ρz 上去。

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}Q(\theta)\cdot\rho_{C}(\theta)d\theta.$$

这公式是 П. П. 庫斯科夫指出的。在决定由（固定的或变形的）平面图形的螺旋运动得出的立体的体积，例如螺絲釘、彈簧等等时，它特别方便。

如果立体(V)干脆是固定图形(Q)的迴轉体，而(Q)是环繞 z 軸迴轉且与此軸不相交的，則此时 $Q=$常数，$\rho_C=$常数，$\alpha=0$, $\beta=2\pi$，而上式成这样形状：

$$V=Q\cdot 2\pi\rho_{C}.$$

它表出了著名的古尔丁定理：平面图形繞图形外軸繞所成迴轉体之体积即等于該图形面积乘以其重心所描出圓周之数。如此，庫斯科夫公式是这个古典定理的自然推广，反过来也不难由它得出。

3）求密度为 ρ 的均匀球对空間中任意一点 A（質量为 1）的引力。

設球的半徑等于 R，而距离 $OA=a$。坐标軸选取得使点 A 落在 z 軸正的部分。于是

$$F_z=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}dxdydz.$$

換为球面坐标得

$$F_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho r^2(r\cos\varphi-a)\sin\varphi dr d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}}.$$

但在决定球壳的引力时［370 段 1)］我們已求得二重积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-a)\sin\varphi d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}}=\begin{cases}0 & \text{在 } a<r \text{ 时},\\ -\dfrac{4\pi}{a^2} & \text{在 } a>r \text{ 时}\end{cases}$$

之值。在 $a>R$ 时

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^R r^2dr=-\frac{4}{3}\pi R^3\rho\frac{1}{a^2},$$

而在 $a<R$ 时

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^a r^2dr=-\frac{4}{3}\pi\rho a.$$

同时显然 $F_x=F_y=0$。所以，在所有情形引力都指向球的中心。

在此球对于一个位于球外的点$(a>R)$的引力就如同全部質量 $m=$

$=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ 都集中于球心时的情形一样。另一方面，因对于一个落在球内部的点($a<R$)引力与 R 无关并且其值就如同 $R=a$ 的情形一样，所以显然外面的球壳对内部的点上不起任何作用。

須指出，在 $a>R$ 时（被吸引点 A 落在球外时）被积函数保持連續而計算不需任何說明。在 $a\leq R$ 时（点 A 落球內或球面上时）情形就两样了，在这情形点 A 邻近积分須理解为非正常的。經变數更換后奇点可消失；这一情况使我們能确定积分的存在并且証明所有計算都是合理的。

387. 史話 三重积分最先出現于1773年拉格朗日的一篇論文里（两年后才发表出来），它基本上講的是引力理論。拉格朗日先決定元素长方体 $dx\,dy\,dz$ 对一点的引力在坐标軸上的射影而然后对它們施行积分法，并且假設积分"展布在立体的所有点上"。这里拉格朗日也給了三重积分的定义，这积分（也如欧拉对二重积分一样，参閱359段）是由累次积分得出的；在此明白指出了三个单积分每个应在什么积分限之下逐一来取。同时拉格朗日将积分看作是和并且有时甚至用記号 Σ 来表示。

有鑒于积分之难（甚至在球的情形），拉格朗日指出，要使它容易一点須利用别的变數，于是他以一般形式提出三重积分中变數更換問題。利用旧变數与新变數微分間的关系：

$$dx=A\,dp+B\,dq+C\,dr,$$
$$dy=D\,dp+E\,dq+F\,dr,$$
$$dz=G\,dp+H\,dq+I\,dr$$

($A, B, C, \cdots$是 p, q, r 的已知函数)，拉格朗日試图直接了当找出以新的体积元素 $dpdqdr$ 表出旧体积元素 $dxdydz$ 的式子而借助不足信的論証导出等式

$$dxdydz=\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} dpdqdr ①,$$

它一般說来并不正确[参閱359段]。我們已經說过，奧斯脫罗格拉德斯基在1838年指出了拉格朗日論証的錯誤；奧氏也以几何方式解釋了那个替代旧"体积元素"，但并不等于它的式子。其詳参閱384段。

① 拉格朗日不用我們通行的行列式記号而是写成展开的形式。

§4. 場論初步

388. 数量与矢量 积分学在数学物理及力学問題上的应用常常以化为矢量形式較为方便。所以讀者熟悉一下矢量分析中某些基本概念是有好处的，利用这些概念可对积分构造及其表出它們之間的关系的积分学公式作出矢量解释。

我們假設讀者已經知道数量概念，它完全可由其数值来表出(例如体积，质量，密度，温度等等)；也知道矢量概念，它要完全决定則还須指出其方向(位移，速度，加速度，力等等)，說到矢量时我們将如慣例以有向綫段来表示。我們約定用上面带箭头的字母 $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \cdots$ 表示矢量；不带箭头的同样字母 $A, r, v, \cdots$ 表示矢量之长：

$$A=|\vec{A}|,\quad r=|\vec{r}|,\quad v=|\vec{v}|,\cdots,$$

而带下标的字母 $A_x, r_y, v_n, \cdots$ 則各表示其在 $x, y, n, \cdots$ 等軸上的射影。矢量 $\vec{A}$ 在坐标軸上的射影 A_x, A_y, A_z 完全决定矢量的长(数值)及方向。

我們也認为讀者已具有矢量代数的基本知識。現在只提一提，所謂矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的数量积是指数量(数)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\vec{A},\vec{B}),$$

它以坐标軸上射影表出时則是

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{1}$$

此后我們一律依据逆时針的迴轉，也就是采取右手坐标系[362 段，附注]。于是矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的矢量积是一长为 $AB\sin(\vec{A},\vec{B})$ 的矢量，它垂直于两相乘矢量，方向則指向这一側，使由 $\vec{A}$ 至 $\vec{B}$ 的迴轉(迴轉角恒取小于 $180°$ 之值)看来是逆时針向的；这个乘积表成 $\vec{A}\times\vec{B}$。矢积在各坐标軸上的射影是

$$A_yB_z-A_zB_y,\quad A_zB_x-A_xB_z,\quad A_xB_y-A_yB_x, \tag{2}$$

这里，我們已說过，是对右手坐标系而言的。

389. 数量場与矢量場 如果对一个空間区域(也可以是全空間)中的每一点 M 都有一个数量或矢量与之对应，我們就說，給定了一个数量場或矢量場。在以下各段中我們所要討論的都是这种場。

数量場可举温度場或电位場为例。如果点 M 的位置以其在某一任意选定的坐标系 $Oxyz$ 中的坐标来决定，則所謂給定了某种数量 U 的場就等于說給定了一个数值函数 $U(x,y,z)$。我們恒假設这个函数对每一变数都有連續偏导函数。如果这些导数不同时等于 0，則方程

$$U(x, y, z)=C \quad (C\text{为常数})$$

决定一个曲面(无奇点)而沿此曲面量 U 保持常数值；这种曲面称为水准面。整个所考虑的区域被这些曲面所充满，而通过其每一点恒有一个且只有一个水准面。显然，水准面彼此都不相交。

矢量場可举力場或速度場为例；这类場我們已碰到过。如果取一組坐标系 $Oxyz$ 为基础，則要給定矢量場 $\vec{A}$，只要給定其在各坐标軸上的射影

$$A_x(x, y, z), \quad A_y(x, y, z), \quad A_z(x, y, z) \tag{3}$$

作为与矢量 $\vec{A}$ 相关的点 M 的坐标的函数就行了。而这些函数我們将假設有連續导函数。在研究矢量場时起重要作用的是矢量綫；所謂矢量綫是指这样一条曲綫而言，它上面每点 M 处的方向都与該点的相应矢量 $\vec{A}$ 的方向一致。如果回忆[212 段]，曲綫切綫的方向余弦就与微分 dx, dy, dz 成比例，則矢量綫的特征可由等式

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$$

表出。在矢量 $\vec{A}$ 不等于 0 的假設之下，依据微分方程組理論中的“存在定理”可以証明，整个所考慮的区域被矢量綫所充满，而通过其中每一点恰恰有一条并且只有一条矢量綫。不同的矢量綫彼此都不相交。

有时須考慮由矢量綫組成的曲面，叫做矢量曲面。矢量曲面的特征是，其中每个点 M 的矢量 $\vec{A}(M)$ 都落在曲面在相应点 M 处的切面上(或者是，在曲面所有的点上矢量 $\vec{A}$ 在曲面的法綫 $\vec{n}$ 上的射影 A_n 都等于 0)。如果在所考慮区域內任意取一条与矢量綫不同的綫，而通过其每点作一矢量綫，則这些綫的几何軌迹就成矢量曲面。如果上述的“准綫”是閉曲綫，則在这情形得出的是管状的矢量曲面，它就叫做矢量管。

390. 沿給定方向的导数。梯度 設給了一个数量場 $U(M)$。在許多問題中我們对这个点函数沿任何指定方向的“变化速度”或其导数感觉兴趣。我們来明确这个概念。在任意有向直綫(或軸) l 上我們取一定点 M_0 及一变点 M(图 68)；M_0M 理解为由 M_0 至 M 这一有向綫段的大小，即其带正負号的长度；M_0M 的方向与 l 軸方向一致时带正号，相反时則带負号。

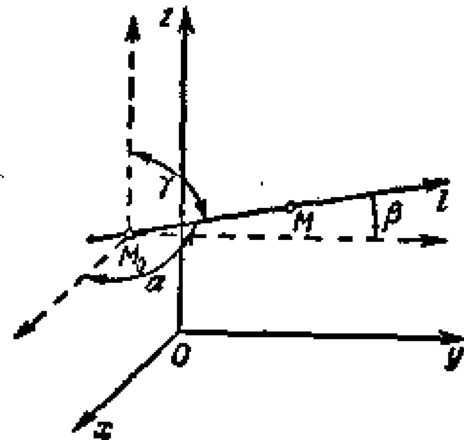


图 68.

設 M 无限地趋近于 M_0。所謂函数 $U(M)$ 在点 M_0 上沿 l 方向的导数就是极限

$$\lim_{M\to M_0}\frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M};$$

用記号

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l} \tag{4}$$

来表示。

这个导数就表示所說函数在点 M_0 沿方向 l 的"变化速度"。

我們取一組坐标系 $Oxyz$ 而假設坐标函数

$$U(M)=U(x, y, z)$$

在所考慮区域中对每一变数都有連續偏导数。于是，如我們所要証明的，导数(4)存在并由公式

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \tag{5}$$

表出。这里所有导数都是在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 上計算的，而 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是軸 l 的方向余弦。如果截取 $M_0M=t$，则变点 M 的坐标为：

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,$$

所求的导数成为 t 的复合函数

$$U(x_0+t\cos\alpha,\quad y_0+t\cos\beta,\quad z_0+t\cos\gamma)$$

在 $t=0$ 时的导数。按复合函数微分法则它的大小恰恰就如公式(5)所表示。

我們来引入一个矢量 $\vec{g}$，其在各坐标軸上的射影是

$$\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}; \tag{6}$$

它叫做 U 的梯度，而用符号

$$\vec{g}=\operatorname{grad}U$$

表示。如果回到公式(5)而以 $\vec{\lambda}$ 表示沿方向 l 的单位矢量则也可将它写成这样：

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad}U\cdot\vec{\lambda}=\operatorname{grad}_l U.$$

由此可看出，这个导数恰好在 l 的方向与梯度的方向一致时达到其最大值，而这最大值等于

$$|\operatorname{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

如此我們可以替代上述利用坐标系給出的梯度的形式的定义而給另一定义如下：所謂数量U的梯度就是一个这样的矢量，它在数值上与方向上都由U的最大变化速度来表征。这里已經完全不提坐标系，由此可見梯度概念事实上与坐标系的选擇无关。

不难看出，梯度的方向与通过該点的水准面$U(x, y, z)=C$的法綫的方向一致。

如此，数量場$U(M)$产生一梯度矢量場$\mathrm{grad}U$。

哈密尔頓①引入一个符号矢量其在坐标軸上的"射影"为

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

他称之为"那卜拉"而以記号∇来表示。利用这种表示法可以写

$$\mathrm{grad}U=\nabla U.$$

事实上，如果上述的"矢量"形式地乘以数量U，就得到一个射影为(6)的矢量！

例 1) 以$\vec{r}$表示連結空間一定点O与一動点M的矢徑$\overrightarrow{OM}$，而以r表其长且令

$$U(M)=\varphi(r),$$

这里φ是一个正数量自变数的数量函数，具有正負号一定的导数。水准面显然是半徑为r，中心为O的球面，如此梯度的方向或与半徑一致或与它正相反，看$\varphi'(r)>0$或<0而定。不难看出，

$$\mathrm{grad}\varphi(r)=\varphi'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

特例

$$\mathrm{grad}\frac{c}{r}=-\frac{c}{r^3}\vec{r}\ (c\text{ 为常数})。$$

如果在点O放一質量m而来考虑牛頓引力場，則其在点M的强度$\vec{F}$为

$$\vec{F}=-\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

因而

$$\vec{F}=\mathrm{grad}\frac{m}{r}.$$

一个已知矢量場能否看作某一数量的梯度場，这是一个很重要的問題，

① W. R. Hamilton(1805—1865)是英国数学家。

其实这問題对我們并不新鮮；下面再讲[393 段]。

2) 我們来考慮一个温度場 U。取一曲面元素(dS)，它带有以一定方式定了向的法綫 n，我們来計算在无穷小段时間 dt 內沿 n 的方向流过这一元素的热量 dQ。热是由物体或介質的較热部分流向較冷部分的，并且温度下降越快，流得也越快。通常认为上面所說的热量元素 dQ 与 dS, dt 及 $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ 成正比例。以 $k>0$ 表比例系数(該处的"热导系数")，則可写

$$dQ=-kdSdt\frac{\partial U}{\partial n};$$

按上面所說在$\frac{\partial U}{\partial n}$为負数时，也即沿 n 方向温度 U 減低时，热量 dQ 为正数。

如果引入所謂热流矢量

$$\vec{q}=-k\operatorname{grad}U,$$

則 dQ 的表出式可写得簡单一点：

$$dQ=dSdtq_n.$$

391. 通过曲面的矢量流量 現在設給了一个矢量場 $\vec{A}(M)$，即給了三个函数(3)。我們取一曲面(S)并选定其一側而以 $\cos\lambda$，$\cos\mu$，$\cos\nu$ 表示相应的有向法綫 n 的方向余弦。于是面积分

$$\iint\limits_{(S)}(A_x\cos\lambda+A_y\cos\mu+A_z\cos\nu)dS$$

称为矢量 $\vec{A}$ 通过曲面(S)向着所指一側的流量。如果同一积分写成

$$\iint\limits_{(S)}A_n dS$$

的形式，則显然可知它是与坐标系选擇法无关的。

現在来看几个例子。

1) "流量"这个名称本身联系着某些流体力学的問題。我們来看流体在空間中的运动；在一般情形我們不假設它是穩定的，如此运动的速度不仅与其相应点 M 的位置有关，并且也与时間 t 有关。我們要来計算在无穷小段时間 dt 內流体通过曲面(S)流向定側的量。通过曲面元素(dS)所流过的流体量本身充滿一以dS为底 $v_n dt$ 为高的柱形(图 69)，这里法綫 n 假設即指向所选一側①。如果以 ρ 表示流体密度——它也可与点的位置及时間有关——則流过 dS 的流体質量为

① 参閱 239 頁底注。

$$\rho dSv_n dt.$$

对全曲面（S）則得

$$dt\iint_{(S)}\rho v_n dS$$

单位时間內流体量 Q 可表为积分

$$Q=\iint_{(S)}\rho v_n dS; \qquad (7)$$

讀者当可認出这就是矢量 $\rho\vec{v}$ 通过曲面（S）的“流量”；

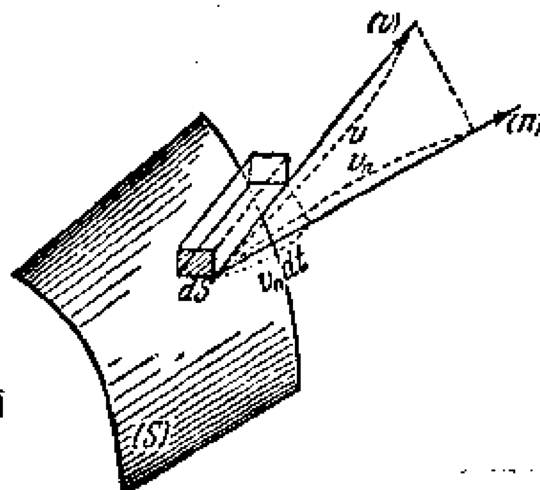


图 69.

附注 因为我們不假設流体的运动是穩定的，所以事实上 Q 本身一般說来是与时間有关的并且不妨更精确地叫做在所考慮时刻流体流过（S）的量的增长速度。

同样的話也适用于“单位时間內流过（S）的热量”（参閱下例）：所有这些量有速度的性质。

2）同样也可以来談热的流量。容易看出，［在 390 段 2)的表示法之下］时間 dt 內流过曲面（S）的热量等于

$$dt\iint_{(S)}q_n dS.$$

如果將流过的热量化为单位时間，則得

$$\iint_{(S)}q_n dS,$$

即矢量 $\vec{q}$ 通过曲面（S）的“流量”。由此矢量

$$\vec{q}=-k\,\mathrm{grad}U$$

也就有“热流量矢量”之称。

392. 奧斯脫罗格拉德斯基公式。发散量 回到矢量場 $\vec{A}$ 的一般情形，我們来看一个由閉曲面（S）所包圍的立体（V）；以 n 表示曲面外法綫。于是按奧氏公式［380 段(5)］如果令其中 $P=A_x, Q=A_y, R=A_z$，則矢量 $\vec{A}$ 通过曲面（S）向外的流量可表为三重积分

$$\iint_{(S)}A_n dS=\iint_{(S)}(A_x\cos\lambda+A_y\cos\mu+A_z\cos\nu)dS=$$

$$=\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV.$$

三重积分号下的式子叫做矢量 $\vec{A}$ 的发散量并表成

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{8}$$

如此，奥氏公式可写成

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS=\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{A}dV, \tag{9}$$

这是常用的形式。

刚才引入的发散量是一数量；但它的定义形式上与坐标轴的选擇有关，为了免除这个缺点，我們采取如下办法。用任一表面为(S)的立体(V)将点M圍起来而写出公式(9)；如果两边除以体积V并将立体(V)縮为一点M而取极限，则[377 段，80]右边恰得出点M上的 $\operatorname{div}\vec{A}$。如此，

$$\operatorname{div}\vec{A}=\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(S)} A_n dS}{V}; \tag{10}$$

这个等式也可作发散量定义，而定义的这一形式已与坐标系选擇法无关了。

这回矢量場 $\vec{A}$ 产生一个数量場 $\operatorname{div}\vec{A}$。

发散量定义(8)也可用哈密尔頓符号矢量 ∇ 写成这样：

$$\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A};$$

这只要回忆两矢量的数量积分式(1)就可明白。

例　我們来研一研不可压縮流体$(\rho=1)$在存在泉源或漏洞时的运动。流体在单位时間內流过(S)的量，即速度矢量 $\vec{v}$ 的流量

$$\iint\limits_{(S)} v_n dS$$

[参閱 391 段，1)]叫做包含在閉曲面(S)內的泉源发生率。如果泉源在所考慮的区域內連續地分布，則可引入泉源密度概念。这指的是按单位体积計算的包圍在点M的立体(V)內泉源发生率的极限值，即

$$\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(S)} v_n dS}{V}.$$

但是，如我們刚才所看到的[参閱(10)]，这个极限就等于 $\operatorname{div}\vec{v}$；如此，$\operatorname{div}\vec{v}$ 就是泉源密度。

对于有热源的热流量也可作同样的考察，只是速度矢量要换成热流量矢量。

如果 $\operatorname{div}\vec{A}=0$，則这种場叫做管形的，出于希腊文 σολέν(即管子)。假設

場在空間中所占的是单連通(依空間的)区域，則这个条件就等于要矢量 $\vec{A}$ 通过任意而包圍一个立体的閉曲面向外的流量須等于 0:

$$\iint_{(S)} A_n dS = 0$$

[381 段，(B)]。現在我們来考察一段介于其两个任意断面(S_1)与(S_2)間的矢量管(图 70)；以(S_3)表管本身的表面。于是按上述有

$$\left\{\iint_{(S_1)} + \iint_{(S_2)} + \iint_{(S_3)}\right\} A_n dS = 0,$$

而在所有情形法綫都是向外的；显然沿曲面(S_3)，$A_n = 0$[389 段]；如在断面(S_1)处改变法綫方向使与(S_2)处法綫方向一致，則得等式

$$\iint_{(S_1)} A_n dS = \iint_{(S_2)} A_n dS.$$

如此我們得管形場的一个奇妙性質：管形矢量通过一矢量管的各横断面的流量恒保持一常数值，此常数值称为矢量管的强度。

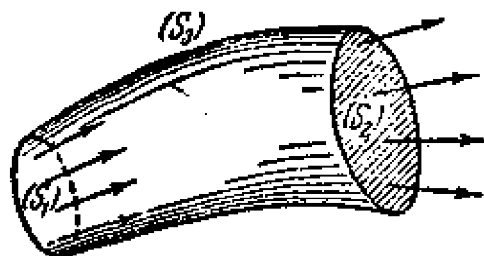


图 70.

如回到上面所引矢量場的流体力学的解釋，則在流体不可压縮且无泉源($\text{div}\vec{v} = 0$)的情形，流体通过一矢量管横断面的量对所有各断面都有同一数值。

393. 矢量的循环量。斯托克斯公式。旋轉量 設又給定任一矢量場 $\vec{A}(M)$。沿所考察区域內某一曲綫(l)所取的积分

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl$$

叫做矢量 $\vec{A}$ 沿曲綫(l)的綫性积分。在閉曲綫的情形这个积分就叫做矢量 $\vec{A}$ 沿(l)的循环量。

如果場 $\vec{A}$ 是一个力場，則綫性积分就表示一点沿曲綫(l)移动时場中力所作之功[和平面的情形一样参閱 335 段，1)]。

設想某一由閉路綫(l)所圍的曲面(S)。于是按讀者已經知道的斯托克斯公式[373 段(11)]矢量 $\vec{A}$ 沿这路綫的循环量可以表为面积分

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\mu + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\nu\right\} dS.$$

在坐标軸上的射影为

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{11}$$

的矢量叫做矢量 $\vec{A}$ 的旋轉量，并表成

$$\mathrm{rot}\vec{A}①.$$

如此，斯托克斯公式可用矢量的形式写成这样：

$$\int_{l} A_l dl=\iint_{(S)}\mathrm{rot}_n\vec{A}dS. \tag{12}$$

矢量沿一閉路綫的循环量就等于旋轉量通过这閉路綫所圍曲面的流量。在此閉路綫的环行方向与曲面之側須如 362 段所說那样彼此相应。

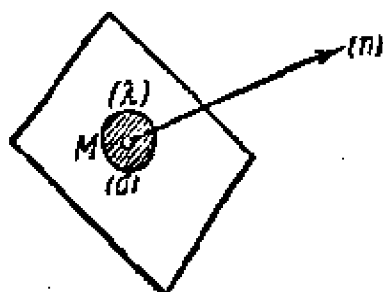


图 71.

上面所給旋轉量概念的定义有这通常的缺点：其中用到了坐标系。取任一由已知点 M 出发的方向 n 而在与 n 垂直的平面上用一块具有边界 (λ) 小面积 (σ) 将点 M 圈起来（图 71），于是按斯托克斯公式有

$$\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda=\iint_{(\sigma)}\mathrm{rot}_n\vec{A}d\sigma;$$

等式两边除以上述小块面积 σ 而将后者縮为所給的点，則在极限情形得

$$\mathrm{rot}_n\vec{A}=\lim_{(\sigma)\to M}\frac{\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda②}{\sigma}.$$

如此确定了 $\mathrm{rot}\vec{A}$ 在任何軸上的射影，这就是說，也可确定該矢量本身而无須涉及預先选取的坐标系。

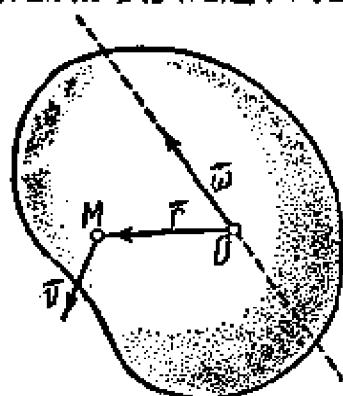


图 72.

要注意，这里矢量場 $\vec{A}$ 产生了一个旋轉的矢量場 $\mathrm{rot}\vec{A}$.

用哈密尔頓矢量 ∇ 也可将旋轉量定义簡写成：

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$$

［参閱矢量积射影表出式(2)］。

例 我們来看某剛体繞一定点 O 的任意运动（图 72）。运动学中証明过，在任何时刻剛体的

① 出于英文 rotation 一字，即“旋轉”之意；也常用 $\mathrm{curl}\vec{A}$ 这个記号，出于英文 curl，是“捲”的意思。

② 不难在此看出一种特殊的依区域的微分法；让讀者去論証。

点的速度 $\vec{v}$ 的場可由公式

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

来确定，这里 ω 是瞬时“角速度”，而 $\vec{r}$ 是連結点 O 与剛体任一点 M 的矢徑。这个矢量在任意坐标系 $Oxyz$ 的各軸上的射影是[参閱(2)]

$$\omega_y z-\omega_z y,\quad \omega_z x-\omega_x z,\quad \omega_x y-\omega_y x.$$

如果利用(11)式算出此場的旋轉量的射影，則得 $2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$，所以

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}.$$

如此，除去一数因子以外速度場 $\vec{v}$ 的旋轉量恰恰給出旋轉的角速度；这是“旋轉量”命名之由来。

現在我們回到这个問題：在什么条件下所給的矢量場 $\vec{A}$ 乃成为某数量 U 的梯度場：

$$\vec{A}=\mathrm{grad}U. \tag{13}$$

这个等式就等价于下列三式：

$$A_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad A_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad A_z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

也就等于說：

$$A_x dx+A_y dy+A_z dz$$

一式是函数 $U(x, y, z)$ 的全微分。在等式(13)成立时，場 $\vec{A}$ 就叫做位勢場，而原函数 U 叫做該場的位勢函数。

如果限定所考慮的区域是(依曲面)单連通的，則只要依照我們已知的事实[374 段，参閱条件(6)]就可以說，要 $\vec{A}$ 成位勢場的必要而充分的条件是在全区域中成立等式

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}=\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

也就是要 $\mathrm{rot}\vec{A}$ 等于 O。位勢場概念就成为与“无旋轉”的場的概念一致了，在这种場里沿閉路綫的循环量为 O；如果沿連結任意两点的曲綫取綫性积分，則它的值与曲綫形式无关。

所有这些事实在位勢力場的情形可以用“功”的語言得到自然的解釋。例如，我們知道，不論是引力集中于个别中心时或吸引质量連續分布时牛頓引力場就是这样的。

§5. 多重积分

394. m 維体的体积与 m 重积分 由于分析及其应用的需要，所研究过的那几种定积分——单积分，二重积分，三重积分——已經不够了。

在給单积分、二重积分、三重积分下定义时，我們用到了綫段长，平面形面积，空間立体体积等概念。同样，m 重积分的定义要依据 m 維区域的体积①，对于最簡单的 m 維区域——m 維长方体

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_m, b_m], \tag{1}$$

所謂体积是指它的边长

$$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdot\cdots\cdot(b_m-a_m)$$

之乘积而言。显而易見，由有限个这种长方体所組成的立体其体积应如何了解。可用初等方法証明，体积与将它怎样分为长方体的分法无关。

一个 m 維体 (V) 的体积 V 可如通常方式由考虑这种內接及外接"长方体"而建立起来[参閱197段]。我們将只考虑体积存在的体；对于由光滑或逐段光滑曲面②圍成之体必定是有体积的，例如，这几种最簡单的 m 維区域：m 維单純形

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_m\geqslant 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_m\leqslant h$$

及 m 維球

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2\leqslant r^2;$$

下面我們要来計算其体积。

設在区域 (V) 中給了一个 m 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$；于是，将这区域分成許多元素部分并重复其他我們用慣的运算[参閱376段]可得出 m 重积分

$$I=\overbrace{\int\cdots\int_{(V)}}^{m} f(x_1, x_2, \cdots, x_m)\,dx_1dx_2\cdots dx_m \tag{2}$$

的概念。

在被积函数連續的情形这积分必定存在。

---

① 我們决定保留这个名称，其意义当然是随 m 值而不同；我們指的是"m 維的"体积。

② 这里所謂光滑曲面乃 m 維空間中用 m 个 $m-1$ 元参变方程所确定的形象，而方程中所出現的参变函数应連同其偏导数都連續，且导数矩陣中的 $m-1$ 阶行列式要不同时等于0。

这种积分可逐步化归低重积分直到单积分来計算。在积分区域(V)是长方体(1)的情形,有一个类似378段公式(6)的公式:

$$I=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_m}^{b_m}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_m. \tag{3}$$

对于由不等式

$$x_1^0\leqslant x_1\leqslant X_1,\ x_2^0(x_1)\leqslant x_2\leqslant X_2(x_1),\ \cdots,$$
$$x_m^0(x_1,\cdots,x_{m-1})\leqslant x_m\leqslant X_m(x_1,\cdots,x_{m-1})$$

表示的更一般形式的区域可应用一个类似378段公式(6a)的公式:

$$I=\int_{x_1^0}^{X_1}dx_1\int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)}dx_2\cdots\int_{x_m^0(x_1,\cdots,x_{m-1})}^{X_m(x_1,\cdots,x_{m-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_m. \tag{4}$$

同样,也成立其他与378段公式(5a)及(及7a)相类似的公式(对于各种相应形式的区域——这些形式不难各别确定),利用这些公式m重积分可逐步化归低重积分来計算(重数合起来是m)。

所有这些都可象$m=2$或$m=3$的情形一样来証明,用不到什么新的道理,因此不必在此多說了。

附注 奥斯脱罗格拉德斯基在1834年的論文中最先仔細地定出多重积分所化归的积分中各个变数$x_1,\cdots,x_m$的积分限,这里多重积分是展布在所有滿足不等式$L(x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant 0$的变数值上的。这里我們也可找到一个我們已經知道的奥氏公式[380段,(4)]的推广,——推广到任意多个变数的情形而把沿$m-1$維閉曲面的积分与某一展布在該面所包圍之体上的m重积分連系起来。

395. 例 1) 求m維单純形

$$(T_m):\ x_1\geqslant 0,\ \cdots,x_m\geqslant 0,\ x_1+\cdots+x_m\leqslant h.$$

的体积T_m.

解 我們有

$$T_m=\overbrace{\int\cdots\int_{(T_m)}}^{m}dx_1dx_2\cdots dx_m=\int_0^h dx_1\int_0^{h-x_1}dx_2\cdots\int_0^{h-x_1-\cdots-x_{m-1}}dx_m.$$

在这些单积分中按公式

$$x_1=h\xi_1,\quad x_2=h\xi_2,\ \cdots,x_m=h\xi_m,$$

逐步更換变数就可得出下列結果:

$$T_m=h^m\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1}d\xi_2\cdots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{m-1}}d\xi_m=$$

$$=h^m\overbrace{\int\cdots\int}^{m}_{\substack{\xi_1\geqslant0,\cdots,\xi_m\geqslant0\\ \xi_1+\cdots+\xi_m\leqslant1}}d\xi_1\cdots d\xi_m=\alpha_m h^m,$$

这里 α_m 表示本积分相应于 $h=1$ 时之值。

另一方面,我們有(順便利用所得結果)

$$\alpha_m=\int_0^1 d\xi_m\overbrace{\int\cdots\int}^{m-1}_{\substack{\xi_1\geqslant0,\cdots,\xi_{m-1}\geqslant0\\ \xi_1+\cdots+\xi_{m-1}\leqslant1-\xi_m}}d\xi_1\cdots d\xi_{m-1}=\alpha_{m-1}\int_0^1(1-\xi_m)^{m-1}d\xi_m=\frac{\alpha_{m-1}}{m}.$$

所得遞推关系式(考慮到 $\alpha_1=1$)給我們

$$\alpha_m=\frac{1}{m!},$$

如此終于有

$$T_m=\frac{h^m}{m!}.$$

2) 求下列 m 維球[126 段]的体积:

$$(V_m):\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2\leqslant R^2.$$

解 这回是要計算积分

$$V_m=\overbrace{\int\cdots\int}^{m}_{x_1^2+\cdots+x_m^2\leqslant R^2}dx_1dx_2\cdots dx_m.$$

令

$$x_1=R\xi_1,\quad x_2=R\xi_2,\quad\cdots,x_m=R\xi_m,$$

和剛才一样容易得出 $V_m=\beta_m R^m$, 这里系数 β_m 表示半徑为1的 m 維球的体积。

要决定 β_m 我們进行这样的变换:

$$\beta_m=\overbrace{\int\cdots\int}^{m}_{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_m^2\leqslant1}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_m=$$

$$=\int_{-1}^{1}d\xi_m\overbrace{\int\cdots\int}^{m-1}_{\xi_1^2+\cdots+\xi_{m-1}^2\leqslant 1-\xi_m^2}d\xi_1\cdots d\xi_{m-1}.$$

內层积分就是半徑为$\sqrt{1-\xi_m^2}$的 $m-1$ 維球的体积，所以等于 $\beta_{m-1}(1-\xi_m^2)^{\frac{m-1}{2}}$。代入后我們又得一遞推关系式

$$\beta_m=2\beta_{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta d\theta$$

或[參閱 312 段，2)]

$$\beta_m=\beta_{m-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}.$$

因为 $\beta_1=2$，所以容易算出

$$\beta_m=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}.$$

所求体积等于

$$V_m=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}R^m.$$

对 m 为偶数及奇数的情形各得公式

$$V_{2n}=\frac{\pi^n}{n!}R^{2n},\quad V_{2n+1}=\frac{2(2\pi)^n}{(2n+1)!!}R^{2n+1}.$$

特别，对 V_1, V_2, V_3 我們自然得出很熟悉的値 $2R,\ \pi R^2,\ \frac{4}{3}\pi R^3$.

第二十四章　傅立叶級数

§1. 导　言

396. 周期量与調和分析　在科学与技术中我們常要牵涉到周期现象，即經过一段固定的时間T(所謂"周期")后仍恢复其原先状态的现象。例如，蒸汽机的稳定运动就是如此，它經一个整轉后仍經历其原来的位置；此外如交流电现象等等也是其例。周期现象中各种有关数量，經历周期T后仍恢复其原先的数值，因此是时間t的周期函数，可由等式

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)$$

来表征。例如，交流电的强度与电压就是这样的量。又如，在蒸汽机的例子中，十字头的行程，其速度与加速度，蒸汽压力，以及在曲柄銷的切綫力等也都是这样的量。

最簡单的周期函数(如不算常数)是正弦型量：$A\sin(\omega t+\alpha)$，这里ω是頻率，它与周期T的关系是

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

由这类簡单周期函数可以組成比較复杂的周期函数。显然，用来組成复杂函数的正弦型量应該有不同的頻率，因为，容易明白，同頻率的正弦型量相加仍成同頻率的正弦型量，得不出新的东西。反之，如果将一些像

$$\left.\begin{aligned}y_0=A_0,\ y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\ y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2),\\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3),\ \cdots\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这样的量加起来(这些量除常数A_0外各有頻率

$$\omega,2\omega,3\omega,\cdots$$

——均为其中最小一个ω的倍数——并且有周期

$$T,\ \frac{1}{2}T,\ \ \frac{1}{3}T,\cdots)$$

就可得出一个新的周期函数(其周期为T),而与(2)型的量本質上不相同了。

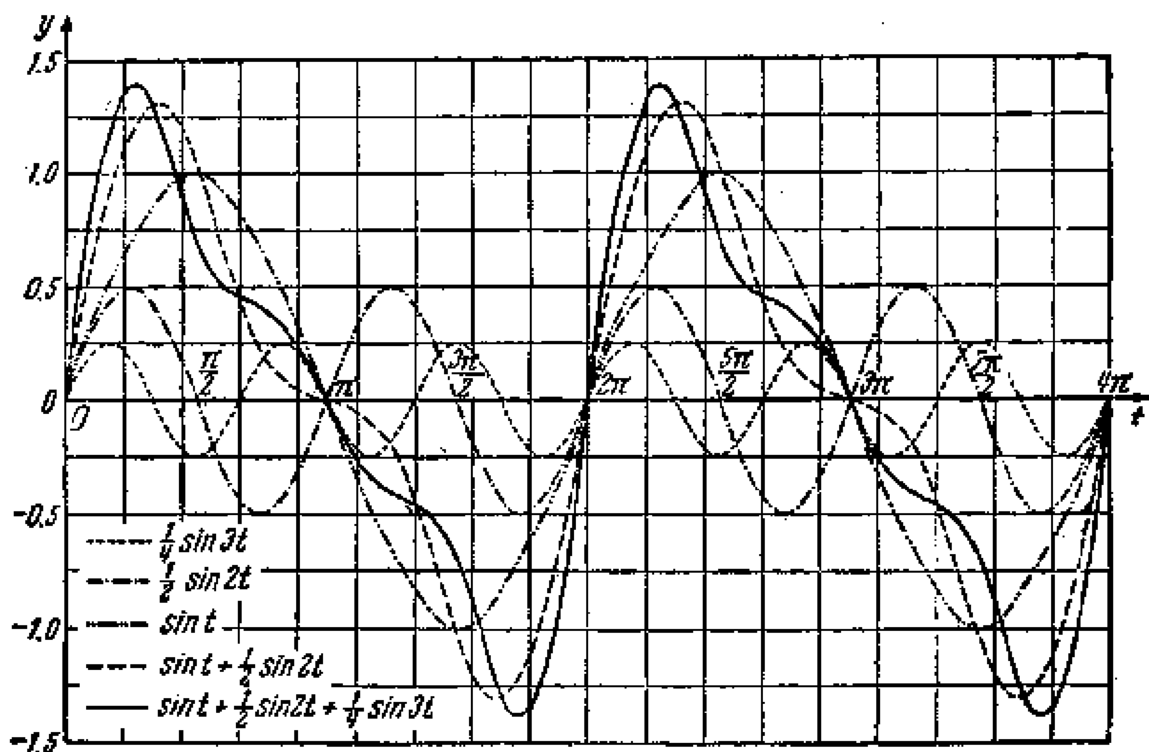


图 73.

例如我們在图 73 做出三个正弦型量之和:

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 3t;$$

这个函数的图象的性質已与正弦型綫显著不同。对于(2)型量所組成的无穷級数之和則差别更为显著了。

現在我們自然可提出反面的問題: 給了一个周期为T的函数$\varphi(t)$,能否将它表为有限个甚或无限个(2)型正弦型量之和? 下面可以知道,对很广大的一类函数这問題的答案是肯定的,但要用到(2)型量的整个无穷序列。对这类函数成立"三角級数"展开式:

$$\varphi(t)=A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+$$

$$+A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)+\cdots=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n),\tag{3}$$

其中 $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \cdots$是常数，对每一个这种函数有其特殊的值，而频率$\omega$則由公式(1)給出。

在几何上这就是說，周期函数的图象可由一系列正弦型曲綫迭加而得。如果将每一正弦型量理解为表示力学上的調和振动，則也可以說，这里由函数$\varphi(t)$表示的复杂振动可以分解为各别的調和振动。因此組成展开式(3)的各正弦型量叫做函数$\varphi(t)$的調和分量或簡称調和素(第一調和素，第二調和素等等)。分解周期函数为調和素的手續称为調和分析。

如果取

$$x=\omega t=\frac{2\pi t}{T}$$

作自变数，則得一x的函数:

$$f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

它也是周期性的，但具有标准周期2π，展开式(3)則成这样的形状:

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\alpha_1)+A_2\sin(2x+\alpha_2)+$$

$$+A_3\sin(3x+\alpha_3)+\cdots=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n).\tag{4}$$

用二角和的正弦公式将此級数各項展开，并令

$$A_0=a_0, A_n\sin\alpha_n=a_n, A_n\cos\alpha_n=b_n(n=1,2,3,\cdots),$$

則得三角展开式的最后形式如下:

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$

$$+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\cdots=$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{5}$$

这个形式的展开式就是我們今后所要研究的[1]。这里周期为 2π 的角 x 的函数終于表成为 x 的倍角的余弦及正弦展开式。

上面我們是由周期性振动现象及其相关的量出发而得出函数的三角級数展开式的。但要注意，这种展开式現在也常常用来研究只是在某有限区間上給出，而完全与振动現象不相干的函数。

397. 决定系数的欧拉-傅立叶方法 为了确定一个周期为 2π 的已知函数 $f(x)$ 是否能有三角展开式 (5) 要由确定的一組系数 $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ 出发。我們来指出一种决定这些系数的方法，它在十八世紀后半为欧拉用过，十九世紀初傅立叶也独立地使用过。

我們今后将假設函数 $f(x)$ 是在区間 $[-\pi, \pi]$ 內連續或逐段連續的[2]。

我們假設展开式(5)成立而将它由 $-\pi$ 至 π 逐項积分，如此得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right].$$

但，不难看出

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx &= \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\\ \text{及}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx &= -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

---

[1] 由这展开式必要时当然不难反过来化为(4)型展开式。

[2] 所謂函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 內逐段連續是指：它在該区間中除有限个点外都連續，在这些点上則有跳跃。如此，区間 $[a, b]$ 可分为有限部分，每部分中函数 $f(x)$ 均处处連續——如以极限值代函数值时甚至在端点上也成連續。可以把逐段連續函数看作是由一些連續函数"粘連"起来的，只是在"銜接点"上(以及区間两端)函数值要特别予以規定。

所以总和号下的各项都等于 0 而最后得出

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \tag{7}$$

要决定系数 a_m 之值我們假設等式(5)恒成立，将它两边乘以 $\cos mx$ 而在同区間內逐项积分起来：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx\right].$$

右边第一項由(6)知其等于 0。其次在 $m\neq n$ 时我們有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]dx=0, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]dx=0, \tag{9}$$

并且还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\pi. \tag{10}$$

如此，总和号下的各积分全都化为 0，只有以 a_m 为系数的那个积分是例外。由此这一系数就可定出：

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx(m=1,2,3,\cdots). \tag{11}$$

同样，預先将展开式(5)乘以 $\sin mx$，然后逐項积分起来，就定出正弦前面的系数：

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx(m=1,2,3,\cdots). \tag{12}$$

这里除(6)和(8)外我們还用到了这两个容易驗証的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \quad (n \neq m) \tag{13}$$

及

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi. \tag{14}$$

公式(7), (11)及(12)称为欧拉-傅立叶公式; 用这些公式所算出的系数叫做所給函数的傅立叶系数, 由此組成的三角級数(5)則称为傅立叶級数。本章中专講这种級数。

現在我們对上述論証予以邏輯的評价。旣然"三角展开式(5)成立"这个出发点是假設的, 那末事实上究竟是否如此, 自然还成問題。即便假設它真的成立, 我們按照欧拉和傅立叶的方法定出了展开式(5)的系数, 所持理由是否可信呢? 我們一再采用了級数的逐項积分法, 而这方法并非到处可用的[269 段]。它的充分条件是要級数均匀收斂。所以, 能認为已严格建立的只是:

如果函数 $f(x)$ 能展为均匀收斂級数(5)[1], 則它一定是 $f(x)$ 傅立叶級数。

如果不預先假設均匀收斂性, 則我們的論証甚至不足証明函数只能展为傅氏級数。那末这些驗証究有怎样的意义呢? 只能将它們看作一种綫索, 足以使我們知道在寻求所給函数的三角展开式时可以由其傅氏級数开始, 而必須(完全严格地)确定在什么条件下它收斂并且就收斂于所給的函数。

在未做到这一步以前我們只能形式地看待所給函数 $f(x)$ 的傅氏級数, 但对它不能肯定什么, 只能說它是由函数$f(x)$"产生"的而已。

---

[1] 均匀收斂性在級数各項一律乘以有界函数 $\cos mx$, $\sin mx$ 后仍保持不变。

它与函数 f 的这一关系，通常可这样表示：

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5a}$$

而避免采用等号。

398. 直交函数系 上段講的是一种典型的論証法，在数学分析中研究許多展开式时常常要用到。

两个在区間 $[a, b]$ 內有定义的函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$，如果其乘积有等于 0 的积分：

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0,$$

則称为在該区間內直交的。

設有一函数系 $\{\varphi_n(x)\}$，每个函数在区間 $[a, b]$ 內有定义并且連續或至少逐段連續。如果該系中函数两两直交：

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \tag{15}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \cdots; n \neq m)$$

則称之为一直交函数系(或函数直交系)。在此我們恒假設

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_n > 0. \tag{16}$$

在滿足 $\lambda_n = 1 (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的条件时該系称为正規的。如果不滿足这样的条件，則需要时可将它变为函数系 $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$，这就显然成为正規的了。

上面所考虑的在区間 $[-\pi, \pi]$ 內的三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{17}$$

正是直交函数系的一个最重要的例子；它的直交性可由(6)，(8)，

(9)及(13)等关系推知。但由(10)和(14)看来它不是正规的。乘以适当倍数后則不难将它化为正规的:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots. \qquad (17^*)$$

設在区間$[a,b]$內給了任一直交系$\{\varphi_n(x)\}$.
我們要来将定义在$[a,b]$内的函数展为下列形式的“函数φ的級数”:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots \qquad (18)$$

要决定这展开式的系数,我們先假設这样展开是可能的,然后仿照上面那个特例的手續进行。即将展开式两边乘以$\varphi_m(x)$,再逐項积分起来:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx.$$

由直交性[参閱(15)和(16)],右边所有积分除一个外全化为0,于是不难得出:

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx\,(m=0,1,2,\cdots) \qquad (19)$$

[公式(7),(11),(12)是这公式的特例]。

如果一个級数(18)的系数由公式(19)所定,則它称为所給函数的(广义)傅立叶級数,而其系数称为对函数系$\{\varphi_n(x)\}$的(广义)傅立叶系数。在正規函数系的情形公式(19)特别簡单;此时

$$c_m=\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx. \qquad (19a)$$

当然,这里仍可重复上段末尾所說的話。对所給函数$f(x)$做出的广义傅立叶級数只是形式上与該函数发生关系。在一般情形函数$f(x)$与其(广义)傅立叶級数之間的这种关系可表示为:

$$f(x)\sim\sum_{0}^{\infty}c_n\varphi_n(x).\qquad(18a)$$

也和三角級数的情形一样，这級数对函数$f(x)$的收斂性尙待研究。

§2. 函数的傅立叶級数展开式

399. 問題的提出。狄里希萊积分 設 $f(x)$是連續函数或逐段連續函数，其周期为 2π。我們算出下列常数(它的傅立叶系数)：

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos mu\,du,\ b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin mu\,du\qquad(1)$$

$$(m=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad(m=1,2,3,\cdots)$$

幷用来組成該函数的傅立叶級数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx).\qquad(2)$$

讀者可注意到这里的表示法与 **397** 段里稍有不同：系数 a_0 我們現在是按 a_m 的一般公式取 $m=0$ 定出的，和上段公式(7)不一样；同时常数項則写成$\frac{a_0}{2}$的形状。

附注 如果函数 $F(u)$是在任何有限区間內逐段連續的，幷且有周期 2π，如此

$$F(u+2\pi)=F(u),$$

則沿长2π的区間的积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}F(u)du$$

的值与 α 无关。

事实上，限于連續函数 F 的情形时我們有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}F(u)du=\int_{\alpha}^{0}F(u)du+\int_{0}^{2\pi}F(u)du+\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi}F(u)du.$$

如果在最后一个积分里作置换 $u=2\pi+t$，则它化为积分

$$\int_0^{\alpha} F(t+2\pi)\,dt=\int_0^{\alpha} F(t)\,dt,$$

因而只是正负号与第一个积分不同。如此，所考虑的积分終于等于积分

$$\int_0^{2\pi} F(u)\,du,$$

它已經不含 α 了。不难将这結果推广到任意逐段連續函数的情形。

这話我們以后要用到。特别是，在决定傅立叶系数的公式(1)中积分可以沿任何长 2π 的区間来取；例如，可以写

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad \text{(1a)}$$

$$(m=0,1,2,\cdots) \qquad\qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

等等。

要研究級数 (2) 在任何定点 $x=x_0$ 的性状我們做出其部分和

$$s_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0)$$

的方便的表出式。将 a_m 及 b_m 换成其积分式(1)，将常数 $\cos mx_0$，$\sin mx_0$ 移到积分号下：

$$s_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos mu\cos mx_0+\sin mu\sin mx_0]\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x_0)\right\}du.$$

不难驗証恒等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left[\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\right\}=$$

$$=\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

用它来变换积分号下的式子，終于得出

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}du. \tag{3}$$

这个积分通常称为狄里希莱积分(虽然傅立叶早已接触到它!)

因为我們在此所处理的 u 的函数周期为 2π，所以按前面說过的話积分区間可換成任何同样长的区間，例如 $[x_0-\pi, x_0+\pi]$:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}du.$$

用置換 $t=u-x_0$ 将此积分变成:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

然后将此积分拆成两个: $\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}$，并将第二个积分改变其变数的正

負号而化归同一区間$[0, \pi]$；于是得到傅立叶級数部分和的最后表出式如下：

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \tag{4}$$

如此，問題就化为研究这个含参变数 n 的积分的性狀了。現在討論的問題的特点是：在这情形不能应用积分号下取极限的办法[①]，而这却是至今我們对含参变数积分求极限时所用过的惟一的方法(参閱第十八章)。这种情况在本章我們要系統地加以研究。

400. 基本預备定理 在継續我們的研究之前，先来証明下面这一对以后論証很重要的黎曼定理：

如果函数 $g(t)$ 在某有限区間$[a, b]$內連續或逐段連續，則

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=0$$

并且同样

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,dt=0.$$

証明 我們只要假設函数 $g(t)$ 連續而証明第一个极限就够了。

預先注意，无論是怎样的有限区間 $[\alpha, \beta]$，我們总有这样的估計：

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\,dt\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}. \tag{5}$$

我們用一些点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=b \tag{6}$$

---

① 在这情形积分号下表式当 $n\to\infty$ 时完全沒有极限。

将区間分为 n 部分，并且相应地将积分也分成 n 个:

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,dt.$$

以 m_i 表示 $g(t)$在第 i 小区間中的最小值，于是可将此式变成

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin pt\,dt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt\,dt.$$

如果 ω_i 是函数 $g(t)$在第 i 个小区間内的摆幅，則在該区間内 $g(t)-m_i\leqslant\omega_i$; 由不等式(5)現在不难給这个积分得出如下的估計:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|。$$

給定了任意一数 $\varepsilon>0$ 我們先选擇一种分法(6)，使 $\omega_i<$ $<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2};$$

这是可以做到的，因为函数 g 是連續的。現在，因为 m_i 已由此定出，所以可以取

$$p>\frac{4}{\varepsilon}\sum|m_i|$$

而对这些 p 值得出

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right|<\varepsilon,$$

如此就証明了本定理。

請讀者注意，这里已經定出了积分所趋的极限而**没有用到积分号下的极限过程**。

如果記得表出傅立叶級数的公式(1)，則可由此得出下面第一个直接的推論：

逐段連續函数的傅立叶系数 a_m, b_m 在 $m\to\infty$ 时趋于 0。

401. 局部化原理 上段証明的預备定理的第二个直接推論是所謂"局部化原理"。

取任意一正数 $\delta<\pi$，将(4)式中积分拆成两个：

$$\int_0^\pi=\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\text{. 如果第二个写成}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

則显然正弦前的乘数

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

是区間$[\delta,\pi]$内 t 的逐段連續函数，因为分子上的 t 的函数是这样的函数，同时分母 $2\sin\frac{1}{2}t$ 在这区間内不等于 0，且保持連續。按預备定理这个积分当 $n\to\infty$ 时趋于 0，如此傅立叶級数部分和 $s_n(x_0)$ 的极限的存在以及此极限的値都可以只由下列积分完全确定：

$$\rho_n(\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \qquad (7)$$

但这个积分只包含函数 $f(x)$ 相应于自变数由 $x_0-\delta$ 变至 $x_0+\delta$ 的那些値。这簡单論証就証明了下面的"局部化原理"：

定理 函数 $f(x)$ 的傅立叶級数在某点 x_0 上的性状[①] 完全取决于此函数在該点直接邻近所取的値，即該点任意小邻域中的値。

所以，比方說如果取兩个这样的函数，它們在点 x_0 的任意小邻域內的値相同，則无論在这邻域外如何不同，这两函数的傅立叶級数在点 x_0 的性状总是一样的：或者同为收斂，并且收斂于同一个和，或者同为发散。如果注意到这两个函数的傅立叶系数是取决于全体函数値并且是可以完全不同的，这个結果就显得更令人惊訝了。

上述定理通常称为黎曼定理，因为这是他在 1853 年所証明的一个較一般的定理的推論。但是应該指出，"局部化原理"的概念已見于奥斯脫罗格拉德斯基 1828 年一篇关于数学物理的論文里，也反映在罗巴切夫斯基 1834 年关于三角級数的研究里。

402. 函数的傅立叶級数表示法 我們已經得出过傅立叶級数部分和 $s_n(x_0)$ 的积分表示式(4)，現在継續研究它的性状。

在此我們对函数 $f(x)$ 加上更强的条件，即假設它在区間 $[-\pi, \pi]$ 內逐段可微分[②]。

于是成立这一般的

定理 如果函数 $f(x)$ 有周期 2π 且在区間 $[-\pi, \pi]$ 內逐段可微分，則其傅立叶級数在每点 x_0 上都收斂并且有总和

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

---

① 我們指的是級数在点 x_0 上的收斂性和发散性以及(在收斂时)級数有怎样的和等情况。

② 函数 $f(x)$ 在下述情形下称为在区間 $[a, b]$ 內逐段可微的：該区間可分为有限多段，在每段內部該函数均可微分，而在端点上則不但有极限値，并且以这些极限値代替函数値时也就有单側导数。可以想象逐段可微分函数是由一些在部分閉区間中可微分(故也連續)的函数"粘連"起来的，只是在"銜接点"(以及总区間的两端 a 与 b)上函数値要特别規定。

如果該函数在点 x_0 上連續，則总和显然等于 $f(x_0)$。

証明 注意，等式(4)对每个滿足所設条件的函数都成立。如果特别取 $f(x)\equiv 1$，則 $s_n(x)\equiv 1$ 而由(4)得

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \tag{8}$$

两边乘以常数 S_0 而由(4)减去之，得

$$s_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-$$

$$-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt;$$

我們須証明右边的积分 $n\to\infty$ 时趋于 0。

将它表为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt, \tag{9}$$

这里

$$g(t)=\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}; \tag{10}$$

如果能确定这函数逐段連續，則由 400 段的預备定理已可推知积分(9)在 $n\to\infty$ 时有极限 0。但在区間 $(0,\pi]$ 内函数 $g(t)$ 一般是連續的，至多可能要除出有限个点，在这些点上該函数有跳跃，因为函数 f 是这样的。剩下成問題的只在函数 $g(t)$ 于 $t\to+0$ 时的

性状了。

我們来証明这有限极限的存在：

$$\lim_{t\to+0} g(t)=K.$$

于是令 $g(0)=K$（至今此值未正式定义）因而 $g(t)$ 在点 $t=0$ 成为連續，如此預备定理就可应用了。但等式(10)右边第二乘数显然有极限 1；現在来看方括号中的式子。

为簡单起見先設点 x_0 落在函数 $f(x)$ 是可微分的区間的內部。于是 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$，并且比率

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},\quad \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t} \tag{11}$$

每个都趋于极限 $f'(x_0)$，而[…]趋于 0。如果 x_0 是"衔接点"，則此时它可以是連續点，也可以是断点。在第一情形我們又遇到比率(11)，但它們这回趋于不同的极限——各趋于右导数及左导数(图 74a)。在不連續的情形也可得类似的結果，但这里函数值 $f(x_0)$ 要換成那些"粘連"成所給函数的函数之值 $f(x_0\pm0)$，而諸比率的极限則为那些函数在 $x=x_0$ 时的单側导数(图 74$б$)。

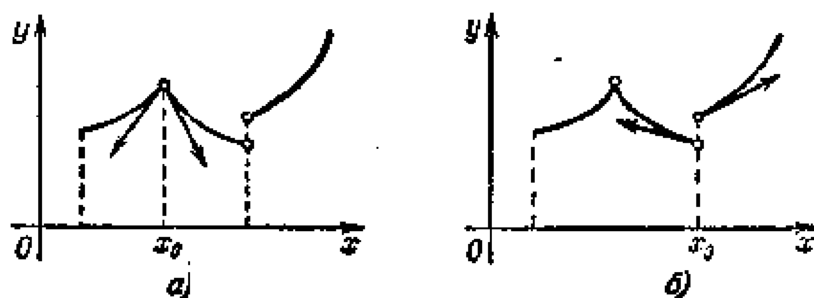


图 74.

如此，我們的結論在一切情形都成立。

403. 非周期函数的情形 整个上面所建立的理論的出发点是：假設所給函数对 x 所有实数值都有定义并且有周期 2π。然而最常遇到的是非周期性的函数 $f(x)$，有时甚至只在区間$[-\pi,\pi]$內給出。

为了能在这种函数上应用所讲的理論，我們引入一个輔助函数 $f^*(x)$ 来替代，其定义如下。在区間 $(-\pi,\pi]$ 内我們令 f^* 与 f 重合：

$$f^*(x)=f(x)\quad(-\pi<x\leqslant\pi),\tag{12}$$

然后令

$$f^*(-\pi)=f^*(\pi)=f(\pi),$$

并将函数 $f^*(x)$ 按周期性規律扩展到 x 的其余实数值上去。

对这样构成的一个周期为 2π 的函数 $f^*(x)$，已經可以应用所証明的展开定理。但如果所談的点 x_0 严格地落在 $-\pi$ 与 π 之間，則由(12)只須处理所給出的函数 $f(x)$。按同样的理由展开式系数也就可以用公式(1)算出，不必轉化为函数 $f^*(x)$。簡而言之，以上所証全部結果可直接搬到所給的函数 $f(x)$ 上来，而沒有用到輔助函数 $f^*(x)$。

但是要特别注意的是区間端点 $x=\pm\pi$。比方說，在点 $x=\pi$ 上应用 **402** 段的定理于函数 $f^*(x)$ 时，则既須考虑輔助函数 $x=\pi$ 左边的值(这里与所給函数相应值一致)，又須考虑 $f^*(x)$ 的在 $x=\pi$ 右边之值(这里已經与 $f(x)$ 在 $x=-\pi$ 右边之值一致)。所以，对于 $x=\pm\pi$ 应取作 S_0 的是

$$S_0=\frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2}=$$

$$=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

如此 即使所給函数 $f(x)$ 在 $x=\pm\pi$ 是連續的，但倘若它沒有周期 2π，因而 $f(\pi)\neq f(-\pi)$，則在滿足逐段可微分的条件之下傅立叶級数之和将为

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2},$$

既异于$f(-\pi)$，又异于$f(\pi)$。对这种函数展开式只能在开区間$(-\pi, \pi)$内成立。

下面的話值得讀者特别注意。如果三角級数(2)在区間$(-\pi, \pi]$内收斂于函数$f(x)$，則因其各項有周期2π故也到处都收斂，而共和$S(x)$也成x的周期函数，其周期为2π。但此和在所說区間外面一般已与函数$f(x)$未必一致(即使它在全实数軸上都有定义)。以后将举例来說明这話。

最后指出，区間$[-\pi, \pi]$也可换成任何长2π的区間$[a, a+2\pi]$。

404. 任意区間的情形 我們假設函数$f(x)$給定在任意长$2l$的区間$[-l, l]$內并且在其內逐段可微分。如果利用置换

$$x=\frac{ly}{\pi} \quad (-\pi \leqslant y \leqslant \pi),$$

則可得一在区間$[-\pi, \pi]$內y的函数$f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$，也逐段可微分，对此已可应用前段所論。我們看出，除断点及区間端点$-\pi, \pi$外，它可展为傅立叶級数：

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny+b_n \sin ny),$$

其系数可用欧拉-傅立叶公式来决定：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots) \qquad\qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

現在令

$$y=\frac{\pi x}{l},$$

而变回原先的变数x，于是我們得出所給函数$f(x)$的这种型式略异的三角展开式：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{13}$$

这里余弦与正弦之角都是$\frac{\pi x}{l}$的倍数而不是 x 的倍数。決定这展开式系数的公式也可用同一置換变成:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{14}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

对区間的端点 $x=\pm l$, 前段关于点 $x=\pm\pi$ 所說的話也仍适用。最后,区間$(-l,l]$也可換成任何别的同样长 $2l$ 的区間,特别如,区間$(0,2l]$。在这情形公式(14)变成

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{14a}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

405. 只含余弦或只含正弦的展开式 首先注意,如果在区間$[-\pi,\pi]$内給了一个奇函数 $f(x)$(連續或逐段連續),則

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0.$$

这不难証明,只要將积分$\int_{-\pi}^{\pi}$表为两个积分之和的形式:$\int_{0}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}$,而在第二个积分中以$-x$ 代 x 就行了。同样可証,$f(x)$为偶函数时有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx.$$

现在設 $f(x)$ 是在区間$[-\pi,\pi]$内逐段可微分的偶函数。于是乘积 $f(x)\sin nx$ 成为奇函数,而按上面說的有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0.$$

如此，偶函数的傅立叶級数只含余弦：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{15}$$

因为在这情形下 $f(x)\cos nx$ 也成偶函数，所以应用上面說的第二点可以将展开式系数 a_n 写成：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx \qquad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{16}$$

如果 $f(x)$ 是奇函数，則 $f(x)\cos nx$ 也是奇函数，从而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

我們得到結論：奇函数的傅立叶級数只含正弦：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{17}$$

在此由于乘积 $f(x)\sin nx$ 是偶函数可以写：

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{18}$$

順便指出，每个給定在区間$[-\pi, \pi]$內的函数 $f(x)$ 都可表为一个偶函数与一个奇函数之和的形式：

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

这里

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

显然，函数 $f(x)$ 的傅立叶級数正好就由函数 $f_1(x)$ 依余弦的展开

式和函数 $f_2(x)$ 依正弦的展开式所組成。

其次，我們假設函数 $f(x)$ 只在区間 $[0, \pi]$ 內給出。要将它在这区間內展为級数(2)，我們对区間 $[-\pi, 0]$ 內 x 值任意补充这个函数的定义而保持其逐段可微分性，然后应用 **403** 段所說的，既然这函数的定义这样任意，所以用这办法能得出种种不同的三角級数。

利用函数定义在区間 $[-\pi, 0]$ 內的任意性，可以使所得 $f(x)$ 的展开式只含余弦或只含正弦。事实上，設想对 $0<x\leqslant\pi$ 我們令

$$f(-x)=f(x), \tag{19}$$

如此結果得出一个区間 $[-\pi, \pi]$ 內的偶函数(图 75a)，甚至还有周期 2π。我們看到它的展开式只含余弦。展开式的系数可按公式(16)来計算，其中只含原先所給函数 $f(x)$ 之值。

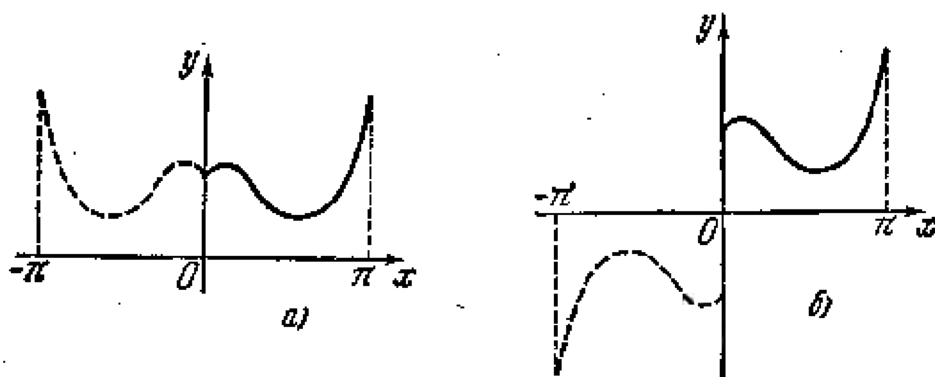


图 75.

同样，如果依条件(对 $0<x\leqslant\pi$)

$$f(-x)=-f(x) \tag{20}$$

补充函数的定义而使它成为奇函数(图 75б)，則在其展开式中将只出現正弦項。其系数可用公式(18)来決定。

如此，在区間 $[0, \pi]$ 內所給定的函数在滿足某些条件时既能展为余弦的級数，也能展为正弦的級数。

但需要特別研究的是点 $x=0$ 和 $x=\pi$。这里两个展开式的情形是不同的。为簡单起見我們假設所給函数在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 时連

續而先来看依余弦的展开式。条件(19)首先保持了 $x=0$ 时的連續性，如此級数(15)在 $x=0$ 时就收斂于 $f(0)$。其次，既然

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi),$$

則在 $x=\pi$ 时有类似的情形。

依正弦的展开式情形就两样了。現在不深論由于条件(20)而破坏了函数連續性等等情况，而只簡单地指出，在点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 上級数 (17) 之和显然是 0。所以显然只在 $f(0)$ 及 $f(\pi)$ 等于 0 的情形，級数的和才能給出这些值。

如果函数 $f(x)$ 給定在区間 $[0, l]$ $(l>0)$ 內，則用 **404** 段中同样的变数更换法可将展开 $f(x)$ 为余弦級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

或正弦級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

的問題化为刚才所討論的情形。在此展开式系数可各用公式

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

或

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{22}$$

算出。

406. 例 下列各例中所举的函数都是可微分的或逐段可微分的。所以展开为傅立叶級数的可能性是无可置疑的，这一問題我們不再討論。

1) 将函数

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

在区間$(0, 2\pi)$內展开之。

按 399 段公式(1a)：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx=0, \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\, dx=\frac{1}{n}.$$

如此，我們得出这特别簡单而只含正弦的展开式：

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0<x<2\pi).$$

在$x=0$(或2π)时級数之和等于 0 而等式不成立。在該区間外等式也不成立。該級数和 $S(x)$ 的图象（图 76）由无限多平行綫段及x軸上一系列孤立点所組成。

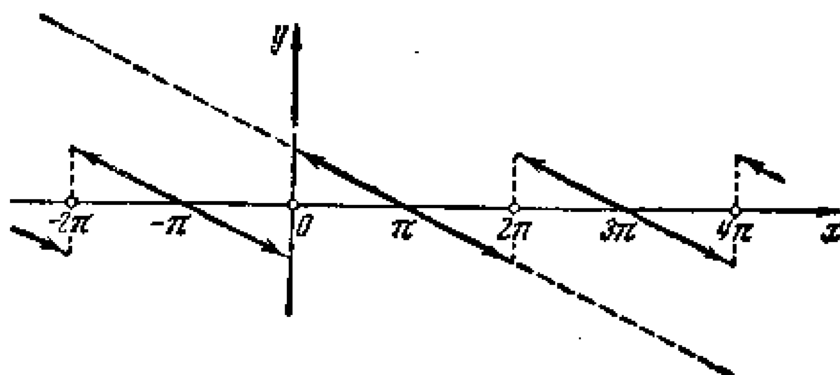


图 76.

2) 由 1) 中的展开式不必計算即可得出另一些有趣的展开式。我們在其中以$2x$代x而以 2 除等式两边，得：

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k} \qquad (0<x<\pi),$$

由原来的展开式减去这一展开式，得

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad (0<x<\pi).$$

如果以 $S(x)$ 表示这个級数之和，則 $S(0)=S(\pi)=0$. 改变 x 的正負号，由正弦的奇性知在区間 $(-\pi, 0)$ 內 $S(x)=-\frac{\pi}{4}$；对其他 x 值則 $S(x)$ 可按周期性規律得出，例如对区間 $(2\pi, 3\pi)$ 又是 $S(x)=\frac{\pi}{4}$，等等。函数 $S(x)$ 的图象見图 77；图 78 則表示級数的各个部分和逐步逼近于这不連續函数的情况。

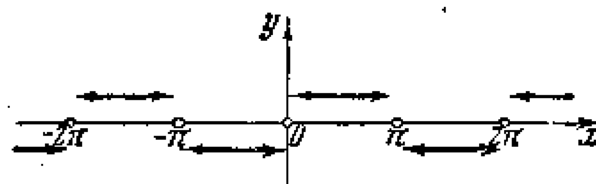


图 77.

附注 如果在所討論的展开式中令 $x=\frac{\pi}{2}$，則得出我們所熟悉的萊卜尼茲級数[255 段，(20)]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

将这里所得展开式与 1) 中展开式合起来不难得出函数 x 的級数：

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

我們只对 $0<x<\pi$ 直接得出这个等式，但它显然对 $x=0$ 也成立，并且它的两边显然都表示奇函数，所以这展开式对整个区間 $(-\pi, \pi)$ 都正确。

在 x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时这級数和的图象不难表为图 79。图 80 則为这部分和

$$y=s_5(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right)$$

的图象。

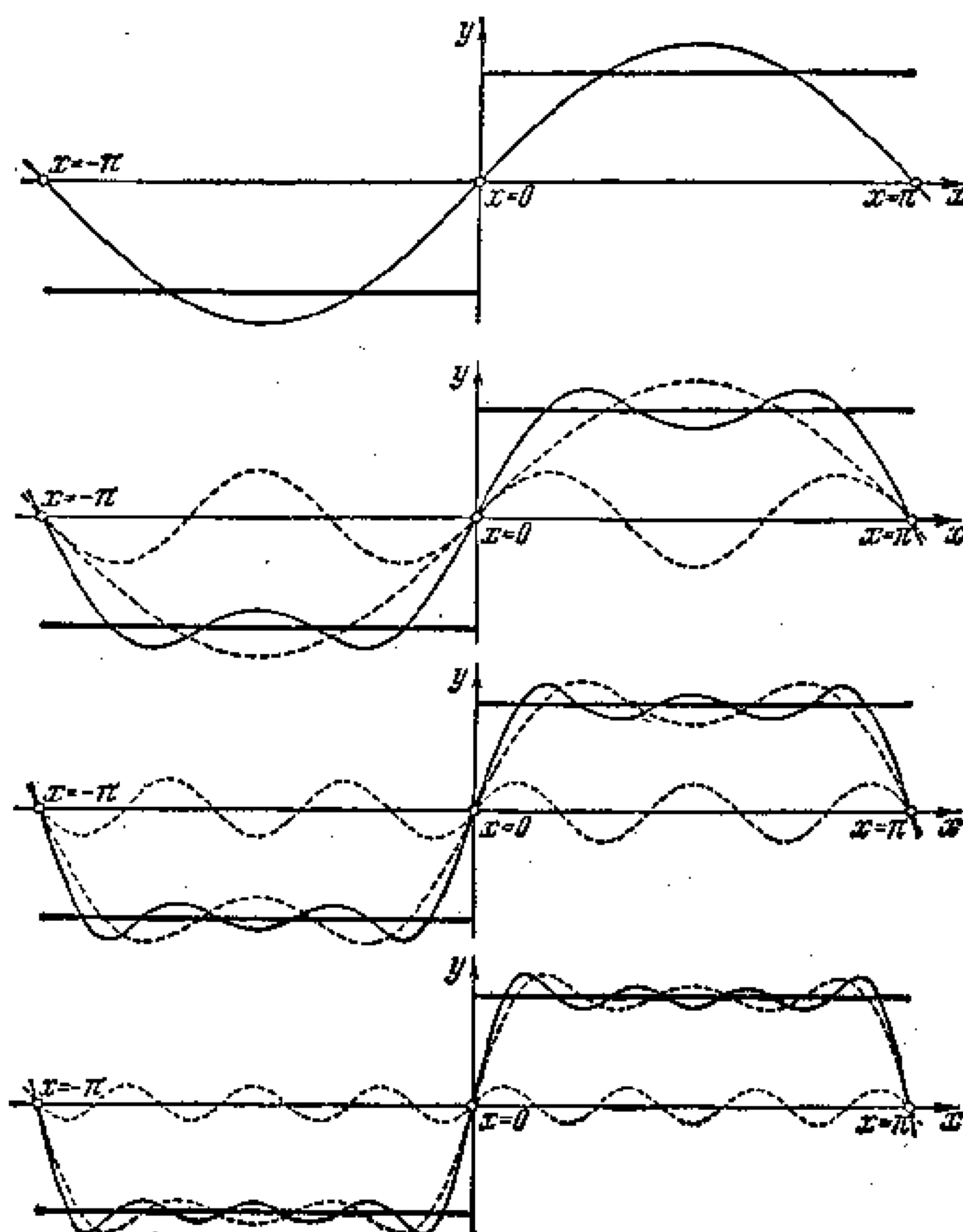


图 78.

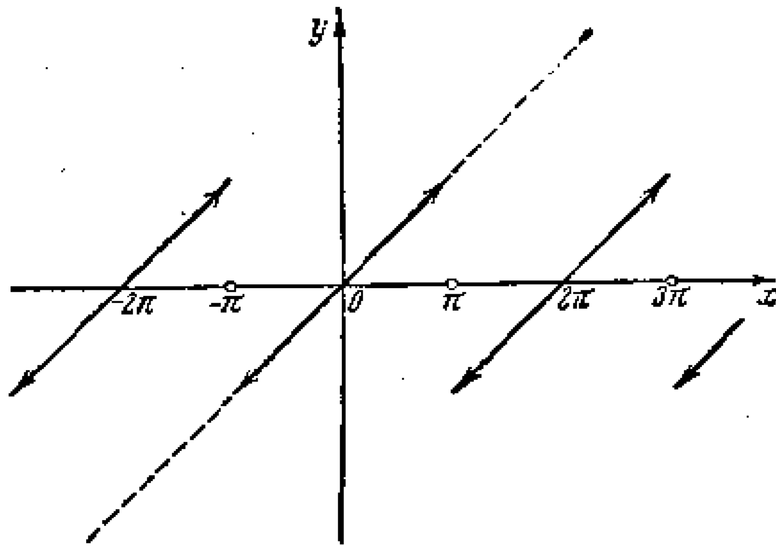


图 79.

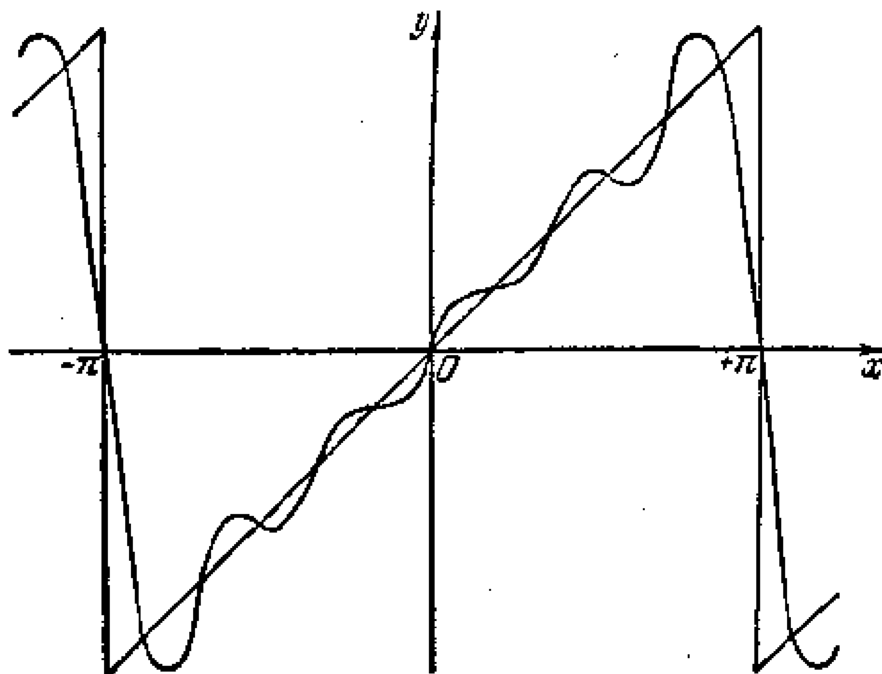


图 80.

3)

(a)将偶函数 $f_1(x)=\cos ax$ 在$[-\pi,\pi]$内以余弦展开之,

(б)将奇函数 $f_2(x)=\sin ax$ 在$(-\pi,\pi)$内依正弦展开之(这里假設 a 不是整数).

(a)我們有

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos ax dx=\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$(n>0)\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]dx=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi},$$

如此

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

(б)答案:

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}\qquad(-\pi<x<\pi).$$

附注 我們順便指出, $x=0$ 时由(a)可得出:

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

或者令 $a\pi=z$ 則

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right]$$

(这里 z 是任意的数, 只要不是 π 的倍数)。我們得出了函数 $\frac{1}{\sin z}$ 的"簡分数展开式"(这在 **293** 段 3) 及 **308** 段 1° 中已用到过)。在(a)中令 $x=\pi$, 則可得出函数 $\operatorname{ctg} z$ 的"簡分数展开式":

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right].$$

4) 將函数

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}$$

在区間$[0,\pi]$内依余弦展开之。

不难用公式(16)算出：

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{\pi^2}{6},$$

并且还有(做分部积分二次)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(x-\pi)\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(x-\pi)\cos nx\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nx dx=\frac{1}{n^2}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

依区間$[0,\pi]$导出的展开式

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

事实上甚至在区間$[0,2\pi]$内也成立，因为等式两边在x代以$2\pi-x$时其值不变。

附注　如果在此令$x=0$，則得著名的欧拉級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

407. 連续函数展开为三角多項式級数　在証明关于傅立叶級数展开式定理时[**402** 段]我們为簡单起見是限于逐段可微分函数的。事实上，能这样展开的函数类，其范圍远比此为广，但仍不能包括一切周期2π的連續函数！[参閱 **424** 段]。在某种意义上这里发生一个类似在 **278** 段講过的函数的冪級数展开的情况。并且除了那里所講关于展开任意連續函数为代数多項式均匀收斂級数的维尔斯脫拉斯定理外同一作者还証明了第二个关于展开周期2π的任意連續函数为三角多項式均匀收斂級数的定理，也即展为形如

$$A_0+\sum_{k=1}^{m}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\tag{23}$$

的和的定理。如此，和前面一样，展开式应用范围的扩大是靠展开式項的性質的复杂化获得的：由簡单的单項式变到多項式之和。

第二維尔斯脫拉斯定理也和第一定理一样可用序列的語言陈述如下：

維尔斯脫拉斯定理 如果函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 內連續并且有周期 2π：

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

则存在一个三角多項式序列，它在这区間內均匀收斂于 $f(x)$①。

証明时我們先注意一个簡单的事实，两个(23)型三角多項式的乘积也能表为三角多項式的形式。这是因为，按熟悉的三角公式，所有可能的乘积

$$\cos kx\cdot\cos lx,\quad \cos kx\cdot\sin lx,\quad \sin kx\cdot\sin lx$$

都可表为这种多項式的形式，例如，

$$\cos kx\cdot\cos lx=\frac{1}{2}\cos(k+l)x+\frac{1}{2}\cos(k-l)x.$$

如果我們能証明，对任何一数 $\varepsilon>0$ 必可找到这样一个三角多項式 $T(x)$，使对所有 $[-\pi, \pi]$ 內的 x 有

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \tag{24}$$

则本定理就証明了。

这不难对偶函数 $f(x)$ 的情形来証明。利用第一維尔斯脫拉斯定理[278段]我們首先做出这样一个代数多項式 $P(t)$，使对区間 $[-1, 1]$ 內所有 t 值有

$$|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon ②.$$

这里令 $t=\cos x$，而 $0\leqslant x\leqslant\pi$，我們对此全区間得出

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon.$$

由于函数 $f(x)$ 和 $\cos x$ 的偶性，这不等式在 x 代以 $-x$ 时仍成立，也即对区間 $[-\pi, \pi]$ 內所有 x 值都成立，而由于周期性在全区間 $(-\infty, +\infty)$ 內也仍成立。因为按开头时所說的，$P(\cos x)$ 一式可写成三角多項式的形式，所以对所考虑的情形我們的論断已証明是对的。

現在来看一般的情形——周期为 2π 的任意函数 $f(x)$。对于偶函数

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\cdot\sin x,$$

---

① 我們設想函数 $f(x)$ 按周期性地扩展到全区間 $(-\infty, +\infty)$ 上。

② 回忆 $\arccos t$ 值充滿区間 $[0, \pi]$。

按所証明的存在这样的多項式 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$，使

$$|f_1(x)-T_1(x)|<\frac{\varepsilon}{4},\quad |f_2(x)-T_2(x)|<\frac{\varepsilon}{4}\qquad (-\infty<x<+\infty).$$

由此有

$$|f_1\sin^2 x-T_1\cdot\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{4},\ |f_2\sin x-T_2\cdot\sin x|<\frac{\varepsilon}{4},$$

然后，將这些不等式加起来，則有

$$|f(x)\cdot\sin^2 x-T_3(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{25}$$

这里 $T_3(x)$ 是三角多項式

$$T_3=T_1\cdot\sin^2 x+T_2\cdot\sin x$$

（参閱开头所設的簡单事实）。

同样对函数 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 也可找到一个三角多項式 $T_4(x)$，使得

$$\left|f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin^2 x-T_4(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这里以 $x-\frac{\pi}{2}$ 代 x 并以 $T_5(x)$ 表示經过此代換后由 $T_4(x)$ 所得出的三角多項式，我們得到

$$|f(x)\cdot\cos^2 x-T_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{26}$$

最后，令 $T=T_3+T_5$，由(25)和(26)相加得出(24)。如此本定理証明了。

这个定理也可用級数的語言陈述如下[参閱 278 段]：

一个以 2π 为周期的連續函数 $f(x)$ 可以展开成一个由三角多項式組成而均匀收斂于它的級数。

§3. 傅立叶积分

408. 傅立叶积分作为傅立叶級数的极限情形 我們要在此重述一下傅立叶导致其积分公式时的想法要点，这种想法虽欠严格而其明彻值得注意①。

如果函数 $f(x)$ 給定在一个有限区間 $[-l, l]$ 內，則在一定的条件之下（我們在此不研究它們）可將它在此区間內表为三角級数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$

① 哥西也独立地得出过这个公式。

这里

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}du,\quad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}du.$$

$$(m=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad(m=1,2,3,\cdots)$$

[参閱 404 段]将系数 a_m 和 b_m 换成其表出式即可将級数写成：

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)du. \tag{1}$$

現在設函数 $f(x)$ 在整个无穷区間$(-\infty,+\infty)$内都有定义。在这情形，不論 x 如何，相应的 $f(x)$ 值在任何 $l>|x|$ 之下恒可表为展开式 (1)。这里我們取 $l\to+\infty$时的极限而設法建立此展开式的"极限形式"。

关于等式(1)右边第一項自然可認为它趋于 0①。至于右边的无穷級数部分，則我們可将余弦号下系数$\frac{m\pi}{l}$看作某一个由 $z_0=0$ 連續变至$+\infty$的变数 z 的离散值

$$z_1=\frac{\pi}{l},\quad z_2=\frac{2\pi}{l},\ \cdots,\ z_m=\frac{m\pi}{l};$$

而增量

$$\Delta z_m=z_{m+1}-z_m=\frac{\pi}{l}.$$

显然在 $l\to+\infty$ 时趋于 0. 在这种表示法之下我們的級数可写成：

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta z_{m-1}\int_{-l}^{l}f(u)\cos z_m(u-x)du.$$

它好像是区間$[0,+\infty]$內 z 的函数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du$$

的积分和。取$l\to+\infty$时的极限，即由級数得出一积分；这样就得出下列傅立叶积分公式：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du.$$

---

① 例如假設 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du$ 收斂时这就成为明显的事情。

如将差角余弦展开这公式也可表为：

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx]dz,$$

其中

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zudu,\ b(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zudu.$$

这里可明白看出与三角展开式的相似性：只是将取自然数值的参变数 m 换成連續变化的参变数 z，而无穷級数换成积分。系数 $a(z)$ 和 $b(z)$ 在其結构上就像是傅立叶系数。

当然，这些想法只是提示的性質；傅立叶公式成立的实际条件还有待闡明。而在作严密論証时我們仍将遵循有关傅立叶級数的基本論証步驟。

409. 預备說明 关于函数 $f(x)$ 我們現在假設：1) 它在每一有限区間内都逐段連續并且 2) 在无限区間 $[-\infty, +\infty]$ 内絕对可积分。在这样的假設之下我們来考慮积分

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du,$$

这里 A 是一个任意的有限正数，而 x_0 是 x 的任何一个定值。这个积分表現与傅立叶級数部分和相似：由此取 $A\to+\infty$ 时的极限可得到傅立叶积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du. \tag{2}$$

对任何有限的 $B>0$，按 298 段定理 4° 我們有

$$\int_{0}^{A}dz\int_{-B}^{B}f(u)\cos z\,(u-x_0)du=\int_{-B}^{B}f(u)du\int_{0}^{A}\cos z(u-x_0)dz=$$

$$=\int_{-B}^{B}f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du. \tag{3}$$

如果函数 $f(u)$ 在区間 $[-B, B]$ 内連續，則上式直接可由所說定理推出；在相反的情形这定理須各別应用于該函数在上面連續的每个区間上。

但积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du \tag{4}$$

被这个假設为收斂的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$$

所控制所以在 z 值的任何区間上对 z 均匀地收斂(在$u=+\infty$及$u=-\infty$处)。如此,积分

$$\int_{-B}^{B}f(u)\cos z(u-x_0)du$$

在 $B\to+\infty$时均匀地趋于其极限(4)。所以,如果在等式(3)中取 $B\to+\infty$时的极限,則在左边积分中可在积分号下取极限[296段定理1]。① 由此对$J(A)$得出下列积分形式的表出式:

$$J[A]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du,$$

它与狄里希萊积分相像[399段]并且事实上也恰恰起这样的作用。由初淺的变换不难將它化为:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt, \tag{5}$$

为了以后的需要对400段基本預备定理作这一明显的补充:

如果函数 $g(t)$ 在区間$[a,+\infty]$的每一有限部分內都逐段連續并且在这无限区間內絕对可积分,則

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{\infty}g(t)\sin pt\,dt=0$$

(同样也有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{+\infty}g(t)\cos pt\,dt=0).$$

事实上,指定任意一数$\varepsilon>0$,我們先选取一个这样大的 A,使

①参照 305 段定理 4,其中被积函数假設是連續的。这里我們不作这样的假設。

$$\int_A^{+\infty} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

因而更有

$$\left|\int_A^{+\infty} g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

并且不論 p 是怎样的数。然后在积分

$$\int_a^A g(t)\sin pt\,dt$$

上直接应用 400 段的預备定理，如此对充分大的 p 有

$$\left|\int_a^A g(t)\sin pt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

对同样那些 p 値显然有

$$\left|\int_a^\infty g(t)\sin pt\,dt\right| < \varepsilon,$$

这就是所要証明的。

410. 用傅立叶积分表出函数 完全与 402 段的定理相似，这里有

定理. 設函数 $f(x)$ 在 u 的每一有限区間內逐段可微分，并且在区間 $[-\infty, +\infty]$ 內絕对可积。于是在每一点 $x=x_0$ 上其傅立叶积分都收斂，并且有値

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

（如果函数在点 $x=x_0$ 連續，此値显然变成 $f(x_0)$）。

証明 将等式

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}dt \qquad (A>0)$$

[参閱 293 段附注；308 段，2°] 两边乘以常数 S_0，而由等式(5)两边減去之；得

$$J(A) - S_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin At}{t}dt. \qquad (6)$$

取一常数 $h>0$ 而将此积分写成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}-\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\sin At\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_h^\infty\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt-\frac{2S_0}{\pi}\int_h^\infty\frac{\sin At}{t}dt.$$

第一个积分在 $A\to\infty$ 时趋于 0, 这可以像証明 402 段的定理那样来証明。第二积分中的分式, 連同 f, 在区間 $[h,\infty]$ 的任何有限部分中都是逐段連續的函数; 此外这函数在該区間还絕对可积。所以, 按前段末尾的話第二积分在 $A\to\infty$ 时也有极限 0。最后, 在第三积分中令 $At=z$ 而将它化为

$$-\frac{2S_0}{\pi}\int_{Ah}^\infty\frac{\sin z}{z}dz$$

的形状, 如此它在 $A\to\infty$ 时也趋于 0。由此我們可下結論說, (6) 式在 $A\to\infty$ 时有极限 0, 即积分 (2) 存在且等于 S_0。

411. 傅立叶公式的种种形式 假設上面所說傅立叶公式成立的条件已經实現, 我們为簡单起見将認为函数 $f(x)$ 在所考慮的点 x 上連續, 或者在不連續的情形則認为滿足条件

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

于是在任何情形我們都有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du. \tag{7}$$

由于內层积分显然是 z 的偶函数, 这公式也可写成:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du. \tag{8}$$

其次不難証明, 在 410 段所作关于函数 $f(x)$ 的一般假設之下积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du \tag{9}$$

也存在。这个积分还是 z 的連續函数并且显然是奇函数。

一般說来, 对这个函数已經不能保証由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的非正常积分存在。

在对任何函数 $\varphi(s)$ 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分也即 M 与 N 独立趋于无穷时的

极限

$$\lim_{\substack{M\to\infty\\N\to\infty}}\int_{-M}^{N}\varphi(z)dz,$$

不存在时，也可以存在相应于特殊假設$M=N$的极限。这种极限按哥西的說法称为积分之主値并表成 V. p. (*Valeur principale*):

$$\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\varphi(z)dz.$$

如果一个积分在寻常非正常积分定义之下存在則它显然与其主値一致。

由于函数(9)是z的奇函数，我們有

$$\int_{-M}^{M}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du=0,$$

并且在$M\to\infty$时也得出极限为0。如此，在任何情形

$$\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du=0.$$

将此等式乘以$\frac{i}{2\pi}$而与(8)相加，即得关系式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{iz(u-x)}du, \tag{10}$$

这里外層积分理解为主値意义下的积分。公式的这一形式是哥西最先提出的。

回到公式(7)，将它写成：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zx dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zu du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin zx dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zu du.$$

如果$f(u)$是偶函数，則

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zu du=2\int_{0}^{\infty}f(u)\cos zu du,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zu du=0,$$

而我們得到一个只含余弦的簡化公式：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos zx dz\int_0^\infty f(u)\cos zu du. \tag{11}$$

同样，在$f(x)$是奇函数的情形我們可得到一个只含正弦的公式：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin zx dz\int_0^\infty f(u)\sin zu du. \tag{12}$$

現在設函数$f(x)$只在区間$[0,+\infty]$內給出并且在这区間內滿足类似以前面对全区間$(-\infty,+\infty)$所設的条件。于是，將函数$f(x)$用等式

$$f(-x)=f(x)\text{或}f(-x)=-f(x)\qquad(x>0)$$

开拓到区間$(-\infty,0)$上，我們在第一情形得一个区間$(-\infty,+\infty)$內的偶函数，在第二情形得一奇函数。如此，对x的正值我們旣可利用公式(11)，也可利用公式(12)。

如果在点$x=0$假設函数$f(x)$是連續的，則公式(11)在这一点上可以应用，因为函数的偶式开拓仍在此保持連續性。公式(11)則一般在点$x=0$上不能适用：它只在$f(0)$的值是0的情形才能給出此值。

这些想法完全与405段对傅立叶級数講的相似。

412. 傅立叶变換 在我們的假設之下傅立叶公式(10)对区間$(-\infty,+\infty)$內所有x值都成立。这公式可以想像是下面两个公式疊加起来的：

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ixz}dz①. \tag{13}$$

按第一公式与函数$f(x)$对应的函数$F(z)$，称为其傅立叶变換。按第二公式則函数$f(x)$又成为函数$F(z)$的傅立叶(逆)变換(区別在i处的正負号!)。注意一般說来，即便f是实函数时，函数F也是复函数；但这里也可假設原函数f是复函数。

等式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ixz}dz,$$

其中$f(x)$是給定的，可以看作是对积分号下未知函数$F(z)$的积分方程。这个方程的解可由公式

①如果关于$f(x)$只作上面所說的假設，則后一积分理解为"主值"的意义。

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du$$

得到。自然，这两个等式也可調換地位。

現在回到公式(11)；它对 x 的所有正値都成立，并且可将它表为下列两个公式的迭加(这回两式均有实值且完全对称)：

$$\left.\begin{aligned}F_c(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos zu\,du,\\ f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\cos xz\,dz.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

同样公式(12)也可分解成两个：

$$\left.\begin{aligned}F_s(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\sin zu\,du,\\ f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(z)\sin xz\,dz.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

函数 $F_c(z)$ 和 $F_s(z)$ 各称为函数 $f(x)$ 的傅立叶余弦变换和正弦变换。我們看到，函数 f 由 F_c(或 F_s)得出的方式恰和 F_c(或 F_s)由 f 得出的方式一样。換句話說，函数 f 与 $F_c(F_s)$ 互为余弦变换（或正弦变换）。哥西将一对函数 f 与 F_c 或 f 与 F_s 各称为第一类共軛函数或第二类共軛函数。这里(14)[或(15)]中的每个等式也是可看作一个积分方程，其中积分外函数是給定的，而积分号下的函数是所求的；解由另一等式給出。

比較函数 F，F_c 和 F_s 我們可以說：在 $f(x)$ 为偶函数时，有

$$F(z)=F_c(z)$$

(函数 $F_c(z)$ 以偶的方式开拓到 $z<0$ 的値上)，而在 $f(x)$ 为奇函数时：

$$F(z)=iF_s(z)$$

(函数 $F_s(z)$ 以奇的方式开拓到 $z<0$ 的値上)。在一般情形则函数 $f(x)$ 可分解为偶函数与奇函数之和：

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

于是

$$F(z)=G_c(z)+iH_s(z)①.$$

① $G_c(z)$ 表示函数 $g(x)$ 的余弦变换，$H_s(z)$ 表示 $h(x)$ 的正弦变换。

由于这种情况我們只要举余弦变换和正弦变换的例子就够了。

1) 設函数 $f(x)=e^{-ax}(a>0, x\geqslant 0)$；于是其余弦变换为

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-az}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2},$$

而正弦变换为

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-az}\sin zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}.$$

因为 e^{-ax} 在区間$[0,\infty]$內可积分，所以应成立下列相互关系：

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos zx}{a^2+z^2}dz=e^{-ax}\qquad(x\geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{z\sin zx}{a^2+z^2}dz=e^{-ax}\qquad(x>0)$$

或

$$\int_0^\infty\frac{\cos xz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\quad\int_0^\infty\frac{z\sin xz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

我們認得这些积分就是熟悉的拉普拉斯积分[308 段, 4°]。

如此，我們在这里有

$$e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}\text{及 }e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2},$$

这两对函数作为第一类及第二类共軛函数（按哥西的意义）的例子。如果我們不知道拉普拉斯积分，則所讲的理論給出了計算它們的途徑。

2) 現在来看这样一个函数，以等式

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a\text{ 时}\\ \frac{1}{2}, & x=a\text{ 时}\\ 0, & x>a\text{ 时}\end{cases}\qquad(a>0)$$

为其定义。在这情形

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}.$$

要以这个例子来驗証傅立叶公式，我們找出所得函数的余弦变换：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\cos zx dz.$$

如果将此积分写成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a+x)z}{z}dz+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a-x)z}{z}dz,$$

则立即可以看出[293,附注],它的値事实上与原来的函数 $f(x)$ 一致。

§4. 三角函数系的封閉性与完备性

413. 函数的平均逼近。傅立叶級数段的极値性質 如果对任何一个函数 $f(x)$ 我們取另一函数 $g(x)$ 作为它在区間 $[a,b]$ 內的近似式,则这近似式的精确度可按不同方式进行估計。自然应以差数

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

作为考虑的基础。

如果我們对这两个函数在一切各别取来的点上的离差是同样关心的。在这种情形可取其最大离差

$$\delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|r(x)|$$

作为近似性的测度。

但我們常常不考虑函数在一切点上的"均匀"近似性而宁考虑其"平均"近似性。在这情形则取其平均离差

$$\delta'=\frac{1}{b-a}\int_a^b|r(x)|dx$$

或均方离差(以后我們經常要用的)

$$\delta''=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b r^2(x)dx}$$

作为近似性测度。但不用这个式子,而改用下面較簡单的量:

$$\Delta=\int_a^b r^2(x)\,dx=(b-a)\,\delta''^2$$

则更为方便。

重新回来考虑区間$[a,\ b]$内一个任意的直交函数系$\{\varphi_m(x)\}$ $(m=0,1,2,\cdots)$[398 段]. 設$f(x)$是一个給定在同一区間內的函数①而n是一个固定的自然数。我們来考虑这样一个問題：由最先$n+1$个函数φ的所有綫性組合

$$\sigma_n(x)=C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x) \tag{1}$$

中，共中系数$C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_n$是任意的，試找出函数$f(x)$的最佳近似式（最佳是指均方根离差而言）。换句話說，要使

$$\Delta_n=\int_a^b[f(x)-\sigma_n(x)]^2dx$$

达最小值。

这里将$\sigma_n(x)$换成共展开的表出式，得

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{m=0}^{n}C_m\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{n}C_m^2\int_a^b\varphi_m^2(x)\,dx+2\sum_{k<m}C_kC_m\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_m(x)\,dx.$$

最后一个和，因所設函数系直交而消失。引入常数

$$\lambda_m=\int_a^b\varphi_m^2(x)\,dx$$

及函数$f(x)$的（广义）傅立叶系数

① 和尋常一样，我們認为所有所考慮的函数以及φ_m和f都是連續的或者（更一般地）是逐段連續的。

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx,$$

可将 Δ_n 的表出式写成:

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m C_m+\sum_{m=0}^{n}\lambda_m C_m^2,$$

加减 $\lambda_m C_m^2$ 使总和号下成完全平方,終于得出:

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2+\sum_{m=0}^{n}\lambda_m(C_m-c_m)^2.$$

现在可以看出,在最后一个和等于 0 时,也就是

$$C_0=c_0,\quad C_1=c_1,\cdots,\quad C_n=c_n$$

的时候,Δ_n 达到其最小值。

如此,由所有像 (1) 式那样的多项式中正是(广义)傅立叶級数段

$$s_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

使 Δ_n 达到其可能的最小值

$$\delta_n=\int_a^b[f(x)-s_n(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2. \tag{2}$$

傅立叶系数又一次表現出这么引人注意的性質:它在某种意义上成为所有可能系数的“最佳”者!此外很值得指出的是,对固定 n 值是“最佳”的系数在 n 值更大时仍保持最佳的地位,只是再添加一些新的系数。

等式(2)叫做貝塞尔恒等式。由此得出不等式

$$\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx$$

及(取 $n\to\infty$ 时的极限)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{3}$$

这叫做貝塞尔不等式。奇妙的是，(3)式的級数总是收斂的，无論$f(x)$是所考虑的这类函数中的哪一个。

δ_n的大小随n的增大而递减，因为在它的表出式(2)添加了新的負項。n越大，其和越"平均"趋近所考虑的函数$f(x)$。于是自然发生这样一个問題：能否凭n的增大得到任意小的均方离差，也即$n \to \infty$时是否δ_n趋于0？

如果这情况实現，我們就說$s_n(x)$平均趋于$f(x)$（要注意完全不是指$s_n(x)$在寻常意义下：对$f(x)$的"按点"收斂）。由貝塞尔恒等式可以看出，$s_n(x)$的平均收斂于$f(x)$就等价于成立这个等式[参閱(3)]：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{4}$$

这等式叫做封閉性方程。如果它对每个連續函数$f(x)$都实現，則函数系$\{\varphi_n(x)\}$本身就称为封閉的。

414. 三角函数系的封閉性 現在我們特別应用以上講的話于区間$[0, 2\pi]$[①]內的三角函数系：

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \cdots, \cos mx, \sin mx,\ \cdots. \tag{5}$$

在进行討論时，这里用三角多項式

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{n} (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \tag{1a}$$

来代替和式(1)，它們对函数$f(x)$的"平均"近似性可由

$$\Delta_n = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

来表征。由一般論証推知，在固定的n值之下由相应的傅立叶級

① 为方便起見以后总是以区間$[0, 2\pi]$为依据。

数段 $$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

使得量 Δ_n 达到最小值。

最小值本身由等式

$$\delta_n=\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}f^2(x)dx-\pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right\} \tag{2a}$$

表出，它就是函数系(5)的贝塞尔恒等式，由它可和一般情形一样推出傅立叶系数平方所組成的級数的收斂性及贝塞尔不等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx. \tag{3a}$$

但对所考虑的具体三角函数系这个結果可以精确化而前段末尾所提問題可以完全解决。即，成立下面这个重要的

定理. 无論 $f(x)$ 是区間 $[0,2\pi]$ 内怎样的逐段連續函数，对它

恒有 $$\lim\delta_n=\lim\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx=0,$$

从而 $s_n(x)$ “平均”收斂于 $f(x)$.

换句話說，对上述函数 $f(x)$ 恒成立封閉性方程

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx^{①} \tag{4a}$$

---

① 虽然在十九世紀初已經考虑到接近于这个关系的問題，但其最早的严格証明似乎直到 1892 年才由 de la Valleé Poussin 給出。对直交函数系封閉性理論及其应用搞得最多的是俄罗斯数学家 B. A. Стеклов 院士(1863—1926)。“封閉性方程”这个名称就出于他。

証明时我們将依方便而采用这两种等价的陈述法。証明分成几步来講。

1°. 首先建立一个輔助不等式。我們取两个逐段連續的函数 $\bar{f}(x)$, $\bar{\bar{f}}(x)$，幷且設 $f(x)=\bar{f}(x)\pm\bar{\bar{f}}(x)$。以字母上短綫表示相应于函数 $\bar{f}$ 和 $\bar{\bar{f}}$ 的量，我們显然有

$$f-s_n=(\bar{f}-\bar{s}_n)\pm(\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{s}}_n).$$

由初等不等式 $(a\pm b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ 有

$$(f-s_n)^2\leqslant 2[(\bar{f}-\bar{s}_n)^2+(\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{s}}_n)^2],$$

由此得

$$\int_0^{2\pi}(f-s_n)^2dx\leqslant 2\left\{\int_0^{2\pi}(\bar{f}-\bar{s}_n)^2dx+\int_0^{2\pi}(\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{s}}_n)^2dx\right\}. \quad (6)$$

如果在 $n\to\infty$ 时右边两个积分都趋于 0，则左边的积分也趋于 0。換句話說：如果封閉性方程对两函数 $\bar{f}$ 与 $\bar{\bar{f}}$ 各别成立，則它对其和或差 $f=\bar{f}\pm\bar{\bar{f}}$ 也成立。这結果显然对隨便多少个函数之和都成立。

2°. 現在我們来看这个只取两个值的簡单函数 $f_\alpha(x)$：

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\alpha \text{ 时},\\ 0, & \text{在其他点上。}\end{cases}\quad(0<\alpha\leqslant 2\pi)$$

对这个函数不难直接驗証封閉性方程成立，只要根据下面已知的展开式[参閱 406 段，4)及附注]：

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-1}{n^2}.$$

事实上，对我們的函数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{\alpha}{\pi};\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin n\alpha}{n};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\alpha}{n},$$

如此

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^\infty(a_n^2+b_n^2)=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin^2 n\alpha+(1-\cos n\alpha)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1-\cos n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4}\right]=\frac{\alpha}{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f_\alpha(x)]^2dx.$$

显然，如将数值 1 换成任何其他常数值 c 时，公式(4a)也仍成立

3°. 設 $f_{\alpha\beta}(x)=f_\beta(x)-f_\alpha(x)$ $(0<\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$；因为对函数 f_α 和 f_β 封閉性方程成立，所以由 1° 它对其差 $f_{\alpha\beta}$ 也成立(此差在区間$[\alpha,\beta]$内部取数值 1，在区間外取数值 0)；并且这里数值 1 也可换成任何常数 c。

現在我們取一个任意的逐段常数函数 $\bar f(x)$[①]。因为它除有限多个点上的数值以外都可表为若干个剛才所考慮类型的函数之和，所以由 1° 知等式(4a)对它也成立。

4°. 最后来看任意的逐段連續函数，我們又可以(除有限多个点上之值外)将它看作若干函数 $f(x)$ 之和，每个函数都在某区間$[\alpha,\beta]$内連續（这里$0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi$）而在区間外則等于 0。由 1° 要証明这定理只要对任何这一类型的函数証明封閉性方程成立就行了。

預先将不等式(6)作一些变换。即，由貝塞尔恒等式(2a)——如果将它应用于函数 $\bar f$——显然有

---

① 这就是說，基本区間可分成有限多段，在每段内部函数保持一常数值。

$$\int_0^{2\pi}[\bar{\bar{f}}(x)-\bar{\bar{s}}_n(x)]^2dx \leqslant \int_0^{2\pi}[\bar{\bar{f}}(x)]^2dx.$$

所以不等式(6)如果写成这样时只会加强:

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx \leqslant 2\left\{\int_0^{2\pi}[\bar{f}(x)-\bar{s}_n(x)]^2+\int_0^{2\pi}[\bar{\bar{f}}(x)]^2dx\right\}, \tag{7}$$

此时我們依前認为 $f=\bar{f}+\bar{\bar{f}}$。

回到上面說过的函数 f，我們来証明对它可以做这样一个逐段常数函数 $\bar{f}$，使在全基本区間$[0, 2\pi]$內有

$$|f(x)-\bar{f}(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}. \tag{8}$$

事实上，按康脫定理的推論[75段]，区間$[\alpha, \beta]$可分解为有限多段$[\alpha_i, \beta_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，使每段中函数的摆幅小于$\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}$。現在令函数 $\bar{f}$ 在每个区間$[\alpha_i, \beta_i)$ $(i<n)$內等于 $f(\alpha_i)$ 而在区間$[\alpha_n, \beta_n]$內等于 $f(\alpha_n)$，在区間$[\alpha, \beta)$外則設 $\bar{f}=0$。显然，函数 $\bar{f}$ 就是所求的。

如果取 $\bar{\bar{f}}=f-\bar{f}$，則由(8)有

$$|\bar{\bar{f}}|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}, \text{ 如此 } \int_0^{2\pi}[\bar{\bar{f}}(x)]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

但由3°知不等式(7)右边第一个积分在 $n\to\infty$ 时趋于0并且对充分大的 n 値則小于$\frac{\varepsilon}{4}$。对这些 n 値有

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx<\varepsilon,$$

这就完成了証明。

特例，由此可推知，三角函数系(5)在区間$[0, 2\pi]$內是封閉的。

415. 三角函数系的完备性 上面証明的一般定理有一系列推論，也是頗有意义的。

由它可証明

定理. 除去恒等于0的函数以外，不存在这样的連續函数，它在区間$[0, 2\pi]$[①]內直交于三角函数系(5)的所有函数

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos mx,\ \sin mx,\ \cdots.$$

換句話說，如果一个在区間$[0, 2\pi]$內連續的函数$f(x)$其傅立叶系数全等于0，則該函数也就恒等于0。

事实上，按封閉性方程对这种函数有

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = 0.$$

因为这里被积函数是非負的，所以对$[0, 2\pi]$內所有的X更应恒有

$$\int_0^X [f(x)]^2 dx = 0.$$

依上限微分之，并考慮到被积函数的連續性，得[**183**段]恒等式

$$f(x) \equiv 0.$$

定理中所說的三角函数系的性質就称为它的完备性：这就是說，三角函数系在連續函数类中是完备的。

其次，如果两个連續函数$f_1(x)$和$f_2(x)$有相同的傅立叶系数，則它們必須恒等，因为此时其差$f_2(x) - f_1(x)$的傅立叶系数都等于0。如此，連續函数可由其傅立叶系数惟一地决定。这只是三角函数系完备性的另一陈述法。

附注 一切上面說的話对任何在某区間$[a, b]$內封閉的直交

① 或在任何别的长2π的区間內。

函数系$\{\varphi_m(x)\}$也保持有效；由封闭性方程可得出完备性的，等等。

416. 广义封閉性方程 設給了两个函数$f(x)$和$g(x)$，在区間$[0, 2\pi]$内連續或逐段連續；于是$f+g$和$f-g$也是同样的函数。如果各以a_m, b_m和α_m, β_m表示函数f和g的傅立叶系数，则函数$f\pm g$的傅立叶系数显然是$a_m\pm\alpha_m, b_m\pm\beta_m$。

分别应用封閉性方程于函数$f+g$和$f-g$，得

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m+\alpha_m)^2+(b_m+\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f+g]^2dx$$

和

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m-\alpha_m)^2+(b_m-\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f-g]^2dx.$$

如果将这两个等式两边相减，則由恒等式

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

得出下面的广义封閉性方程

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx. \tag{9}$$

方程(4a)可由此取$g\equiv f$得出。

附注 在区間$[a, b]$内任意直交函数系$\{\varphi_m(x)\}$的一般情形，如封閉性方程(4)对每个連續或逐段連續函数都成立，则对两个这种函数也成立广义封閉性方程

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m c_m\gamma_m=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

这里c_m和γ_m是函数f和g的广义傅立叶系数。証明法完全与刚才一样。

417. 傅立叶級数的逐項积分 我們仍假設$f(x)$是区間$[0,2\pi]$内的逐段連續函数，并設

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \tag{10}$$

是它的傅立叶級数。

此外我們再考虑一个函数 $g(x)$(也是逐段連續的)，它的定义是这样的：

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant x_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{在其他点上。}\end{cases}$$

其傅立叶系数为

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}dx,\quad \alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\cos mx\,dx,$$

$$\beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sin mx\,dx\quad (m=1,2,3,\cdots).$$

如果对这些函数应用广义封閉性方程(9)，則得

$$\int_0^{x_0}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{x_0}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)dx=\int_0^{x_0}f(x)dx. \tag{11}$$

如此，函数 $f(x)$ 的积分可由其相应傅立叶級数逐項积分而得。这里奇妙的是，我們已經証明，即使不假設級数(10)本身收斂于函数 $f(x)$，傅立叶級数也总是可以逐項积分的！①

甚至还可以指出：在公式(9)里将函数 g 的傅立叶系数 α_m, β_m 換成其已知表出式

$$\alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\cos mx\,dx,\quad \beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\sin mx\,dx,$$

$$(m=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

就将它化为等价的形式：

① 最先試图証明傅立叶級数容許逐項积分的是罗巴切夫斯基(1834年)。

$$\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}g(x)dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)g(x)dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx.$$

这个等式可以这样解释：函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(10)甚至在各项乘以函数 $g(x)$ 后仍可逐項积分——其和即函数 f 与 g 之乘积的积分。这里积分乃对区間 $[0, 2\pi]$ 而言。如果我們感覺兴趣的是任何别的区間 $[0,x_0]$ $(0<x_0<2\pi)$，則只須在此区間外令 $g(x)=0$。

418. 几何的解釋 我們要对讀者介紹一种完全新的观点来看本节所講过的东西。現在只考虑某有限区間 $[a,b]$ 内的連續函数 $f(x)$ 并取任一封閉［413 段］直交函数系 $\{\varphi_m(x)\}$（也都是連續函数）作基础；为簡单起見甚至假設这函数系是正規的，如此有

$$\int_a^b[\varphi_m(x)]^2dx=1\quad(m=0,1,2,\cdots).\tag{12}$$

例如，讀者不妨設想所談的是正規三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\ \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}},\cdots,$$

其定义区間是 $[0,2\pi]$ 或 $[-\pi,\pi]$［参閱 **398** 段，(17*)］。

我們把所有函数 $f(x)$ 看作某"矢量空間"的元素 $\vec{f}$，而将两个这种元素的相加及一个元素的乘以一个数量 c 自然地定义为

$$\vec{f}+\vec{g}=f(x)+g(x),\quad c\vec{f}=xf(x).$$

"矢量" $\vec{f}=f(x)$ 之長(常常称为其模)則理解为非負之数

$$\|\vec{f}\|=\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2dx}.\tag{13}$$

这个長显然只有函数 $f(x)$ 恒等于 0 时才等于 0；相应的"矢量"就是我們这空間的"零矢量"。

要验証“长”这个名称是合理的，須檢查其是否满足所謂“三角形公理”[参閱 125 段,(2)]

$$\|\vec{f}+\vec{g}\|\leqslant\|\vec{f}\|+\|\vec{g}\|,$$

也即不等式

$$\sqrt{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2dx}+\sqrt{\int_a^b[g(x)]^2dx}.$$

两边平方起来則化为

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2dx}\cdot\sqrt{\int_a^b[g(x)]^2dx} \tag{14}$$

或

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx\cdot\int_a^b[g(x)]^2dx.$$

这就是布尼亚科夫斯基不等式[①]，它可算是我們已碰到过的哥西代数不等式

$$\sum_{i=1}^m a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

的积分类比[参閱 125 段及第一卷第一分册 237 頁底注]。布尼亚科夫斯基不等式可与哥西不等式一样証明：变数 z 的二次三項式

$$\int_a^b[zf(x)+g(x)]^2dx=$$

$$=z^2\int_a^b[f(x)]^2dx+2z\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b[g(x)]^2dx$$

① В. Я. Буняковский(1804—1889)院士是俄罗斯数学家。他这不等式发表于 1859 年。通常誤称为 Schwartz 不等式，其实 Schwartz 的著作中到 1884 年才出現此式。

不取負值，所以

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx - \left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \geqslant 0,$$

等等。

建立一个“矢量”$\vec{f}$ 与 $\vec{g}$ 間的“角”的概念：$\theta = \sphericalangle(\vec{f}, \vec{g})$，对于我們是方便的，这个角以下列等式作为定义：

$$\cos\theta = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx}}; \tag{15}$$

由不等式(14)知此式右边絕对值不会超过 1。函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“直交”[398 段]：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

即等价于 $\cos\theta = 0$，如此角 θ 成直角。

按模的定义[参閱(13)]我們由(15)得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{g}\| \cdot \cos\theta;$$

因此有理由将左边的积分看作“矢量”$\vec{f}$ 与 $\vec{g}$ 的数积：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \vec{f} \cdot \vec{g}.$$

如果矢量 $\vec{g}$ 是“单位矢量”，即其模 $\|\vec{g}\| = 1$，則数积

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \|\vec{f}\| \cdot \cos\theta$$

可看作“矢量”$\vec{f}$ 在此单位矢量上的射影：

$$\text{пр.}_{\vec{g}} \vec{f}.$$

如果給了一个“矢量”序列$\{\vec{f}_n\}$，則其极限就是指这样一个“矢量”$\vec{f}$，对于它

在$n\to\infty$时 $$\|\vec{f}_n-\vec{f}\|\to 0.$$

回到相应的函数$\{f_n(x)\}$，$f(x)$，我們按模的定义［参閱(13)］有

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx\to 0,$$

如此“矢量”序列$\{\vec{f}_n\}$的收斂于极限矢量f无非就表示函数序列$\{f_n(x)\}$的平均收斂于极限函数$f(x)$［413段］。

現在回到所設的直交而且正規的［参閱(12)］函数系$\{\varphi_m(x)\}$上来。它可解釋为一組相互垂直的“单位矢量”$\{\vec{\varphi}_m\}$。既然这函数系按假設是封閉的，則它也是完备的［415段，附注］，而这就表示，在这基本单位矢量系$\{\vec{\varphi}_m\}$里不能再添加任何新的单位矢量使与所有$\vec{\varphi}_m$都直交了。

我們来考虑任何“矢量”$\vec{f}$在某基本“单位矢量”$\vec{\varphi}_m$上的射影：

$$c_m=\underset{\vec{\varphi}_m}{\text{пр.}}\,\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{\varphi}_m=\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx.$$

我們認得这就是函数$f(x)$的广义傅立叶系数之一①。因为函数$f(x)$由其傅立叶系数惟一地決定［415段，附注］所以“矢量”$\vec{f}$也就由其在基本系$\{\vec{\varphi}_m\}$的“諸单位矢量”上的射影惟一地決定。

乘积$c_m\cdot\varphi_m(x)$，即矢量$c_m\vec{\varphi}_m=\vec{f}_m$，自然可称为“矢量”$\vec{f}$沿“单位矢量”$\vec{\varphi}_m$方向的分量。

現在我們怎样解釋函数$f(x)$的广义傅立叶級数［398段］

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)+\cdots \tag{16}$$

呢？

首先我們看出，由于函数系$\{\varphi_m(x)\}$假設是封閉的，故級数(16)

① 記得函数$\{\varphi_m(x)\}$是正規的，如此所有$\lambda_m=1$［参閱(12)］。

的部分和 $s_n(x)$ 在 $n\to\infty$ 时平均收斂函数 $f(x)$[413 段]，而这就表示，如果收斂性理解为平均收斂則展为傅立叶級数总是可能的。换句話說，“矢量” $\vec{s}_n$ 趋于极限“矢量” $\vec{f}$，这可写成如下展开式的形式：

$$\vec{f}=c_0\vec{\varphi}_0+c_1\vec{\varphi}_1+\cdots+c_m\vec{\varphi}_m+\cdots=\vec{f}_0+\vec{f}_1+\cdots+\vec{f}_m+\cdots,$$

即每个矢量 $\vec{f}$ 都可表为其所有沿单位矢量”方向的分量之和。这就是傅立叶級数展开式的几何意义！

封闭性方程[413 段]由于(12)可写成：

$$\int_a^b[f(x)]^2dx=\sum_{m=0}^{\infty}c_m^2,$$

或

$$\|\vec{f}\|^2=\sum_{m=0}^{\infty}\|\vec{f}_m\|^2.$$

“矢量”长的平方等于其所有分量长平方之和。这就是毕达哥拉斯定理的自然推广(相应于平面上“一矢量分解为两个互相垂直的分量”)

再来看下面的广义封閉性方程[416 段，附注]

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\gamma_m,$$

这里 c_m 是函数 f 的傅立叶系数，而 γ_m 是函数 g 的傅立叶級数。如果将它写成：

$$\vec{f}\cdot\vec{g}=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\gamma_m,$$

則可以看出它与寻常三維空間中两矢量数量积表为三个相互垂直軸上射影的表出式相似[383 段，(1)]。

要揭露所考虑这种函数“空間”与寻常欧氏空間的更深入的相

似性，我們第一須將所考慮函数类扩充，第二須將所用积分定义推广。这些以后將在所謂实变函数論中講[参閱附录第四部分]。

附注　与所有連續函数的集合$\{f\}$的矢量解釋平行，也可考虑其点的解釋，而將各連續函数$f=f(x)$看作其所組成空間中的点。在这情形宜以如下方式引入两个“点”$f=f(x)$与$g=g(x)$間的距离$\rho(f,g)$：

$$\rho(f,g)=\|\vec{f}-\vec{g}\|=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,dx}.$$

前面所謂“矢量”$\vec{f}$之长无非就是“点”f与“原点”0的距离。

如果f, g, h是我們这“空間”中的三个“点”，則“三角形公理”成立而取如下的形式：

$$\rho(f,h)\leqslant\rho(f,g)+\rho(g,h).$$

这形式可由前面的公式中以$\vec{f}-\vec{g}$代$\vec{f}$以$\vec{g}-\vec{h}$代$\vec{g}$得出。

§5. 三角級数簡史

419. 弦振动問題　这个著名問題吸引了十八世紀許多杰出数学家的注意，对于任意函数能否展为三角級数这个問題的提出起了重要的作用。所以我們首先給讀者介紹这个問題及其解答。

設有一条均匀的弦，其长为l，两端固定于x軸上点$x=0$及$x=l$处，并且在某張力作用之下沿此軸处于平衡状态(图 81)。設想在时刻$t=0$該弦在xy平面中(比方設这平面是鉛直的)从平衡位置移开然后听其自然①。于是弦上的点开始在該鉛直平面中振动。如果假設弦上每点M(其横坐标为x)严格沿鉛垂方向振动，則其在时刻$t\geqslant0$的位置可由其縱坐标y来决定，它表示該点对平衡位置的离差。这縱坐标是两个变数x和t的函数：

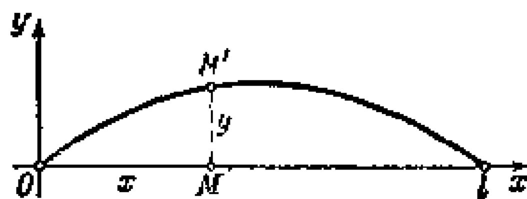


图 81.

$$y=y(x,t),\tag{1}$$

① 为确定起見我們只假設振动是由靜止状态开始的。欧拉的解答是依据这个假設的(参閱下段)。

它有待决定。

在某些(使問題簡化的)假設之下,該現象可由下列偏微分方程來描述:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

这里 a 是一个常数,取决于弦的物理性質。

除去这个方程以外,所求的函数 $y(x, t)$ 还須滿足几个别的条件。首先是,要滿足所謂边界条件:

$$y(0, t)=0, \quad y(l, t)=0 \ (t\geqslant 0), \tag{3}$$

它表出弦两端固定这一事实。然后,如果在初始时刻 $t=0$ 弦上点的离差由函数 $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ 所表示而速度則等于0①,則还要求滿足下面的初始条件:

$$y(x, 0)=f(x), \ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=0 \ (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4}$$

如此,終于将問題归結为求这样一个函数 $y(x, t)$,它对 $0\leqslant x\leqslant l$ 以及 $t\geqslant 0$ 滿足方程(2)以及条件(3)和(4)。

附注 既然在 $t=0$ 时化为 $f(x)$ 的函数 $y(x, t)$ 应滿足方程(2)及条件(3),特别是在初始时刻,則函数 $f(x)$ 本身必須假設在区間 $[0, l]$ 内可微分两次,并且还要滿足条件

$$f(0)=0, \quad f(l)=0, \tag{5a}$$

以及

$$f''(0)=0, \quad f''(l)=0. \tag{5б}$$

420. 达朗貝尔及欧拉的解法 这两位学者最先明白地列出方程(2)。它的通解两人都表为如下的形式[达朗貝在先(1747年),欧拉在后(1748年)]:

$$y=\varphi(x+at)+\psi(x-at). \tag{6}$$

这里 $\varphi(u)$ 和 $\psi(v)$ 表示对所有自变数值給出的"任意"函数。为了我們的目的只需要直接驗証(6)式在 x 和 t 的一切值之下都滿足条件(2),而不論 φ 和 ψ 是怎样的可微分两次的函数。

現在发生这样一个問題:如何选擇这些函数,使边界条件及初始条件也滿足,即使[参閱(3)]

$$\varphi(at)+\psi(-at)=0, \ \varphi(l+at)+\psi(l-at)=0 \ (t\geqslant 0) \tag{3a}$$

并且使[参閱(4)]

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \ \varphi'(x)-\psi'(x)=0 \ (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4a}$$

①見前頁底注。

在此显然函数 $\varphi(u)$ 只要对 $u\geqslant 0$ 来决定，而函数 $\psi(v)$ 对 $v\leqslant l$ 来决定。

首先，将等式(4a)第二式积分，得

$$\varphi(x)=\psi(x)^{①}\quad(0\leqslant x\leqslant l).$$

于是，由其第一式知两函数都等于$\frac{1}{2}f(x)$：如此，在区間$[0, l]$內它們已經

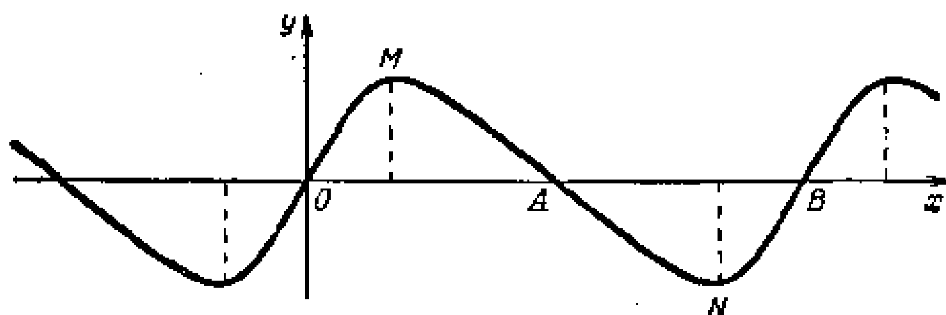


图 82.

决定了(其图象見图 82 所表曲綫 OMA). 因为函数 φ 只在区間$(l, +\infty)$內还有待决定，而函数 ψ 只在与它不交迭的区間$(-\infty, 0)$內还有待决定，所以为写起来簡单一点可将函数符号 ψ 换成 φ 并在这些区間內由条件[参閱(3a)]

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=0, \quad (x\geqslant 0) \tag{7}$$

$$\varphi(l+x)+\varphi(l-x)=0 \tag{8}$$

出发来决定函数 $\varphi(x)$.

首先在(8)中令 x 由 0 变至 l 我們就能在区間$(l, 2l]$內决定 φ：

$$\varphi(l+x)=-\varphi(l-x)=-\frac{1}{2}f(l-x)$$

(图 82 上曲綫 ANB)。現在，函数 φ 在区間 $[0, 2l]$ 內已經完全确定，由(5a)又有

$$\varphi(0)=\varphi(2l)=0.$$

我們来証明它一般有周期 $2l$，因此在整个区間$(-\infty, +\infty)$內也都已經决定了。

先設 $\xi\geqslant -l$；在(8)中令 $x=\xi+l$，于是由(7)得

$$\varphi(\xi+2l)=-\varphi(-\xi)=\varphi(\xi).$$

同样，当 $\xi<-l$ 时在(8)中取 $x=-(\xi+l)$，再依据(7)，仍得出同样結果。一般，可按欧拉表出式得出函数 φ 的图象为一"蜿蜒曲綫"如图 82。它应該对称于原点，因为由(7)知 $\varphi(x)$ 是奇函数。

---

① 可以不写积分常数 C 也不致減弱一般性，因为由 φ 減去$\frac{1}{2}$C 而在 ψ 上加 $\frac{1}{2}$C 后該等式总可实現。

因为函数 $f(x)$ 在区間 $[0, l]$ 內有两个导函数并且还满足条件 (5a) 和 (5б)，所以可証明按上述方式决定的函数 $\varphi(x)$ 是到处二次可微分的，包括粘接各段曲綫之点 $kl\,(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 在內。所求之解可用这个函数表为

$$y=\varphi(x+at)+\varphi(x-at) \tag{9}$$

的形式。

421. 戴劳及但尼尔·貝努里的解法[①] 尙在 1713 年戴劳研究过拉紧的弦的运动問題并且决定了其振动周期。他的出发点是一个实質上与方程 (2) 等价的命題。結果他得出这样一个推論：如果弦整个振动，則它在每时刻有正弦曲綫弧的形状。

当然，这只是弦的可能振动形式之一。由戴劳的論証可推知存在无数多这种形式：只要将弦分为 n 等分 $(n\geqslant2)$，在每部分中各別应用前面的結論就行了。在这情形弦的形状是 n 个相繼的正弦曲綫弧。

我們将用純分析的方法得出方程 (2) 所有这些特解，并且直接由方程出发。設所求的解（异于我們所不感兴趣的明显解零），可表为两函数之积的形式，其中一个只含 x 而另一个只含 t：

$$y=X(x)\cdot T(t).$$

方程 (2) 在这情形成为：

$$XT''=a^2X''T$$

（这里带撇的字母表示对函数所依賴的变数的导数）或最后成为

$$\frac{T''}{T}=a^2\frac{X''}{X}. \tag{10}$$

因为这等式左边与 x 无关，而右边与 t 无关，所以其共同值事实上既与 x 无关，也与 t 无关，即归結为一常数，我們設它取 $-a^2\lambda^2$ 的形式 $(\lambda>0)$。于是方程 (10) 拆成两个：

$$T''+a^2\lambda^2T=0,\quad X''+\lambda^2X=0;$$

这两个常微分方程的通解各有下列形状：

$$T=A\cos a\lambda t+B\sin a\lambda t,$$
$$X=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x.$$

要函数 $y=XT$ 也满足边界条件 (3)，則函数 X 应满足該条件。令其中 $x=0$，立即看出 $C=0$；令 $x=l$ 并考慮到 D 已不能为 0，則得条件

① Daniel Bernoulli (1700—1782) 是 Johann Bernoulli 的儿子并且是 Euler 的朋友。1725 至 1733 年在彼得堡科学院活跃地工作。

$$\sin\lambda l=0,$$

由此有 $\lambda l=n\pi$，而 n 为自然数。如此，λ 只能有下列諸值之一：

$$\lambda_1=\frac{\pi}{l},\quad \lambda_2=\frac{2\pi}{l},\ \cdots,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ \cdots①.$$

如果認为弦上所有点的初速都等于 0，則 $T'(0)=0$，由此 $B=0$. 在 $\lambda=\lambda_n$ 时以 b_n 表示常数 AD，我們得方程(2)的上述那一系列特解：

$$y_n=b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

如果弦是按这样的規律振动的，則所有它的点都按同一周期

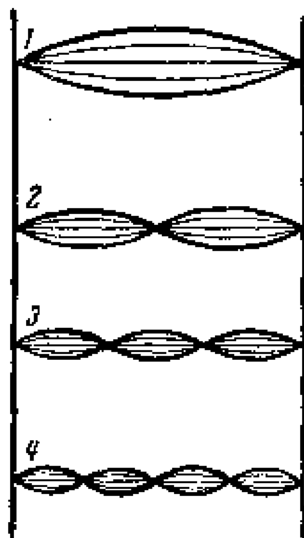


图 83.

$$T_n=\frac{2l}{na}$$

而振动，这周期相应于某一定高度的音。每点振动的振幅则取决于其位置而等于

$$\left|b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|.$$

全弦可分为 n 个相等的段，而一段中的点全处于同一相位，相邻两段则处于相反的相位。对 $n=1,2,3,4$ 等情形弦的位置逐一表出如图 83。分隔两段之点处于静止状态；这就是所謂"波的"节点。一段的中点——所謂"波腹"——以最大振幅而振动。

在达朗貝尔和欧拉关于弦振动問題的一般研究后跟着出現了但尼尔·貝努里(1753 年)关于同一題目的論著。貝努里注意到弦振动形式之繁多是戴劳已經知道的，根据物理观察提出了这个論断：所有这些振动同时实現，因而弦同时发出各种高度的音。按他的說法，发生了各种振动的所謂"混合"(按我們的說法是"迭加")，如此弦的全振动可由等式

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11}$$

来描述。基音由第一成分 y_1 决定；它的相应周期是 $T_1=\frac{2l}{a}$。弦所能发出的其他的音，或称泛音，可由其他成分决定。它們的相应周期是 $T_2=\frac{1}{2}T_1$，$T_3=$

① 如果我們将关系式(10)的常数值取成 $a^2\lambda^2$ 的形式，則能滿足端点条件的只有一个恒等于 0 的函数 X。

$=\frac{1}{3}T_1,\cdots$。如果用手指按住弦的中心，则基音，和奇泛音立即消失，因为对于这些音，这里恰好是波腹。在弦中心有波节的偶泛音则完全保持不变。对于偶泛音来說第二泛音就处于基音的地位，而弦就发出比原来高一倍的音。正是物理內容的丰富，——而又完全符合实验——迫使貝努里宁取解(11)而不取欧拉解(9)。应該說，欧拉自己也提到解(11)，但只作为可能的特解。对于貝努里来說——他自己承認——他的解的一般性問題当时是不清楚的，但他并不認为其他的解(如果存在的話)究能有怎样(物理的)意义。

現在我們依据上面所講理論来証明，公式(11)在系数的适当选擇之下[①]与公式(9)完全等同。当然，在此我們假設以前对 $f(x)$ 所加的那些条件[419段，附注]是满足的。

我們就由系数 b_n 的选擇开始。如果我們要使公式(11)給出满足初始条件(4)：

$$y(x,0)=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

的解，則在(11)中令 $x=0$ 而应有

$$\sum_1^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l).\tag{12}$$

因为函数 $f(x)$ 可微分并且在区間 $[0,l]$ 两端化为 0，所以只要取［参閱 405 段，(22)］

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,3\cdots)$$

展开式(12)就在全区間上都成立，这就是所要証明的。

但級数(12)对一切 x 值都成立，并且在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 全区間上可用它定义一个函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

如此，在区間$[0,l]$內这个函数等于$\frac{1}{2}f(x)$；此外，不难直接驗証，对于它条件(7)和(8)都满足。由此已可推知，它恰好与前段講的那个函数 φ 一致，因为所有上述条件，加在一起，可将它惟一地确定。

現在我們可以将已經知道的欧拉解(9)表为：

---

① 貝努里未涉及系数問題。

$$y=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left[\sin\frac{n\pi(x+at)}{l}+\sin\frac{n\pi(x-at)}{l}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

如此展开式(11)在上述系数选擇法之下事实上給出方程(2)的解，并且与以前的解完全一样。

422. 关于弦振动問題的爭論 这場爭論沿着两个方向展开。

首先是，尽管达朗貝尔和欧拉所提出的解形式上相似，但不久就看出来，两位学者在下列問題上意見极为分歧：在分析中容許考慮什么样的函数？特別是，表示弦的初始形状的函数 f 应該是怎样的函数？

欧拉不要求，这函数在整个区間$[0, l]$内以統一的分析式子来定义(这类函数欧拉称为"連續的")。它可以是"混合的"，即在区間的不同部分以不同的式子給出。欧拉認为甚至可能簡直用"信手画来的曲綫"来决定弦的初始位置：因为在这情形可按他所指出的方法作出函数 φ 的图象(图 82)，而由此图象已不难依几何方式确定任何时刻弦的形状。

达朗貝尔的見解則不然：依他看来，不管是出发的函数 $f(x)$，还是那在无穷区間里能按它决定的函数 $\varphi(x)$，都应該遵循統一的分析規律。問題的分析解法只有当"振动弦的种种位置可以概括于同一方程"时才是可能的。后来达朗貝尔集中其反对意見于曲率問題，这个曲率应該在所有点上都是确定的，因为在方程本身里出現第二阶导数$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；然而当 f 任意給出并且 φ 的图象由一些片段"粘合"起来时就不保証其存在了。

如果要求方程(2)成立，則最后这种想法不能認为沒有一点說服力[参閱我們前面在函数 f 所加那些限制(**419**，附注)]。

关于"任意的函数"——它們最先在解偏微分方程时出現——的性质的問題①在数学家中長久地引起了爭論。1787 年——两位学者均已去世——彼得堡科学院还为这爭論問題設置奖金，于 1790 年授与路易·阿尔波格，其观点与欧拉接近。

現在轉到第二个爭論問題，其基本內容与本簡史有直接連系。这回欧拉和达朗貝尔在同一方面，两人都反对貝努里，認为他的解不是一般的，因为它远未穷尽弦振动的一切可能規律。

欧拉淸楚地理解，一切都归結为这个問題：是否任何(表示弦的初始形状的)函数 f 都能展为倍角正弦的級数？他自己对这問題的答案是否定的。首

① 这就与解常微分方程时所遇的任意常数相似。

先是，弦的位置所沿的初始曲綫可以完全不能以任何方程表出，即特别是不能表为貝努里方程(12)。但即使它可表为分析式，則这式子也可能并不具有由方程(12)表出的每一曲綫共同的那些特点。这些特点中第一是纵坐标(横坐标的函数)的奇性，第二是这函数有周期 $2l$。

欧拉的反駁需要解釋：須知函数 $f(x)$ 只在由 0 至 l 的区間內給出，在这区間內这些特点根本表現不出来。但当时还默認如果变数在某区間变化时两个解分析式有相等的値則它們在区間外也到处恒等。所以，比方說，如果函数 $f(x)$ 在区間$(0, l)$內用决沒有第二种性質的代数式給出，則由于上面說的，甚至在这一个区間范圍內它也已經不能与(12)那样的式子一致了。

达朗貝尔在其反駁中还更进一步：依他所見，甚至即使欧拉的曲綫各部分都由統一的分析式联系起来，則它也仍然不必須遵循貝努里所指出的規律。如此达朗貝尔否定了恰恰滿足他自己的要求——要求振动的弦的种种不同位置都"由同一方程所概括"——的解。

在貝努里这一方面則他現在堅决主張，像(12)那样的方程包括所有的曲綫：既然拥有无限多系数，就可使它所表出的曲綫通过无論多少个預先給定的点。此时在他眼中特别有价値的仍然是在于問題的物理方面，即"能將存在于自然界的看起来不服从任何規律的运动化为簡單等时运动…"。

423. 函数的三角展开式。系数的决定 在所有这些討論中最令人惊异的是：欧拉此时自己已經拥有代数函数展为三角級数的例子(当然完全是形式地得来的)。

在"微分学"(1755 年)里我們可找到展开式

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=\frac{\pi-x}{2} \tag{13}$$

[参閱 405 段，1)]，关于它欧拉于 1744 年就已写信告訴他的朋友戈尔德巴赫。1760 年刊出欧拉 1754 年所写的論文，其中由展开式

$$\frac{\cos x-a}{1+a^2-2a\cos x}=\cos x+a\cos 2x+a^2\cos 3x+a^3\cos 4x+\cdots$$

出发并且令 $a=\pm 1$ 而得出发散級数

$$\begin{aligned}\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cdots&=-\frac{1}{2},\\ \cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots&=\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{14}$$

然后將第二式逐項积分而得下列結果：

$$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=\frac{x}{2}. \tag{15}$$

[参閱 406 段, 2)], 欧拉解釋道:"沒有附加常数的必要, 因为在 $x=0$ 时总和本身化为 0"。对这些及类似的展开式的应用范圍欧拉未有任何指示。

有趣的是, 欧拉沒有由級数(14)的第一个逐項积分以得出展开式(13)。这是后来(1772 年)D. 貝努里才做出的。他首先强調, 等式

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=C-\frac{x}{2}$$

中积分常数的决定須要"小心": 例如, 不能簡单地令 $x=0$ 来决定; 貝努里令 $x=\frac{\pi}{2}$ 并利用著名的萊卜尼玆級数[255 段(20)]而导至等式

$$C-\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}, \text{ 由此得 } C=\frac{\pi}{2}.$$

貝努里(最先)明确指出所得展开式的应用范圍,——由 0 至 2π 的区間, 而对 $x=0(2\pi)$ 则等式不成立。此外, 对其他区間: 由 2π 至 4π, 由 4π 至 6π 等等則积分常数都須相应地予以改变(虽然这也"与連續性規律冲突")。

如何确定預先給定的函数的三角展开式系数这一重要問題——依一般形式——似乎是最先由克萊罗提出的, 見于其 1757 年一篇理論天文学的論文。其中談到函数在由 0 至 π 的区間內依余弦的級数展开式。作者先解决一个內插法問題, 将級数限制于有限多項(n 項)而令其和与同一数目等距离点上的函数值一致; 系数則以某种和的形式得出。然后他只是"取 n 无穷", 实質上即是取极限, 而以我們所熟悉的积分表示式的形式确定"精确"的系数值[405 段, (16)]①。

这样的公式 1777 年欧拉自己也曾得出, 它用的正是我們現在通行的方法, 也即用逐項积分的方法。(欧拉的論文被迟了很久才发表出来——已經是 1798 年了)。欧拉将其結果陈述为"一般定理"的形式, 其条件中含有函数能展为余弦級数的假設。至于是否任意函数都能有这种展开式則在此未提及。

对待这个問題的态度的轉折点是上一世紀傅立叶关于熱傳导的数学理論的研究。这些研究于1807年起由巴黎科学院以各別通訊及备忘的形式作了报导, 并大部总結于"熱的分析理論"(1822年)一著作中, 此书很快就广泛流傳。

傅立叶与欧拉一样也用逐項积分法建立了函数的三角展开式系数的积

① 內插法問題——联系弦振动形式問題——若干年后也由拉格朗日解决。

分公式。由于用这些公式能很容易地算出“完全任意的函数”的系数，他有了所有这种函数都能如此展开的信念。在傅立叶同时代人士中产生深刻印象的是在区間各部分各有不同規律的函数的展开式，例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\alpha}{n}\sin nx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 当\ 0<x<\alpha\ 时,\\ 0, & 当\ \alpha<x<\pi\ 时。\end{cases}$$

傅立叶（在由 0 至 π 区間中）将偶函数 $\cos x$ 用正弦展开，而奇函数 $\sin x$ 用余弦展开。这些給以前的看法一个坚决的打击：所謂“混合”函数与“連續”函数（按欧拉的术語）間的差別消失了。同时以前关于“任意”函数的三角展开的爭論以有利于貝努里一方而确定地解决了。

在一系列情形下可以直接驗証傅立叶所建立展开式是收斂于相应的函数的，另一方面，这些展开式在数学物理中找到了越来越广大的应用。但是，尽管如此，傅立叶的思想起初很少得到同情：逐項积分法当时虽已习用，但它不是証明而是假設展开式的可能性，而后者正有待証明！

424. 傅立叶級数收斂性証明及其他問題 不錯，傅立叶自己在其著作末尾已經尝試証明函数的三角展开式的正确，但他的論証在分析的严密性方面是远远不够，虽然他那以几何形式表出的基本观念事实上是正确的。后来跟着有别的作家进行过尝試，其中包括哥西，但这些尝試也引起了反对。

对傅立叶的結論給出第一个眞正严密的証明的是狄利希萊(1829年)，这个証明实质上用了傅立叶自己的想法。虽然在論文的标題上①还有“任意函数”的字样，但事实上狄利希萊精确地限制了他所考慮的函数类：这类函数在区間$[-\pi,\pi]$內有定义并且有限，逐段連續并且逐段单調②。如果函数 $f(x)$ 滿足这些条件，則如狄利希萊所証明，它的按傅立叶公式組成的三角級数在 $-\pi<x<\pi$ 时收斂于和

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

而 $x=\pm\pi$ 时收斂于和

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

經过不长的时間后(1834—1835年)，罗巴切夫斯基也給出这展开定理的

① Peter G. Lejeune Dirichlet“論在已知范圍內表示任意函数的三角級数收斂性”（哈尔科夫数学丛书，B类第二集，1914，3—23 頁）。

② 这就是說基本区間可分为有限多段，每段里函数都各別单調变化。

証明，但在函数上加上另一些与狄利希萊不同的条件。即罗巴切夫斯基假設函数一般是可微分的，最多要除去有限个跳跃点，以及函数或导数由这边或那边趋于无穷的点；同时函数还要保持可积分——依正常或非正常的意义①。狄利希萊条件与罗巴切夫斯基条件两者之中，沒有一个能包括另外一个。

后来别的学者建立了一系列关于傅立叶級数收斂于原函数的更一般的充分判定法。

在三角級数論发展中占重要地位的是黎曼的一篇著名的論文②（成于1854年，刊出于1867年）。他开头先略述这問題的历史。然后講定积分概念的精确化并且建立其存在的条件。由此推广了傅立叶級数的应用范围（例如搞清了狄利希萊定理中任何关于函数連續性的假設都是不必要的）。但該論文主要內容却是考慮像

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{16}$$

这一般形式的三角級数并且闡明了用这类級数表示周期2π的任意函数$f(x)$的必要条件。对級数(16)黎曼做出級数

$$\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2},$$

它是由級数(16)經两次形式的逐項积分得出的。在$a_n\to 0$及$b_n\to 0$的假設之下（問題总可化为这种情形），后一級数在$-\infty$至$+\infty$全区間內均匀收斂并且在其中定义一个連續函数$F(x)$。論文的最后部分講函数$F(x)$的性質及其与函数$f(x)$的关系。与黎曼論文接近的有一系列别的学者的作品，利用了他用来研究級数(16)的方法和他所得出的一些結果。

首先发生了函数的三角級展开式的惟一性問題：須知給出这种展开式的系数的欧拉-傅立叶公式是用級数的逐項积分法建立起来的，而在上世紀后半期中已認識到这种方法是不能无条件采用的。第一个提出上述問題的是海涅氏③（1870年），但其完全的解决是这时候康托尔給出的，他証明了下

① Н. И. Лобачевский "关于三角級数收斂性"及"无穷級数收斂性判定法……"（全集第五卷，1951，31—80及81—162頁）。

② Bernhard Riemann，"論用三角級数表示函数的可能性"（哈尔科夫数学丛书，B类第二集1914，27—85頁，或文集1948第225—261頁）。

③ G.E. Heine(1821—1881)是德国数学家。

面这个一般的定理：如果函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 內能展为像(16)式那样的級数，則这种展开式是惟一的。上述惟一性在所說区間中有一些这样的例外点时也仍成立。在这些点上不知道級数的和是什么，也不知道它是否收斂(不过如果这种例外点的集合是无穷的，則它还須有某一些限制)。

函数 $f(x)$ 的这个惟一展开式的系数又如何呢（如果能有这种展开式的話）？是否总是和傅立叶的系数一样？当然，这問題只能对凡是出現于欧拉-傅立叶公式中的积分都有意义的那种函数来提出。很奇妙的是，这問題的答案竟是肯定的。起先是1872年阿斯科里① 对連續函数加以确立，然后是1874年杜·波阿-雷蒙② 对正常可积函数加以确立。后来这結果还推广到更广义的可积分函数上。这些作品最先有力地說明了研究者对傅立叶級数展开式这样特殊地注意是有理的。

只剩下一个問題。狄利希萊相信每个周期为 2π 的連續函数都能展为傅立叶級数，不过他不能証明。別的数学家似乎也有同样的信念。但是杜·波阿-雷蒙經过一系列徒然的尝試来証明狄利希萊的假設后，于1876年举例推翻了它。他做出了这样一个連續函数，在任意小的区間中都有无穷多个点，使它的傅立叶級数成为发散。

关于历史談到这里就結束了。虽然三角級数論的初等部分无疑屬于分析原理的范圍，但进一步的发展就要牵涉到讀者所不熟悉的較精致的概念和知識了。

425. 結尾語 我們要在此强調指出三角級数論在数学分析史中所占的特殊地位。

首先是，密切連系着这种理論的是函数概念本身的明确化。欧拉与但尼尔·貝努里关于"任意"函数展为三角級数的爭論大有助于消除某些偏見和不正确的思想并終于在傅立叶的著作中予以澄清。函数的現代一般定义恰好在罗巴切夫斯基和狄利希萊的三角級数研究中找到决不是什么偶然的事情！

联系着傅立叶級数論的需要，黎曼明确化了并且推广了定积分概念。康托尔在其所建立的无穷集合論中最先做的几步是关于三角級数展开式惟一性問題的。現代发散級数广义求和理論也肇始于波阿松③ 关于三角級数求

---

① Julio Ascoli(1843—1896)是意大利数学家。

② P. du Bois-Reymond(1831—1889)是德国数学家，生于瑞士。

③ Siméon Denis Poisson(1781—1840)是法国杰出力学家物理学家兼数学家。

和的研究。甚至有些精致的分析概念（例如，数项級数的絕对收斂与非絕对收斂及函数級数的均匀收斂与非均匀收斂等）即使其出現与三角級数理論无关，但它們也立即被应用到这种級数上，后者似乎成了其重要性的試金石。这种情況至今仍旧如此。

三角級数在数学物理及許多技术部門中有直接的应用（讀者由前面所講弦振动問題之例当可对此有点概念）。但应用范圍更广的是所謂“广义傅立叶級数”，即依种种别的直交函数系的展开式，三角展开式可算作它們的模型而它們的理論与傅立叶級数論密切地交織在一起。

附录　数学分析进一步发展概况

讀者掌握了数学分析基础知識之后，当然乐于知道目前組成(广义的)数学分析的各种科目的情况，哪怕只是一个大略的輪廓也好。

I. 微 分 方 程

关于分析的这一部門讀者在大学課程里已經知道一点，因此現在可以談得簡略些。

在微积分发展的"史前期"，已經出現了当时所謂"切綫問題之逆"，也即由切綫性質来求原曲綫的問題。在牛頓与萊卜尼茲的著名通信中提到过这些問題[228 段]；那里萊卜尼茲最先采用了"微分方程"的名称。

牛頓在其"流数术"中所提出的第二基本問題——由含流数的方程求流量間的关系——我們在 225 段已經指出它就是常微分方程的一般求积問題。牛頓一般是用冪級数来解的而不力求将解表为"有限的"分析式。萊卜尼茲及貝努里兄弟对微分方程花了很多力量，有时也利用了无穷級数。但正是他們最先系統嘗試用化为求积来解某些类型的一阶微分方程。

直到十八世紀，微分方程的理論才发展到自成独立学科的地步。在此起重大作用的是欧拉的大量而多样的作品。

我們要記得，常微分方程的"全解"(即通解)及"特解"的概念就是欧拉所建立的；他对于不包含在全积分集的解(奇解)也搞得不少。他广泛地发展了积分因子的方法，不仅是对一阶方程的，并且也有对高阶方程的。欧拉还創造了用特征方程来解常系数綫性齐次微分方程的方法并且闡明了其通积分的形式。联系着圓膜振动問題，欧拉最先考虑到一般的圓柱函数方程

$$\left(\alpha^2-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}=0$$

(后来称为"貝塞尔方程")，而将其解表为无穷級数的形式。常微分方程的第一种近似解法也出于欧拉之手。

欧拉以及克萊罗、拉格朗日等等十八世紀数学家的工作大大地推进了常微分方程的形式的理論。

現在来談偏微分方程。在这方面欧拉也有很大的功績。他对一阶方程作了許多研究。另一方面，許多力学和物理学問題常常使欧拉考虑到二阶（及更高阶）的方程①。偏微分方程的特点是在解里出現任意函数。这情況是达朗貝尔最先以弦的振动方程为例指出的[420 段]，但欧拉則利用任意函数，使由所考慮的問題产生的初始条件也得到滿足，而由此将研究进行到底。

与欧拉同时代的但尼尔·貝努里的种种作品也对数学物理后来的发展起了重大的影响。他提出解彈性系振动問題的一般方法。在此所求相应方程之解分解为一系列最簡单的解；弦振动方程之解即其一例[421 段]。数学物理在十九世紀之初已經繁荣起来，并且是与波阿松、傅立叶、哥西及奥斯脫罗格拉德斯基等等的名字分不开的。

提高严密性的一般傾向自然引起了微分方程（或方程組）的解的存在問題。这里关于常微分方程的最早結果是哥西得出的，关于偏微分方程的結果則是苏菲亚·柯瓦列夫斯卡婭②得出的。

前一世紀之末，由于力学和天文学的要求，出現了常微分方程及这种方程組的定性理論，即按方程本身来决定解的种种性质而不用积分起来。这种理論的奠基者是龐加雷和李亚普諾夫③。李亚普諾夫的理想在苏联数学家的著作中有了进一步的发展。

我們还要指出，最近时期一些年輕的分析科目——实变函数論及泛函分析——对微分方程理論（特别是偏微分方程）发生了确定的影响（参閱第五章及第六章）。这种影响不仅反映在微分方程理論的一般观点及其基本概念的理解法上，并且也在这种理論里引出了重要的具体結果。

II. 变分法

变分法产生于十七世紀之末即在“无穷小分析”本身建立之后不久；但它同时又組成所謂泛函分析的一部分，后者是本世紀才发展起来的（参閱第六章）。

为叙述起来清楚一点，我們首先建立一个属于泛函分析的概念。

---

① 这类問題及相应方程之解法組成所謂数学物理的对象。

② Софья Васильевна Ковалевская（1850—1891）是第一个女数学教授。

③ 法国学者 A. Poincaré（1854—1912）及俄罗斯院士 Александр Михайлович Ляпунов（1857—1918）是两位杰出的数学家

設有一条平面曲綫(图 84)

$$y=f(x)\ (x_0\leqslant x\leqslant x_1).$$

我們来考慮：1）以它为界的曲綫梯形的面积P，2）曲綫弧长S，3）該曲綫繞x軸迴轉所得曲面之面积Q，4）以此曲面为界的迴轉体之体积V。这些例子中的量都是取决于曲綫的形狀的，或者說取决于函数f的形式的，也即取决于其全体数值的。这些量在前面都有了积分的表示法［196, 201, 205, 198 諸段］。

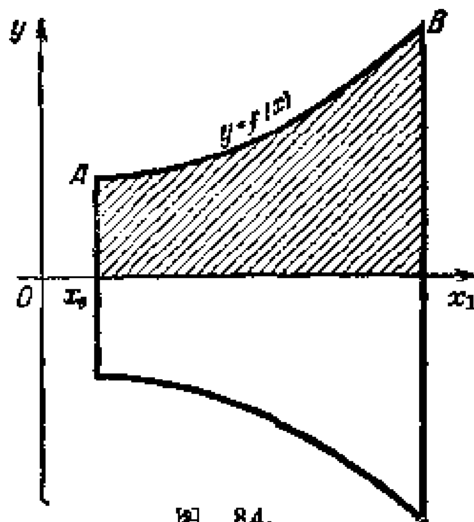


图 84.

$$\left.\begin{aligned}P&=\int_{x_0}^{x_1}y(x)dx,\quad S=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,\\ Q&=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,\ V=\pi\int_{x_0}^{x_1}[y(x)]^2dx.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

我們看出，函数y在此处于"自变量"的地位：它的給定就惟一地决定每个量的值。在这样的情形，即对函数$y=y(x)$按某一法則有某一变量的数值与之相应时，則此变量称为函数y的泛函而表成

$$U(y)①.$$

(1)中的泛函都是下列泛函的特例：

$$U(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx,\tag{2}$$

这里F理解为三个自变量的已知函数，而$y=y(x)$是x的任意(連續可微)函数，只要能使被积式及积分有意义就行了。

为簡单起見我們現在限于对(2)型泛函来陈述最簡单的变分法問題如下：在所有連結点(x_0, y_0)和点(x_1, y_1)的光滑曲綫中試找出一条使泛函(2)有最大值(或最小值)的曲綫。

但是泛函常常是只就"局部"极大或极小值来研究的，——泛函在所求曲

① 不可将泛函与函数之函数(即复合函数)相混：在复合函数中对每个x值分別有一数值与之相应，而在泛函中則对整个函数$y(x)$有一个数与之相应。

綫上之值只与它在充分"接近"(在某种意义下)所求曲綫上之值比較，不难看出这里与单变量或多变数函数情形的"局部"极值定义相似之处 [112, 151 段]。

变分法通常算是起源于 1696 年，当时約翰·貝努里以解(伽里略所提出的)捷綫問題(即最速降曲綫問題)来向其同时代的数学家挑战。問題是这样的：由連結两个不同在一鉛垂綫上的点 A 与 B 的一切曲綫之中找出这样一条曲綫，使一个质点(只在重力影响之下而无初速)沿該綫由点 A 滑降至点 B 的时間最短。所求曲綫得出是一条旋輪綫，其底是水平綫而尖端在点 A。

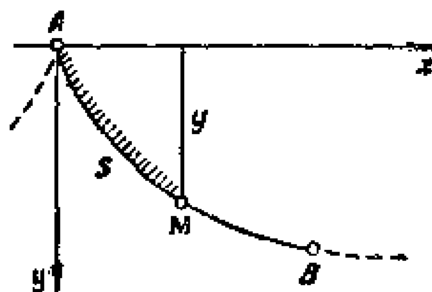


图 85.

这就是一个类型(2)的泛函問題，設坐标軸布列如图85。$y=y(x)$ 是連結点 $A(0, 0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 的任一曲綫。在一个具有質量 m 的质点沿此曲綫由位置 A 移动至位置 B 时，重力作的功是 $mg\cdot y$，它按"动能定律"应該等于該质点的动能 $\frac{1}{2}mv^2$。由此有

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

及

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx.$$

对 x 由 0 至 x_1 积分起来終于得出由 A 移动至 B 所費总时間 T 的表出式如下

$$T=T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx, \tag{3}$$

它正是屬于(2)的形式。

在这問題之后跟着有另一些問題；它們的解法全不一样，每个都需要特殊的办法：发生了一种与无穷小分析形成之前的那一阶段相像的情况！

由 1726 年起彼得堡科学院的刊物上开始发表欧拉关于这新型极值問題的一系列作品。它們总結于名著的論著："求具有极大极小性質的曲綫的方法，……"(1744 年)①。这里最先給出了解种种类型变分法問題的一般的"直綫"方法。欧拉以折綫替代曲綫而将变分法問題化为求多变量函数的极值問題。

例如，在最簡单的变分問題的情形，上面講的就是关于折綫縱标 $y^{(i)}$ 的

① 有俄文版(ГТТИ, 1934)。

函数

$$\sum_i F\left(x^{(i)}, y^{(i)}, \frac{\Delta y^{(i)}}{\Delta x^{(i)}}\right)\cdot \Delta x^{(i)}$$

的极値。令此式对任何縱标 $y^{(i)}$ 的导函数等于 0，欧拉終于得出二阶微分方程

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$$

或者写成展开的形式

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y}\cdot y' - F''_{y'y'}\cdot y'' = 0,$$

如此，这个方程表出曲綫 $y=y(x)$ 使泛函(2) 达其极値的必要条件。如果我們能結合边界条件 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ 而解出欧拉微分方程，則常常可以立即得出所求的曲綫。例如，在捷綫問題的情形可以取[参閱(3)]

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$$

而欧拉方程有这样的形状：

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

由此不难降阶而求得首次积分

$$y(y'^2+1) = 2C_1,$$

如此

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2C_1 - y}}dy.$$

这里令 $y=C_1(1-\cos t)$ 我們求得 $dx = C_1(1-\cos t)dt$，故 $x = C_1(t-\sin t)+$ $+C_2$。假定 $t=0$ 时曲綫通过原点，即得 $C_2=0$；常数 C_1 則可由曲綫通过第二个已知点来决定。如此就得出上面所說的旋輪綫。

虽然欧拉的方法是很繁复的并且論証也欠严密，但他的这些研究已奠定了变分法这一特殊数学学科的初步。

稍后，当时还年輕的拉格朗日建立了变分的方法而在变分法历史中揭开了新的一頁，"变分法"这个名称也就由此而来。在 1755 年他写信告知欧拉，而欧拉在后来的著作中也就采用了这种新方法。变分法概念与寻常分析中的微分概念很为类似，但所联系的不是 x 的变化，而是函数 $y(x)$ 的变化。如果函数 $y(x)$ 使泛函 $U(y)$ 达其极値，則 U 的变分 δU 变成 0（也只是必要条件！）。

变分法的历史就讲到这里为止，我們只再提一提，拉格朗日的理論被奥斯脫罗格拉德斯基推广到了多重积分的情形；以后更建立了极值的充分条件；最后，在近几十年来对欧拉的想法又重新发生了兴趣，并且他的方法成了解决变分問題的"直接"方法的原型（尤其是在苏联数学家的著作里）。

几乎所有力学及物理的基本規律通常都陈述为規定某一泛函的变分应該是0的"变分法原理"。由于这个原故变分法使許多重要的物理問題及技术問題得以解决。

III. 复变函数論

复数由十六世紀之初就常出現在数学里，但經历几百年之久才好不容易地慢慢被掌握了。直到十八世紀，欧拉（我們又得提起这位多能天才学者的名字！）才开始考虑复变数及其函数。在三十年代和四十年代中他研究了整个初等复变函数的理論，对此不仅利用了冪級数工具（这是由牛頓时代就知道的），同时也利用了无穷乘积及簡分式級数。我們已經知道[254 段]，指数函数与三角函数間的那个奇妙关系也出于欧拉之手。

欧拉的工作的另一重要环节是对复变数的积分（这里是計算原函数的意义）。在其 1777 年間彼得堡科学院提出而 1793 年才发表出来的一篇論文里，欧拉考虑了积分 $\int Z(z)dz$，而把 $Z(z)$ 理解为一个以分析方式給出的函数（比方說以冪級数給出的），并且在此以虚变数 $x+yi$① 替代 z。于是該积分就有 $P(x,y)+Q(x,y)i$ 的形状，而被积式变成这样：

$$[M(x,y)+N(x,y)i][dx+dyi]=[Mdx-Ndy]+[Ndx+Mdy]i.$$

分别比較所得等式的实部和虚部导致两个积分

$$P=\int(Mdx-Ndy),\qquad Q=\int(Ndx+Mdy).$$

既然微分式 $Mdx-Ndy$ 及 $Ndx+Mdy$ 如此各成 P 及 Q 的恰当微分，则 M 与 N 之間必須具有表征恰当微分的关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x}\text{ 及 }\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{4}$$

如此最先以一般形式出現了复变函数 Z 的实部及虚部的偏导数間的关

---

① 为簡单起見我們今后写通行的 i，但欧拉在此还写的是 $\sqrt{-1}$。不久他就引入了記号 i，但不是立即通行。

系①。这些关系在函数論进一步的发展及应用中都将起重要的作用。

将此理論建立成为独立而內容丰富的学科一事当归功于哥西和黎曼。

哥西在其"論虛限定积分"(1825年)中一开头就建立定积分

$$\int_{x_0+y_0i}^{X+Yi} f(z)dz \tag{5}$$

的概念,把它作为积分和的极限——这与曲綫积分相似[330段]。但是"曲綫"一詞是在該論文中別处提到的,而这里哥西直接考慮两个具有(連續)导函数的单調連續函数:

$$x=\varphi(t),\quad y=\chi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{6}$$

条件是要

$$\varphi(t_0)=x_0,\quad \varphi(T)=X;\quad \chi(t_0)=y_0,\quad \chi(T)=Y,$$

于是将积分(5)化归对实变数 t 的寻常积分[参閱331段,(6)]:

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t)+\chi(t)i)(\varphi'(t)+\chi'(t)i)dt.$$

这里,还假設函数 $f(z)$ 有(連續)导函数而建立了一个基本定理:积分(5)与函数(6)的选擇法无关(即与积分路綫无关)。哥西用变分方法,給出該定理的証明。

关于函数 $f(z)$ 的同一假設之下哥西在后来发表的作品及讲演中建立了沿閉界綫积分等于0这个事实,并且推出下面以他命名的著名公式:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(t)}{t-z}dt,$$

这里积分是沿复数平面上一个区域(K)的界綫(C)来取的,而 z 是这个区域的任意一个內点。我們在此遇到了該类型复变函数的这个奇妙性质:区域內的函数值由其边界上的值惟一地决定!

虽然哥西証明它的定理时只假設了函数 $f(z)$ 于所論区域內有一阶(連續)导函数,但由公式本身却可以(比方說借助对 z 的积分号下逐次微分)直接推出函数 $f(z)$ 的所有各阶导函数都同时存在。而且:取以 r 为半徑以点 z_0 为中心的圓作区域(K)时可以肯定,函数 $f(z)$ 在此圓內可展为 $z-z_0$ 的冪級数,也就是它的戴劳級数[参閱277段]。由此推出哥西对戴劳級数收斂半

① 但这类关系在达朗貝尔(1752年)及欧拉的流体力学研究中已經接触到。

徑所作的一般論断：这半徑总等于点 z_0 与 $f(z)$ 的最近"奇点"——在这奇点的邻近 $f(z)$ 不再是具有(連續)导函数的单值函数——的距离。

由此闡明了像这类莫名其妙的情况：函数 $\operatorname{arctg}x$ 及其导函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 只在 -1 至 $+1$ 区間內可展为 x 的冪級数，其收斂半徑为 1。在实数軸上它們一般沒有"奇点"，但如果过渡到复数区域，則相应复变函数 $\operatorname{arctg}z$ 及 $\frac{1}{1+z^2}$ 就在虛数軸上有"奇点" $z=\pm i$，因此收斂半徑等于这两个数的模，即等于 1。如此，复变函数的理論有时可以帮助我們理解关于实变函数的規律！

要了解清楚的是，复变函数 $w=f(z)$ 的导数存在的条件比起实变函数的相应条件来要严格得多。須知无論 $z+\Delta z$ 以怎样的方向趋近于 z 极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{dw}{dz}$$

应該恒有同一数值。因此，由复变函数(連續)导函数存在这一簡单事实就能推出那么多可惊的結果其真正的原因就在于此。这种惟一的导数存在的条件的問題发生得比較晚：哥西于 1847 年接触到这个問題，而黎曼于 1851 年則用它作为其論文"一元复变函数一般理論基础"的开端①。如果令 $z=x+yi$ 且 $w=u+vi$ 而 u, v 是实变数 x, y 的函数，則上述条件化为关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4a}$$

讀者当可認出这就是欧拉方程(4)。这些关系式也就是复变函数在靜电学、流体力学、气体力学、彈性学及热导理論等方面的应用的基础。

如果将复变数 z 和 w 解釋为相应平面上的点，則它們之間的函数关系 $w=f(z)$ 就对自变数値平面上区域 $\mathscr{Z}$ 內的每个点 z 給出函数値平面上区域 $\mathscr{W}$ 內的一个定点 w 与之相应。換句話說，函数 $w=f(z)$ 实現了一个由区域 $\mathscr{Z}$ 到区域 $\mathscr{W}$ 的点变換(图 86)。由函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{Z}$ 內惟一导数的存在(只要它不等于 0)，黎曼推出了这变換有一种奇妙的性質：如果在区域 $\mathscr{Z}$ 內取两条相交的曲綫(图 86 上的 zz_1 和 zz_2)，而在区域 $\mathscr{W}$ 內取其相应曲綫(ww_1 和 ww_2)，則两对曲綫所成两角必相等(两角按相同的方向計算)：这是一种保角变換或者說，共形变換。

共形变換，联系着画地图問題，是远在黎曼之前就經欧拉，拉格朗日和

---

① 参閱貝耐傳・黎曼文集(Гостехиздат, 1948), 49—87 頁。

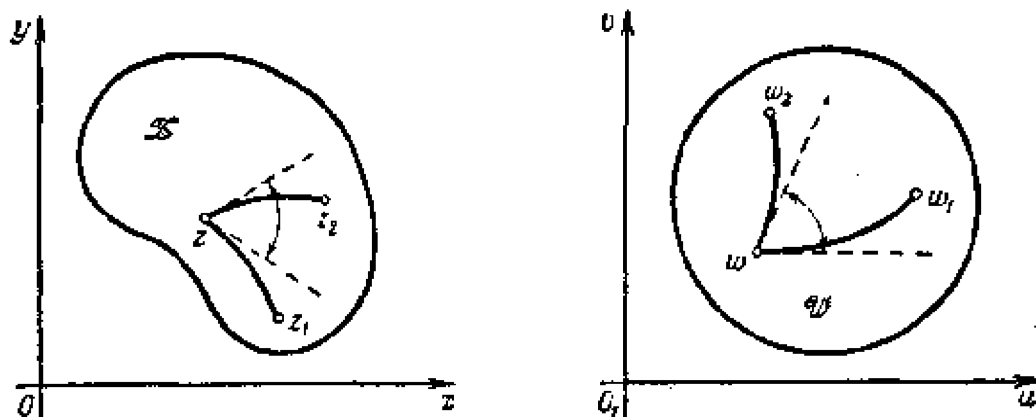


图 86.

高斯研究过的。但黎曼最先明确地把函数 $w=f(z)$ 实现共形变换这一性质与该函数有确定导数这一情况联系起来。他証明了共形变换論中的基本定理：一个圓可以由共形变换变成一个任意的单連通域(而在一定条件下这种变换也是唯一的)，其逆也眞。这种变换在复变函数論的种种应用中常常用到。这一思想也就是茹柯夫斯基①建立机翼理論的基础。

关于复变函数后来的輝煌发展我們不再多談了。

IV. 积分方程論

一个函数方程，如果在积分号下含有所求的未知函数，則称为积分方程②在求未知函数时如果就由积分方程出发，常是比由微分方程出发更为方便。这种情况讀者在微分方程論中証明“存在定理”时已接触到：例如，那里方程式 $y'=f(x, y)$ 連同初始条件 $y(x_0)=y_0$ 即由一个积分方程

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx+y_0$$

所替代，随后对此应用逐次逼近法就很方便，从形式的观点看来，在本书中討論傅立叶变换时，可以説已經牽涉到积分方程了［412 段公式(13)，(14)，(15)］。

在吸引数学家注意积分方程一事上起重要作用的是亚培尔所提出并解

---

① Николай Егорович Жуковский(1847—1921)是著名俄罗斯学者。

② 这名詞最先于 1888 年見于杜·布阿·雷蒙的著作里；他明白指出，偏微方程論的成就牽連到积分方程的研究，“但对此种方程，尙一无所知”。

决的一个力学問題(1826年)。該問題中要找这样一条鉛垂平面上的曲綫 AB，使得一个質点由任意一点 D 沿該曲綫无初速而滑降至其最低点 A 时所需时間正恰好是点 D 之高 a 的一个預先給定的連續函数:

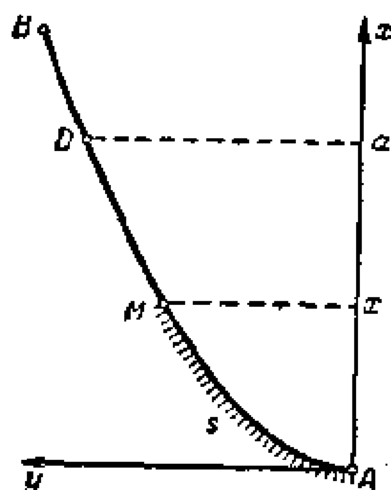


图 87.

$$\tau=\varphi(a).$$

将坐标軸布列如图，并設所求曲綫的方程为 $y=y(x)$。在該質点由初始位置 D 移至 M 时按动能定律将有(同前面最速降綫問題中一样)

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(a-x),\quad v=\frac{ds}{dt}=-\sqrt{2g(a-x)}\text{①},$$

由此有

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{2g(a-x)}},$$

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{a-x}}dx.$$

以 $\sqrt{2g}u(x)$ 表 $\sqrt{1+[y'(x)]^2}$，則我們有积分方程

$$\int_0^a\frac{u(x)dx}{\sqrt{a-x}}=\varphi(a).\tag{7}$$

它可用来决定未知函数 $u(x)$。

亚培尔事实上甚至已解决了較一般的方程

$$\int_0^a\frac{u(x)dx}{(a-x)^\alpha}=\varphi(a)\quad(0<\alpha<1);$$

为簡单起見我們姑且只談方程(7)。

将該方程两边乘以 $\frac{1}{\sqrt{z-a}}$ 并依 a 由 0 至 z 积分之:

$$\int_0^z\frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}}=\int_0^z da\int_0^a\frac{u(x)dx}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

将右边累次积分中的积分次序按344段公式(9)予以調换②:

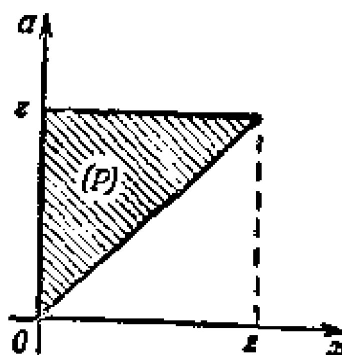


图 88.

① 記住弧 $s=\smile AM$ 隨 t 的增大而变小。

② 卷 I 344 段附注所說区域 (P) 在此可以用图 88 中的三角形。但因 $a=x$ 或 $a=z$ 时被积函数变成∞，故調换积分次序之合法性，还須另行驗証。

$$\int_0^z u(x)dx\int_x^z \frac{da}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

因为内层的积分在此等于 π [292 段, 1)], 所以得到等式

$$\int_0^z \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}} = \pi\int_0^z u(x)dx,$$

再依 z 微分之終于得出所求函数如下式:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}}.$$

知道了 $u(x)$, 就不难定出 $y(x)$。

亚培尔方程——同时保留其解法的原理——很久以后 (1884年)又經索宁① 推广。这問題被伏尔特拉② 所完成。他于 1896 年开始发表一系列研究, 其中叙述了形如

$$\int_a^x N(x, s)\varphi(s)ds = F(x) \text{ 及 } \varphi(x) + \int_a^x N(x, s)\varphi(s)ds = F(x)$$

的积分方程的一般理論, 而这两种类型的方程后来也就各被称为第一类及第二类"伏尔特拉积分方程"。这里 $\varphi(x)$ 是所求的函数, 而 $N(x, s)$ 和 $F(x)$ 是給定的函数。此后不久, 在 1900 至 1903 年間, 出現了弗雷德賀尔姆③ 的关于方程

$$\int_a^b N(x, s)\varphi(s)ds = F(x) \text{ 及 } \varphi(x) + \int_a^b N(x, s)\varphi(s)ds = F(x)$$

的卓越論文。这些第一类及第二类"弗雷德賀尔姆方程"与"伏尔特拉方程"的区别是这里两积分限都是常数。(但只要令 $s > x$ 时 $N(x, s) = 0$ 就可把伏尔特拉方程看作弗雷德賀尔姆方程的特例。)

不深入叙述弗雷德賀尔姆的理論了 我們只指出, 它在某种意义上頗像代数綫性方程的极限情形。

在本世紀过去五十年間, 积分方程論在种种方向有了广闊的发展, 并且

---

① Николай Яковлевич Сонин 院士(1849—1915)。

② Uito Volterra(1860—1940)是意大利数学家。

③ E. I. Fredholm(1866—1927)是瑞士数学家。

成为一种研究自然現象的重要而有力的工具。

V. 实变函数論

虽然全部数学分析教程就是研究实变数的函数，但本标題所指的却不是这个"古典的"分析部門，而是一种比較高深和精致的理論，并且是本世紀初才出現的。但是，它的淵源可以在十八世紀末及十九世紀初发生的那个数学中的批判思潮中看到，这种思潮前面已屡次提到过。对数学証明的严密性要求的提高引起了对老一輩数学家一系列質朴的論証的怀疑。例如，安培(1806年)及某些学者試图証明任何連續函数都可微分（只有个别的点除外），但这引出了波尔察諾、維尔斯脫拉斯等等的反面的例子[参閱 271 段]。另一方面，对一般性的追求也就自然引起了对具有"病理学"特点的函数的兴趣，这种特点是常常与我們的直覚不一致的。

这一带有否定性質的(并且引起"古典"分析代表人物强烈不滿情緒的)方向整个是我們目前所談这个学科的历史序幕。由对旧事实的批判及对"病理学"的兴趣渡向正面的理論，在很大程度上是由无穷集合論所促进的，后者在前世紀的七十年代及八十年代間由乔治·康托尔所建立。他的思想当初也遭到过同时代人的反对，后来終于对許多数学部門——特别是实变函数論——的发展起了很大的影响。

这个独立的学科于十九世紀及二十世紀之际在法国数学学派的著作中形成，該学派最著名的代表是波雷尔(E. Borel 1871—1956)，貝尔(R. Baire 1874—1932)及勒貝格(A. Lebesgue 1875—1941)。

波雷尔(1898)和勒貝格(1902)所建立的綫性点集的測度概念起了很大的作用，它可应用于一大类所謂可測集合上。点集 E 的測度 mE 就是区間的長度概念的推广。和長度一样，它也具有可加性，并且是一种更广义的可加性，即：如果有界集合 E 是有限个或甚至无穷个(但必須是可数多个)两两无公共点的可測集合

$$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$$

之和，則 E 也必可測，并且 E 的測度就等于所有 E_n 的測度之和（或測度級数之和）：

$$mE = \sum_n mE_n.$$

如果一个点集E可以用有限个或(可数)无穷个区間所复盖,而这些区間的长度总和可小到任何程度,則該点集的测度等于0。如果一个函数$f(x)$在全区間的所有点上都具有某种性質,只可能在某一测度为0的点集上是例外,这时我們就說該函数在該区間內"几乎到处"都具有該性質。我們利用这种說法来陈述下列两个勒貝格定理:

I. 一个在区間$[a, b]$內单調的函数$f(x)$在此区間內几乎到处都有导数。

II. 一条有长的連續曲綫$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$几乎到处有一定的切綫。

这两个定理可作为新理論的正面結果的例子;我們看到,这里面沒有什么"病理学",而是建立了一般的并且很精致的規律,而且这正是在古典分析方法表現无能为力的地方。

在現代分析里具有重大意义的是勒貝格对定积分概念的推广。假設讀者記得这个概念的黎曼定义[176段]。对于連續函数的情形① 这定义是很自然的:以几何方式来說,在Δx_i不大时曲綫$y=f(x)$上所有和x_i与x_{i+1}間的横坐标相应的纵坐标都与其中任一纵坐标$f(\xi_i)$相差很小,并且将一个元素条近似地代以一个面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$的元素矩形时可望和的极限

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_i f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

就給出曲綫下面积的精确值。如果函数$f(x)$不連續,則上述那样的替代法就沒有根据了!事实上黎曼的定义只适于在某种意义上說与連續函数"差別不多"的很窄的一类不連續函数,就如勒貝格所指出的只适用于"几乎到处"連續的函数。

讀者应記得,如果函数$F(x)$在区間$[a, b]$內有連續导函数$F'(x)$,則按此导函数不难用下列定积分"恢复"原函数[155段和183段(12°)]:

$$F(x)=(R)\int_a^x F'(x)dx+C. \tag{8}$$

但在导函数不連續(即使是有界的)的情形,仅仅因为$F'(x)$的黎曼积分可能不存在。这个公式就可能无用了,在1881年伏尔特拉就已做出这种例子。

所有这些情况就构成建立新的广义的积分概念的定义的理由。

我們对有界函数$f(x)$

---

① 正是对于这一情形哥西远在黎曼之前就講过这个定义。

$$A<f(x)<B \quad (a\leq x\leq b)$$

来說明勒貝格的积分定义的主要思想。勒貝格不是将自变数变化区間分段，而是将包含函数值的区間$[A, B]$分段：

$$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_i<y_{i+1}<\cdots<y_n=B,$$

并且考虑那些使函数值介乎 y_i 与 y_{i+1} 間的点的集合 E_i $(i=0, 1, \cdots, n-1)$：

$$y_i\leq f(x)<y_{i+1}.$$

在 $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ 不大时所有这些点事实上彼此接近，例如說都与 y_i 相差很小。将所有这些值都换成 y_i 而乘以集合 E_i 的测度并做出其和

$$\sum_i y_i\cdot mE_i. \tag{9}$$

当然，此时須假設$[a, b]$中使函数 $f(x)$ 的值介乎任何两数 α 与 β $(\beta>\alpha)$間的那些点 x 的集合总是可测的；只有这样的函数才是勒貝格所考虑的并且称之为可测的。对于总和(9)，不論 $f(x)$ 是怎样的可測函数，在 $\Delta x_i\to 0$ 恒存在一有限的极限；它就是函数 $f(x)$ 由 a 至 b 的勒貝格积分而表成

$$(L)\int_a^b f(x)dx.$$

勒貝格积分的应用范圍比黎曼的广大多了。特别是，借助勒貝格积分永远可以按有界导函数 $F'(x)$ 来"恢复"其原函数 $F(x)$：

$$F(x)=(L)\int_a^x F'(x)dx+C. \tag{8a}$$

勒貝格定义也可推广到无界函数的情形；此时所得积分是絕对收斂的。后来积分概念还有了进一步的推广——推广到积分可以不是絕对收斂。但其中沒有哪一个像勒貝格积分这样在分析各部門中都有广大丰富的应用。

实变函数后来的成就在很大程度上出于莫斯科数学学派的活动，这个学派的奠基者是叶果洛夫（Дмитрий Федорович Егоров 1869—1931）及魯金院士（Николай Николаевич Лузин 1883—1950）。下面举例引証两个基本定理，第一个屬于叶果洛夫，第二个屬于魯金。它們表明了，尽管現代函数論所研究的对象非常一般，但在某种意义上，它与古典分析的联系总是不断的。定理如下：

I. 任何可测函数序列 $\{f_n(x)\}$，只要忽略某一个测度任意小的点集，則其向极限函数 $f(x)$ 的收斂性就成为均匀的。

Ⅱ. 任何可測函数 $f(x)$，只要忽略某一測度任意小的点集，則它就成为連續的。

莫斯科学派的功績不仅在于实变函数論本身的进一步发展，也表現于将其概念及方法应用于别的分析部門里以及概率論里。

至今我們所談的只是所謂度量函数論，所利用的主要是点集的測度概念。新的函数論的另一分支，所謂描述函数論，导源于貝尔（1899 年）及勒貝格（1905 年）的著作，在描述函数論中，按照不連續函数如何由逐步取极限而形成的观点，研究它們的构造和性質。这些研究紧密联系着描述集合論，这里研究的是由区間（或矩形等）用一系列簡单运算所得出的越来越复杂的点集类。在这种理論的进一步深入发展中起主导作用的也是魯金及其学生等。

这里我們还提一提一枝数学分析，即所謂构造函数論。它所处理的是函数的近似表出法問題，利用种种分析工具，例如最簡单的是代数多項式及三角多項式。

切貝謝夫（Пафнутий Львович Чебышёв）在其"所謂平行四边形机构理論"①（1854 年）文中指出，戴劳級数段

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

当作函数 $f(x)$ 表示式时只在点 $x=x_0$ 附近比别的同次多項式好些。如果談的是在固定区間 $[a, b]$ 內用 n 次多項式近似表示函数的，則"要在該区間內它与 $f(x)$ 的离差的界限小于所有其他同次多項式的离差界限"时戴劳多項式还不如别的多項式 $P_n(x)$ 好。如此，第一次提出了"最优近似多項式"的問題，由这种多項式以

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P_n(x)-f(x)|$$

有最小可能值这个条件为其定义；此值式通常表以 $E_n(f)$。切貝謝夫的研究成为彼得堡学派的許多論著的出发点。

在 1885 年維尔斯脫拉斯发表了一个定理[278 段]，由此明白了对 $[a, b]$ 內任何連續函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)=0;$$

当然，反过来只要这个关系成立函数 f 也就必定連續。这就是函数 f 的构造性質（連續性）与 $E_n(f)$ 的性态（趋于 0）之間的相互关系的最簡的例子。

① П. Л. 切貝謝夫全集卷 Ⅱ（科学院出版社 1947）23—51 頁。

切貝謝夫和維尔斯脫拉斯的想法在 C. H. 伯恩斯坦院士(生于 1880 年)及其他苏联数学家以及美国学者但海姆·杰克松 (1888—1946) 等的研究中有了重要的发展。貫穿在这些著作中的一条鮮明綫索是函数 $f(x)$ 的微分性質及其他构造性質与 $E_n(f)$ 趋近于 0 的速度的相互影响。

VI. 泛函分析

这是数学分析中最年輕的一枝:它算起来还只有几十年的历史! 泛函分析的发生与下面的情况有关,有些乍看很不相干的东西,却可以注意到其間有着类似的地方,因此启发人們从它們之中只选取真正屬于本質的方面,以便寻求将它們統一起来的概念,以及能够概括有关它們的个别論証的一般論証。

这里値得注意的是,所考慮的对象的集合通常都在某些方面与現实空間有相似之处。这些集合也就叫做空間,虽然其元素性質上可以是各色各样的;像曲綫或曲面,自变数連續变化的一元函数或多元函数,实数的有限組或序列(即以自然数为自变数値的函数),等等。这类"空間"我們已經在 125 段(m 維算术空間),418 段(連續函数空間)及前面講变分法历史的部分里(光滑曲綫或連續可微分函数)遇到过。

在这种空間 $X=\{x\}$ 里所考慮的及所討論的是泛函算子

$$y=U(x) \tag{10}$$

(寻常"函数"概念的推广),它按某种規律或法則对 X 的每一元素 x 配以同空間或另一空間 Y 中的一个确定的元素 y。在 Y 就是实数集合的特殊情形,元素 x 配以一个数,此时泛函算子就叫做泛函——这种概念上面談变分法的历史里已經談过。

我們只来細談一种重要类型的空間,即所謂度量空間。它是指这样一个空間 X,其中对每对点 x 与 $\bar{x}$ 都确定了一个距离("度量函数"),即具有下列性質的一个非負实数 $\rho(x, \bar{x})$:

1) $\rho(x, \bar{x})=0$ 等价于 $x=\bar{x}$;

2) $\rho(\bar{x}, x)=\rho(x, \bar{x})$;

3) $\rho(x, \bar{\bar{x}})\leq\rho(x, \bar{x})+\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$["三角形公理",参閱 125 及 418 段]。

"序列 $\{x_n\}$ 收斂于极限元素 x"以下列关系为其定义:

$$\rho(x_n, x)\to 0;$$

在这情形我們写

$$x=\lim x_n \text{ 或 } x_n\to x.$$

現在举几个度量空間的例子。

A. 算术空間——一維的或一般 m 度的。

在一維的情形元素 x 就是实数，而

$$\rho(x,\bar{x})=|x-\bar{x}|.$$

在 $m>1$ 时元素 x 是实数有序組：$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$，这里 ξ_i 是点 x 的“坐标”。在这情形

$$\rho(x,\bar{x})=\sqrt{(\xi_1-\bar{\xi}_1)^2+\cdots+(\xi_m-\bar{\xi}_m)^2},$$

$\bar{\xi}_i$ 表示点 $\bar{x}$ 的“坐标”。

Б. 区間 $[a,b]$ 內的連續函数 $x=x(t)$ 的空間，带有度量

$$\rho(x,\bar{x})=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-\bar{x}(t)|.$$

В. 同上的集合，但换了另一种度量：

$$\rho(x,\bar{x})=\sqrt{\int_a^b[x(t)-\bar{x}(t)]^2dt}$$

[参閱 418 段附注]。

Г. 实数序列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),$$

其相应級数 $\sum_1^\infty \xi_n^2$ 收斂的空間度量是：

$$\rho(x,\bar{x})=\sqrt{\sum_1^\infty(\xi_n-\bar{\xi}_n)^2}.$$

Д. 有界实数序列空間，带有度量

$$\rho(x,\bar{x})=\sup_n|\xi_n-\bar{\xi}_n|.$$

利用“三角形公理”不难証明，对任何度量空間，由收斂性元素序列 $\{x_n\}$ 的收斂于极限元素 x 可推出下列与已知的波尔察諾-哥西条件相似的条件[参閱 52 段]：

$$\rho(x_n,x_{n'})<\varepsilon, \text{ 只要 } n,n'>N_\varepsilon.$$

反过来說，却并非在一切度量空間对每个滿足这个条件的序列 $\{x_n\}$，都存在极限元素 x。那些使这种极限元素恒存在的空間叫做完全空間。上列

А, Б, Г, Д 就是完全空間的例子，而 В 則是不完全的①。

現在，为了使讀者明白泛函分析中这种高度抽象性及一般性的用处，我們举現代泛函分析創始人之一波兰数学家巴拿赫 (S. Banach, 1892—1945) 的一个定理为例。該定理如下:

設給了一个泛函算子(10)，定义在完全度量空間 $X=\{x\}$ 內并且將 X 的元素 x 仍映射为同一空間中的元素。如果同时恒有

$$\rho(U(x), U(\bar{x}))\leqslant\alpha\cdot\rho(x, \bar{x}), \text{而 } 0<\alpha<1,$$

則存在(并且是惟一的)一点 x_0 使

$$U(x_0)=x_0. \tag{11}$$

这种点叫做算子 U 的不变点；它无非是泛函方程

$$x=U(x)$$

的"根"。

下面的想法可看作証明的綫索。如果 x 是任意一点，而 x_0 是一个不变点(我們姑假設其存在!)，則

$$\rho(U(x), U(x_0))=\rho(U(x), x_0)\leqslant\alpha\cdot\rho(x, x_0),$$

如此元素 $x_1=U(x)$ 要比 x 离 x_0 近些! 自然会由 x_1 出发重复这种过程:

$$\rho(U(x_1), x_0)\leqslant\alpha\cdot\rho(x_1, x_0)\leqslant\alpha^2\cdot\rho(x, x_0),$$

而元素 $x_2=U(x_1)$ 更接近于 x_0。这就启发我們想起，由任一所取元素 x 出发，重复施行算子 U 而做出一序列的元素

$$x_1=U(x), \quad x_2=U(x_1), \cdots, \quad x_n=U(x_{n-1}), \cdots. \tag{12}$$

可証明这个序列 $\{x_n\}$ 是滿足波尔察諾-哥西条件，由此(因为討論是完全空間)可推出它收斂于某一极限元素 x_0。然后可証明这就是所求的不变元素(并且还是惟一的)。証明程序如此，其細节不講了。

讀者要注意到按照形式 (12) 应用逐步逼近法就可求得 x_0。我們不难得到第 n 次逼近的估計:

$$\rho(x_n, x_0)\leqslant M\alpha^n. \ (M\text{为常数})$$

現在举几个各方面的問題，它們可以利用这"不变点原理"来立即解决。

1) 理論天文学里的著名"凱普拉方程"

$$x=m_0+\varepsilon\cdot\sin x \tag{13}$$

① 这种空間，如果在其中添补所有連同其平方都是勒貝格可积的不連續函数 $x(t)$，則可做成完全的。在此两个"几乎到处"一致的函数看作是空間的同一元素。

决定所謂行星偏近点角 x，已經知道的是其平均近点角 m_0 及行星軌道离心率 ε ($\varepsilon<1$)。

設"空間" X 就是全体实数所成的集合(参閱 A)，而"泛函算子"就是数变量 x 的一个寻常函数：

$$U(x)=m_0+\varepsilon\cdot\sin x.$$

显然，这个算子的不变点 x_0 恰好就是所求的方程(13)的根。

因为

$$\rho(U(x),U(\bar{x}))=|U(x)-U(\bar{x})|=\varepsilon\cdot|\sin x-\sin\bar{x}|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\cdot|x-\bar{x}|=\varepsilon\cdot\rho(x,\bar{x}),$$

則該定理的条件实現。如此，我們可断定方程(13)有一个惟一的根 x_0，而其計算可用逐步逼近法来进行。

2) 設給了一个第二类弗雷德賀尔姆积分方程，含有任意数値参变量 λ：

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt, \tag{14}$$

这里 $f(s)$ 是区間 $[a,b]$ 内的一个連續函数，而 $K(s,t)$ 是在正方形 $[a,b;a,b]$ 内連續的函数，并且設要找的是这个方程的連續解 $x(s)$。这里空間 X 就是 $[a,b]$ 的連續函数的空間，其中有度量

$$\rho(x,\bar{x})=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-\bar{x}(t)|$$

(参閱 Б)，算子

$$U(x)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

将每个連續函数 $x(t)$ 仍变为一个 s 的連續函数。这算子的不变点 $x_0(t)$ 显然就是方程(14)的解。

我們来驗証一下定理的条件。既然函数 K 是有界的：

$$|K(s,t)|\leqslant M\quad(M\text{为常数})$$

則有：

$$\rho(U(x),U(\bar{x}))=|\lambda|\cdot\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)[x(t)-\bar{x}(t)]dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda|\cdot M\cdot(b-a)\cdot\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-\bar{x}(t)|=|\lambda|\cdot M(b-a)\cdot\rho(x,\bar{x}).$$

由此可見只要

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)},$$

該定理的条件就实現了。所以，对参变数 λ 充分小(絕对)的値方程(14)有惟一的解 $x_0(t)$，它也同样可用逐步逼近法得出。

3) 最后一个例，我們来看方程个数及未知数个数都是无穷(但可数)的联立綫性方程組的解的問題；这种方程組恒可写成：

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}\xi_k+b_i \quad (i=1,2,3,\cdots), \tag{15}$$

这里 $a_{i,k}$ 及 b_i 是已知的系数，而 ξ_i 是未知数。假設系数 $a_{i,k}$ 及 b_i 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|\leqslant\alpha<1, \quad |b_i|\leqslant\beta \quad (i=1,2,3,\cdots). \tag{16}$$

我們感兴趣的是方程組(15)的有界解，即满足方程組(15)的有界数序列 $\{\xi_i\}$。

讀者容易明白，这里应該用有界序列 $x=\{\xi_i\}$ 的空間 X——具有度量

$$\rho(x,\bar{x})=\sup_i|\xi_i-\bar{\xi}_i|$$

做基础(参閱 II)。等式

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}\xi_i+b_i \quad (i=1,2,3,\cdots) \tag{17}$$

將每一組有界的 $x=\{\xi_k\}$ 都变換为一組仍然是有界的(由于(16)) $y=\{\eta_i\}$，即仍然是空間 X 的一个元素；算子 $U(x)$ 就由此确定。如果再取一个元素 $\bar{x}=\{\bar{\xi}_k\}$，则此算子的相应值 $U(\bar{x})$ 将为元素 $\bar{y}=\{\bar{\eta}_i\}$，可由类似(17)的等式所确定。因为[按不等式(16)的第一个]

$$\rho(y,\bar{y})=\sup_i\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}(\xi_k-\bar{\xi}_k)\right|\right\}\leqslant\alpha\cdot\sup_k|\xi_k-\bar{\xi}_k|=\alpha\cdot\rho(x,\bar{x}),$$

所以按該定理所求的解存在，并且是唯一的。此解也可用逐步逼近法得出。

如此多样的問題而能由同一根据出发来解决，这是一件很有教育意义的事情。这例子使讀者能更好地了解泛函分析的一般定理能如何在种种方面找到用处。这种看来如此抽象的方法，其力量就在于：它以最簡单的形式来研究种种对象及其間的关系，而不考虑其对問題不重要的特殊性。这也就是数学以往的发展經常走的这样的道路！

为了强調整个泛函分析的意义(自然我們只接触了它的初步原理)，只要提到泛函分析(指其較高深的部分)在現代理論物理中有了重要的应用，尤其是在量子力学里，而它无疑地又反过来影响了泛函分析的发展。

如此，屡次克服了个别学者甚至整代的学者們的錯誤和迷惑，数学分析从开始到现在都在不断成长起来，不断发展并且滋生起日新月异的嫩芽。有些新的分枝直接由認識客观世界的要求而发生，另外有些是遵循分析本身的发展規律而出現，随后才由于应用而充实起来。分析的各个分枝相互滲透，而在保持其固有問題和方法之下形成一个整体。